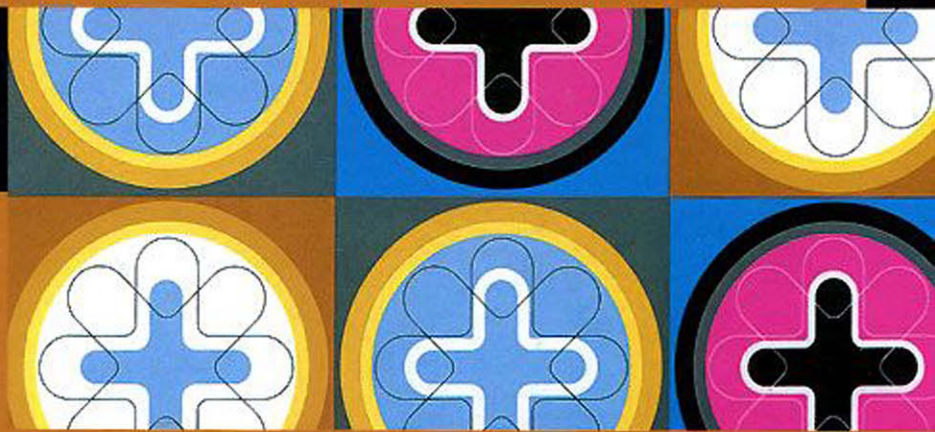


**С. А. Айвазян, Д. Фантаццини**

Учебник



# Эконометрика-2

## Продвинутый курс с приложениями в финансах

НАПИСАНИЕ на ЗАКАЗ:

1. Дипломы, курсовые, чертежи...
2. Диссертации и научные работы.

ЛЮБАЯ тематика,  
в том числе ЭКОНОМЕТРИКА, ТЕХНИКА...

магистр



[Вернуться в каталог бесплатных учебников](#)

[Подборка уникальной информации по экономике и менеджменту:](#)

- для самообразования топ-менеджеров;
- для повышения квалификации преподавателей;
- для рефератов и контрольных.

[Как стать лидером](#)

[Рекламируйте бизнес через собственный сайт](#)

[Рейтинг дипломных и курсовых работ](#)

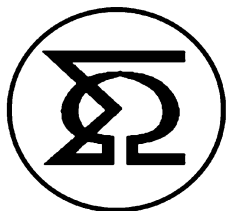
[Дистанционные курсы по созданию сайтов](#)





МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ  
МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

**С. А. Айвазян**  
**Д. Фантаццини**



# Эконометрика-2:

продвинутый курс  
с приложениями в финансах

Учебник

 Москва  
**МАГИСТР**  
**ИНФРА-М**

2014



УДК [31:33](075.8)

ББК 65.051я73-1

А36

**Айвазян С. А., Фантащини Д.**

**А36 Эконометрика-2: продвинутый курс с приложениями в финансах : учебник / С. А. Айвазян, Д. Фантащини. — М. : Магистр : Инфра-М, 2014. — 944 с. ([www.znaniium.com](http://www.znaniium.com))**

ISBN 978-5-9776-0333-1 (в пер.)

ISBN 978-5-16-010136-1

Агентство СІР РГБ

Продвинутый курс эконометрики охватывает ряд важнейших разделов дисциплины. В частности представлены методы и модели анализа многомерных временных рядов, последние достижения в области финансовой эконометрики (копула-функции, методы управления финансовыми рисками).

Для решения задач используется экономический инструментарий, включающий относительно недавно разработанные современные методы анализа многомерных временных рядов, байесовский подход в сочетании с приемами имитационного статистического моделирования, продвинутые численные методы оптимизации. Вычислительная реализация описываемых в учебнике примеров основана на использовании статистических и эконометрических пакетов R, Stata, Eviews, GAUSS.

Для студентов и аспирантов экономической и математической специализации, интересующихся продвинутыми эконометрическими методами и их приложениями в финансах, а также сотрудников аналитических служб банков и инвестиционных компаний.

УДК [31:33](075.8)

ББК 65.051я73-1

ISBN 978-5-9776-0333-1

ISBN 978-5-16-010136-1

© Айвазян С. А., Фантащини Д., 2014

© Издательство «Магистр», 2014

Подписано в печать 25.07.2014. Формат 70×100<sup>1</sup>/16.

Печать офсетная. Гарнитура «Ньютон».

Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Ул. печ. л. 76,11. Тираж 500 экз. (1–100 экз.) Заказ электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	<b>7</b>
<b>Глава 1. Выбор общего вида модели и нелинейная регрессия</b> .....	<b>11</b>
1.1. О подходах к выбору общего вида модели .....	11
1.2. Нелинейные модели регрессии и линеаризация .....	16
1.3. Вычислительные вопросы нелинейного метода наименьших квадратов .....	31
Выводы .....	54
<b>Глава 2. Построение интегральных измерителей для синтетических латентных категорий</b> .....	<b>57</b>
2.1. Концептуальные основы подхода к измерению синтетических латентных категорий .....	58
2.2. Исходные данные .....	60
2.3. Методология построения интегральных индикаторов — измерителей синтетических латентных категорий и методы многокритериального рейтингования .....	68
2.4. Примеры построения интегральных индикаторов — измерителей качества анализируемых синтетических латентных категорий .....	89
Выводы .....	119
<b>Глава 3. Байесовский подход в эконометрическом анализе</b> .....	<b>121</b>
3.1. Философия и общая логическая схема байесовского подхода .....	121
3.2. Априорные распределения, сопряженные с наблюдаемой генеральной совокупностью (определение и условие существования) ...	125
3.3. Генезис априорных сопряженных распределений .....	131
3.4. Пересчет значений параметров при переходе от априорного сопряженного распределения к апостериорному .....	143
3.5. Примеры задач на точечное и интервальное байесовское оценивание параметров модели .....	148
3.6. Байесовский прогноз зависимой переменной, основанный на нормальной классической линейной модели множественной регрессии .....	157
Выводы .....	161

<b>Глава 4. Анализ многомерных временных рядов</b> .....	<b>163</b>
4.1. Многомерные временные ряды: определения и основные понятия	163
4.2. Модели векторной авторегрессии (VAR-модели)	166
4.3. Структурные VAR-модели (SVAR-модели)	202
4.4. Системы одновременных уравнений (COY)	223
4.5. Коинтеграция	281
4.6. Регрессионные модели с распределенными лагами	360
Выводы	375
<b>Глава 5. Анализ и моделирование волатильности</b> .....	<b>385</b>
5.1. Одномерные модели авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH- и GARCH-модели)	385
5.2. Многомерные GARCH-модели (MGARCH)	433
5.3. Реализованная волатильность	468
Выводы	502
<b>Глава 6. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций</b> .....	<b>507</b>
6.1. Копула-функции	509
6.2. Эллиптические копула-функции	516
6.3. Архимедовы копула-функции	528
6.4. Парные копула-функции	545
6.5. Меры зависимости	557
6.6. Процедуры оценивания: параметрические методы	567
6.7. Процедуры оценивания: полупараметрические и непараметрические методы	572
6.8. Выбор копула-функции	583
6.9. Критерии согласия для копула-функций	590
Выводы	618
<b>Глава 7. Анализ финансовых данных в задачах управления риском</b> .....	<b>625</b>
7.1. Введение: имеющийся опыт и некоторые общие понятия	625
7.2. Управление рыночным риском	632
7.3. Управление операционным риском	678
7.4. Управление кредитным риском	718
Выводы	855
<b>Приложение 1. Исходные данные и результаты межстранового и межрегионального анализа КЖН</b> .....	<b>865</b>
<b>Приложение 2. Некоторые сведения об одномерных и многомерных законах распределения вероятностей, используемые в байесовском подходе</b> .....	<b>885</b>
<b>Литература</b> .....	<b>891</b>
<b>Алфавитно-предметный указатель</b> .....	<b>935</b>

## Предисловие

*Дорогой читатель!*

В предисловии к «Методам эконометрики» [Айвазян (2010)] я говорил о том, что они «охватывают весьма полный спектр методов математико-статистического инструментария эконометрики по ее традиционным разделам», включая: (1) классическую линейную модель регрессии и классический метод наименьших квадратов; (2) обобщенную линейную модель регрессии и обобщенный метод наименьших квадратов; (3) линейные модели регрессии с переменной структурой; (4) модели с дискретными и дискретно-непрерывными зависимыми переменными (модель бинарного и множественного выбора, тобит-модели); (5) статистический анализ одномерных временных рядов. Но уже в той книге я пытался преодолеть распространенный недостаток, заключающийся в том, что «важнейшие для эконометрического анализа *прикладные методы многомерной статистики* (дискриминантный и кластер-анализы, метод главных компонент и др.) по непонятным причинам отсутствуют в эконометрических курсах и классических университетских учебниках Северной Америки и Западной Европы» ([Айвазян (2010), с. 10]). Правда, в том же предисловии признавалось, что в «Методах эконометрики» 2010 г. «представлены далеко не все важнейшие разделы современной эконометрики... Нет, например, *методов и моделей анализа многомерных временных рядов...* не отражены последние достижения в области *финансовой эконометрики* (копула-функции, методы управления финансовыми рисками), не представлены *байесовский подход* к эконометрическому анализу и *методы измерения и анализа синтетических латентных категорий*, комплексно характеризующих качество или эффективность функционирования анализируемой системы» (с. 11). И я пообещал тогда, что «вся эта проблематика будет представлена в **продвинутом** курсе эконометрики (предназначенном для магистерского уровня образования)».

Но, должен признаться, было непросто решиться на создание такого учебника. Причин тому несколько.

*Во-первых*, он охватывает области знаний, с одной стороны, еще фактически не представленные в отечественной учебной и монографической литературе (здесь я, в первую очередь, имею в виду эконометрический анализ моделей волатильности, копула-функций, разного рода задачи управления финансовыми рисками), а с другой — еще не устоявшиеся, продолжающие бурно развиваться, а потому содержащие подчас «сырые», полуэвристические подходы и рекомендации.

*Во-вторых*, представленные в данном учебнике содержательные постановки задач (построение интегральных измерителей для так называемых

ваемых синтетических латентных категорий, проблемы спецификации анализируемых зависимостей, разноаспектный анализ и моделирование операционных, рыночных и кредитных финансовых рисков) требуют при своем решении использования *необъятного по диапазону* эконометрического инструментария, включающего, в частности, относительно недавно разработанные современные методы анализа многомерных временных рядов, байесовский подход в сочетании с приемами имитационного статистического моделирования, продвинутое численные методы оптимизации. Уместить весь этот инструментарий в рамках одной, пусть даже такой как эта объемной книги, задача невыполнимая, а потому в некоторых местах учебника (в основном, относящихся к главе 7, посвященной задачам управления финансовыми рисками) нам пришлось переходить к *обзорному* стилю изложения, предлагая читателю находить уточнение и углубление деталей описываемых методов в работах других авторов.

*В-третьих*, существенное осложнение процесса создания книги было связано с «разноязычием» авторов. Главы 5, 6, 7 и часть главы 4 были написаны моим коллегой по Московской школе экономики МГУ им. М.В. Ломоносова Деаном Фантаццини на английском языке, они требовали перевода, тщательного редактирования, унификации стиля подачи материала. Большую помощь в переводе англоязычной части книги оказал Александр Владимирович Кудров. В переводе участвовал и я, мне же пришлось осуществить общее научное редактирование текста учебника.

Что же подтолкнуло авторов к выполнению столь объемной работы по созданию предлагаемого Вашему вниманию учебника?

В первую очередь, это твердое осознание того факта, что назрела объективная необходимость в подобном учебно-научно-методологическом издании. Дело в том, что мировые финансовые кризисы 1998 и 2008 гг., продолжающиеся явления экономической рецессии продемонстрировали общее неблагополучие в сфере управления финансовыми рисками. По-видимому, в определенной мере этим можно объяснить и тот прорыв в **финансовой эконометрике** и связанных с ней разделах многомерного статистического анализа, который мы наблюдаем в последние полтора-два десятилетия. И, конечно, требуются определенные усилия, направленные на оснащение обучающейся молодежи и сотрудников аналитических служб банков, инвестиционных компаний последними научно-методологическими достижениями в этой области. Можно признать, что в плане освоения *теоретической базы* (методов и моделей **финансовой математики**) такие усилия в отечественной научно-образовательной практике уже предприняты (см. работы А.Н. Ширяева, например, [Ширяев, (2004)], и его учеников). Наша книга, насколько

мне известно, является «первой ласточкой» в области знаний, посвященных «приземлению» этой *теоретической базы на конкретные условия и конкретные исходные данные*, что и составляет главное предназначение методов эконометрики. Отмечу также, что в книгу включены некоторые оригинальные научно-методологические разработки авторов (это относится, в основном, к главам 2 и 7).

Итак, наша книга адресована студентам и аспирантам экономической и математической специализации, интересующимся продвинутыми эконометрическими методами и их приложениями в финансах, а также сотрудникам аналитических служб банков и инвестиционных компаний.

Представленные в книге методы и модели могут составить содержание одного или нескольких (в зависимости от отведенного в учебном плане вуза времени) семестровых курсов магистерского или аспирантского уровня по схеме — 2 часа лекций, 2 часа семинарских занятий. Вычислительная реализация описываемых в учебнике примеров основана на использовании статистических и эконометрических пакетов R, Stata, Eviews, GAUSS.

В заключение — о признательности авторов учебника. Прежде всего они благодарны коллективам и администрации Московской школы экономики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Центрального экономико-математического института Российской академии наук, плодотворная профессиональная среда которых существенно помогала в работе над учебником. Мы благодарны также профессору Эдуардо Росси (Eduardo Rossi) из Университета Павии, (Италия) и профессору Станиславу Анатольеву (Российская экономическая школа) за любезное представление материалов по одномерным GARCH-моделям, которые были использованы при написании главы, посвященной анализу волатильности. Свое любезное согласие на использование материалов по структурным VAR-моделям мы получили также от профессора Эрика Зиво́ (Eric Zivot) из Университета Вашингтона, США), за что мы ему также благодарны. Наконец, мы благодарны Алле Павловне и Галине Юрьевне Грохотовым за их нелегкий, самоотверженный и профессиональный труд по подготовке оригинал-макета книги.

Я отдаю себе отчет в том, что объемность и пионерный характер предлагаемого издания являются «питательной средой» для выявления его слабых мест и недостатков. Всю ответственность за них, конечно, несут авторы, которые будут признательны читателям, приславшим им или в издательство свои отзывы и критические замечания.



## Глава 1

# Выбор общего вида модели и нелинейная регрессия

### 1.1. О подходах к выбору общего вида модели

Как по отдельным, частным наблюдениям выявить и описать интересующую нас зависимость некоторого *результатирующего признака*  $\eta$  от набора так называемых *объясняющих переменных*  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(p)})'$ , характеризующих (наряду с другими, не поддающимися учету факторами) условия функционирования анализируемой системы?<sup>1</sup> Эта проблема бесспорно занимает центральное место во всем прикладном математическом (и, в частности, в *эконометрическом*) анализе!

Попробуем уточнить и формализовать сказанное, одновременно определив место *тематики выбора общего вида модели регрессии* во всей этой проблеме. Будем полагать, что в серии экспериментов (наблюдений) за анализируемой системой есть возможность регистрации значений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  количественного (случайного по своей природе) признака  $\eta$  и соответствующих значений  $X_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(p)})'$ ,  $X_2 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(p)})'$ , ...,  $X_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)})'$  количественных объясняющих переменных  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(p)})'$  (последние могут быть как случайными, так и не случайными переменными). Тогда общая задача статистического исследования зависимости, связывающей признак  $\eta$  с переменными  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(p)})'$ , может быть сформулирована следующим образом:

*по результатам наблюдений*

$$\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)}; y_i\}_{i=1,2,\dots,n} \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Верхний индекс «штрих» у вектора или матрицы здесь и далее означает операцию транспонирования.  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>



исследуемых переменных, произведенных в ходе функционирования анализируемой системы, построить (оценить) такую функцию

$$\hat{y} = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}), \quad (1.2)$$

которая позволила бы наилучшим (в определенном смысле) образом восстанавливать неизвестные значения результирующей переменной  $y$  по заданным значениям объясняющих переменных  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})'$ .

При широко распространенных в практике эконометрического анализа критериях качества «подгонки» наилучшее решение сформулированной выше проблемы получается при использовании в роли  $f(X)$  функции регрессии  $\eta$  по  $\xi$ , т. е. функции  $\mathbf{E}(\eta | \xi = X)$  (о других возможных подходах к построению функции  $f(X)$  см., например, в [Айвазян и др. (1985)], п. 5.2 и 5.3). Поэтому речь идет обычно о выборе общего вида именно функции регрессии  $\eta$  по  $\xi$ , причем в параметрической постановке задачи, т. е. в предположении, что искомая функция  $f(X) = \mathbf{E}(\eta | \xi = X)$  принадлежит некоторому параметрическому семейству функций  $\mathbf{F} = f(X; \Theta)$ . Так что задачей исследователя является выбор того или иного параметрического семейства  $\mathbf{F}$ , основанный на анализе имеющихся в нашем распоряжении исходных статистических данных (1.1) и на некоторых априорных сведениях о природе искомой зависимости.

Тогда модель зависимости результирующего признака  $\eta$  от объясняющих переменных  $\xi$  может быть представлена в форме:

$$\eta = \Psi(\xi; \varepsilon; \Theta), \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon$  — некоторая остаточная случайная составляющая, аккумулирующая в себе влияние на  $\eta$  всех неучтенных в  $\xi$  факторов, а  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)'$  — вектор-столбец неизвестных (подлежащих оцениванию по наблюдениям (1.1)) параметров модели.

Соответственно, функция  $f(X)$  из (1.2) определяется как функция регрессии  $\eta$  по  $\xi$ , т. е.

$$f(X; \Theta) = \mathbf{E}(\eta | \xi = X) = \mathbf{E}(\Psi(\xi; \varepsilon; \Theta) | \xi = X), \quad (1.4)$$

где операция усреднения ( $\mathbf{E}$ ) производится по всем возможным значениям случайной величины  $\varepsilon$ .

Отметим, что как в нашем учебнике [Айвазян (2010)], так и в большинстве других отечественных и зарубежных учебников по эконометрике выбор структуры функции  $\Psi(\xi; \varepsilon; \Theta)$ , а вместе с ней и выбор общего вида функции  $f(X; \Theta)$  был предопределен, а именно:

и, соответственно:

$$f(X; \Theta) = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \dots + \theta_p x^{(p)}$$

(равенство нулю среднего значения остатка, т.е. тождество  $E\varepsilon = 0$ , обеспечивается соответствующим подбором значения свободного члена  $\theta_0$ ). Таким образом, рассматривались **только линейные** (и *относительно объясняющих переменных, и относительно оцениваемых параметров*) модели.

Подчеркнем, что главная специфика модели, главные неудобства исследователю доставляет *факт нелинейности функции регрессии  $f(X; \Theta)$  по оцениваемым параметрам  $\Theta$* . Если же функция  $f(X; \Theta)$  линейна по параметрам, но нелинейна по объясняющим переменным, то дополнительных принципиальных сложностей в оценке параметров и в исследовании свойств получаемых оценок обычно не возникает. В качестве примера подобной ситуации рассмотрим так называемую *полиномиальную регрессию*.

**Полиномиальная регрессия.** Пусть функция регрессии  $f(X; \Theta)$  имеет вид *алгебраического полинома* от объясняющих переменных  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$  степени  $m$ . Ограничимся в своем примере для определенности случаем *одной* объясняющей переменной, т.е.  $p = 1$ , и квадратичным порядком полинома, т.е.  $m = 2$  (переход к общему случаю осуществляется без каких-либо принципиальных трудностей). Итак:

$$\Psi(\xi; \varepsilon; \Theta) = \theta_0 + \theta_1 \xi + \theta_2 \xi^2 + \varepsilon,$$

так что, располагая наблюдениями  $\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, n}$ , мы имеем уравнения регрессии вида

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \theta_2 x_i^2 + \varepsilon_i,$$

где регрессионные остатки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  полагаются одинаково  $(0; \sigma^2)$ -нормально распределенными и взаимнонезависимыми.

Представим функцию регрессии  $f(x; \Theta) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$  в системе базисных функций  $\{\varphi_0(x); \varphi_1(x); \varphi_2(x)\}$ , являющихся ортогональными (на множестве наблюдений  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ ) **полиномами Чебышева** (см., например, п. 7.1.4 в [Айвазян и др. (1985)]), т.е. :

где  $\varphi_0(x_i) = 1$ ;  $\varphi_1(x_i) = x_i - \bar{x}$  и

$$\varphi_2(x_i) = x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} (x_i - \bar{x}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$а \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Ортогональность полиномов  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  на множестве наблюдений  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  означает, что

$$\sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = 0 \quad \text{при } j \neq k. \quad (1.6)$$

Интерпретируя в уравнении (1.5) функции  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  как объясняющие переменные в классической линейной модели множественной регрессии (КЛММР) и воспользовавшись свойством (1.6), а также формулами и свойствами МНК-оценок КЛММР (см., например, [Айвазян (2010)], гл. 4), имеем:

$$\hat{\theta}_k = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \varphi_k(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_k^2(x_i)}, \quad k = 0; 1; 2;$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 \varphi_1(x_i) - \hat{\theta}_2 \varphi_2(x_i) \right)^2,$$

$$\left| y - \sum_{k=0}^2 \hat{\theta}_k \varphi_k(x) \right| < t_{1-P} \frac{(n-3) \cdot \hat{\sigma}}{2} \cdot \sqrt{1 + \sum_{k=0}^2 \frac{\varphi_k(x)}{\sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i)}}$$

(выполнение последнего неравенства гарантируется с доверительной вероятностью  $P$ , а  $t_{\alpha}(\nu)$  — это  $100\alpha\%$ -ная точка распределения Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы).

В этой главе мы выходим за пределы линейных (по оцениваемым параметрам) моделей регрессии. Подразумевается, что мы решили предварительно вопрос о подборе таких функций  $\Psi$  (и, соответственно,  $f$ ), которые наилучшим в определенном смысле образом соответствовали бы имеющимся в нашем распоряжении данным (1.1) и априорным сведениям о природе искомой зависимости. Приходится констатировать, что этап исследования, посвященный выбору общего вида функции регрессии, (параметризация модели) беспорочно является

ключевым: от того, насколько удачно он будет реализован, решающим образом зависит точность восстановления значения результирующего показателя  $y$  по значениям объясняющих переменных. В то же время приходится признать, что этот этап находится, пожалуй, в самом невыгодном положении: к сожалению, не существует системы стандартных рекомендаций и методов, которые образовывали бы строгую теоретическую базу для его наиболее эффективной реализации.

Остановимся на некоторых рекомендациях, связанных с реализацией тех основных моментов, учет которых необходим при решении проблемы выбора общего вида функции регрессии.

- (i) *Максимальное использование априорной информации о содержательной сущности анализируемой зависимости (см. п. 2.5.1 в [Айвазян (2010)], п. 6.1 в [Айвазян и др. (1985)]).*
- (ii) *Предварительный анализ геометрической структуры множества исходных статистических данных (см. п. 2.5.2 в [Айвазян (2010)], п. 6.2 в [Айвазян и др. (1985)]).*
- (iii) *Использование специальных математико-статистических критериев согласия, с помощью которых проверяются гипотезы об общем виде анализируемой зависимости (см. п. 2.5.3 в [Айвазян (2010)]).*
- (iv) *Математико-статистический и графический анализ оцененных остатков  $\hat{\varepsilon}_i = y_i - f(X_i; \hat{\Theta})$ ,  $-i = 1, 2, \dots, n$ , которые должны «вести себя» определенным образом в случае правильного выбора общего вида функции  $f(X_i; \Theta)$  (см., например, [Дрейнер, Смит (1986)], гл. 3, а также [Мостеллер, Тьюки (1982)], выпуск 1, стр. 189–192 и выпуск 2, гл. 16, с. 144–182).*
- (v) *Поиск модели, наиболее устойчивой к варьированию состава выборочных данных, на основании которых она оценивается (см. п. 6.3.2 в [Айвазян и др. (1985)]).*
- (vi) *Поиск компромисса между сложностью модели и точностью ее оценивания (которая зависит от соотношения числа  $n$  используемых наблюдений и числа  $t$  оцениваемых параметров).*

В распространенных компьютерных пакетах программ (STATA, SPSS, E-views и др.) эта идея реализована с помощью подсче-

Шварца (Schwarz), определяемых формулами (см. [Akaike (1973)] и [Schwarz (1978)]):

$$AIC = 2\frac{m}{n} + \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \right);$$

$$Schwarz = \frac{m \cdot \ln n}{n} + \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \right).$$

Выбирают ту модель, для которой значения этих статистик меньше.

С учетом того факта, что с ростом сложности модели (т. е. с ростом числа оцениваемых параметров  $m$ ) при фиксированном объеме выборки  $n$  точность оценивания падает, в этих статистиках к минимизируемому обычно критерию метода наименьших квадратов ( $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$ ) добавляется *штраф за перепараметризацию* модели (в критерии Шварца он несколько выше). Это, в общем-то, некая *эвристическая попытка* реализации идеи поиска компромисса между  $m$  и  $n$ . Гораздо более тонкий подход к реализации этой идеи предложен в работе [Вапник (1979)]. Здесь мы ограничимся, в основном, ссылками на работы, в которых все эти идеи развиваются, с тем чтобы в дальнейшем сосредоточиться на анализе нелинейных моделей: способах их линеаризации (п. 1.2), вычислительных аспектах оценивания их параметров и свойствах получаемых при этом оценок (п. 1.3).

## 1.2. Нелинейные модели регрессии и линеаризация

Многие важные связи в экономике являются *нелинейными*. Примеры такого рода регрессионных моделей доставляет нам изучение так называемых *производственных функций* (зависимостей, существующих между объемом произведенной продукции и основными факторами производства — трудом, капиталом и т. п.), функций *спроса* (зависимостей, существующих между спросом на какой-либо вид товаров или услуг, с одной стороны, и доходом и ценами на этот и другие товары — с другой), доходностей и рисков на фондовых рынках. Ниже мы подробнее обсудим возможный общий вид этих и других моделей. Как уже было отмечено выше, *этап параметризации регрессионной модели*, т. е. выбора параметрического семейства функций  $\{f(X; \Theta)\}$ , в рамках которого производится дальнейший поиск неизвестной функции регрессии

$f(X) = \mathbf{E}(y | X)$ , является одновременно наиболее важным и наименее формализованным и теоретически обоснованным этапом регрессионного анализа. Если же в результате реализации этого этапа эконометрист пришел к выводу, что функция  $f(X; \Theta)$  нелинейна, то далее он обычно действует следующим образом:

- вначале он пытается подобрать такие преобразования к анализируемым переменным  $y, x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$ , которые позволили бы представить искомую зависимость в виде *линейного* соотношения между преобразованными переменными; другими словами, если  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p$  — те самые искомые функции, которые определяют переход к преобразованным переменным, т.е.  $\tilde{y} = \varphi_0(y), \tilde{x}^{(1)} = \varphi_1(x^{(1)}), \dots, \tilde{x}^{(p)} = \varphi_p(x^{(p)})$ , то связь между  $y$  и  $X = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$  может быть представлена в виде *линейной* функции регрессии  $\tilde{y}$  по  $\tilde{X}$ , а именно:

$$\tilde{y}_i = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x}_i^{(1)} + \dots + \theta_p \tilde{x}_i^{(p)} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

эту часть исследования обычно называют **процедурой линеаризации модели**;

- в случае невозможности линеаризации модели приходится исследовать искомую регрессионную зависимость в терминах *исходных переменных*, а именно:

$$y_i = f(X_i; \Theta) + \varepsilon_i;$$

если спецификация регрессионных остатков  $\varepsilon_i$  соответствует условиям *классической* модели, то для вычисления МНК-оценок  $\hat{\Theta}_{\text{МНК}}$  векторного параметра  $\Theta$  решается оптимизационная задача вида

$$\hat{\Theta}_{\text{МНК}} = \arg \min_{\Theta} \sum_{i=1}^n (y_i - f(X_i; \Theta))^2.$$

Методам преодоления возникающих при этом вычислительных трудностей посвящен п. 1.3.

### 1.2.1. Некоторые виды нелинейных зависимостей, поддающиеся непосредственной линеаризации

Итак, пусть  $y$  и  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})'$  — *исходные* анализируемые переменные (соответственно результирующая и объясняющие), а  $\varepsilon$  — случайная остаточная компонента, участвующая в записи регрессионной зависимости, связывающей между собой  $y$  и  $X$ .

В представлении *исходных наблюдений* (1.1) нам будут удобны в дальнейшем следующие обозначения:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(p)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(p)} \end{pmatrix} \sim (n \times (p+1)) \text{ — матрица} \\ \text{наблюдённых значений} \\ \text{объясняющих переменных;} \quad (1.1a)$$

$\mathbf{Y} = (y_1 y_2 \dots y_n)'$  — вектор-столбец наблюдённых значений зависимой переменной.

За редким исключением вопросы линеаризации анализируемых связей решаются на основе рассмотрения *парных* зависимостей (и графически представляющих их парных корреляционных полей) типа  $(x_i^{(j)}, y_i)$  и  $(x_i^{(j)}, x_i^{(l)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому ниже будут представлены и проанализированы именно *парные* регрессионные зависимости, поддающиеся линеаризации.

### Зависимости гиперболического типа

1) Предположим, что анализируемые переменные и случайные регрессионные остатки соответственно  $x, y$  и  $\varepsilon$  связаны между собой статистической зависимостью вида

$$y = \theta_0 + \theta_1 \frac{1}{x} + \varepsilon \quad (0 < x < \infty).$$

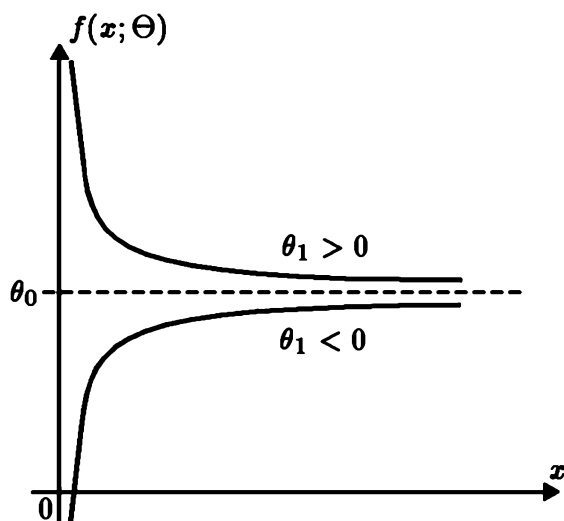
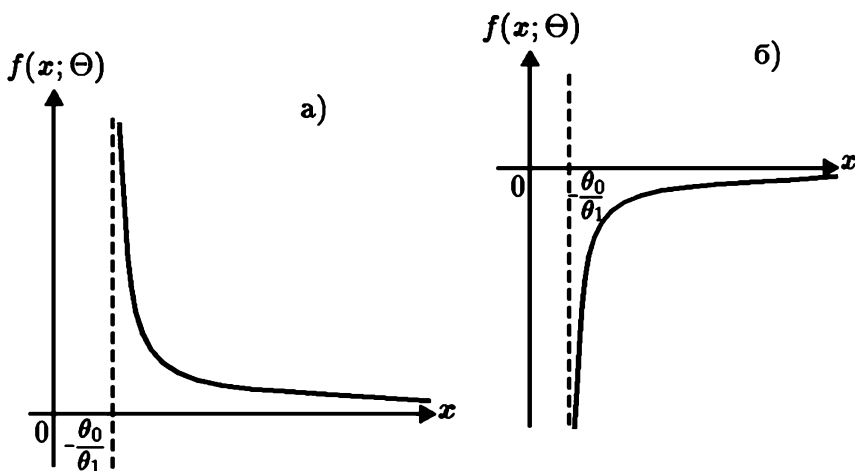


Рис. 1.1. График гиперболической зависимости вида  $f(x; \Theta) = \theta_0 + \frac{\theta_1}{x}$

Соответствующая кривая регрессии  $f(x; \Theta) = f(x; \theta_0, \theta_1) = \theta_0 + \theta_1/x$  (см. рис. 1.1) характеризуется двумя асимптотами (т. е. прямыми, к которым график функции неограниченно приближается, не достигая их) — горизонтальной ( $y = \theta_0$ ) и вертикальной ( $x = 0$ ). С помощью преобразования объясняющей переменной  $\tilde{x} = 1/x$  (т. е. при переходе к новой объясняющей переменной  $\tilde{x}$ ) эта зависимость приводится к линейному виду  $y = \theta_0 + \theta_1\tilde{x} + \varepsilon$ . Соответственно при вычислении МНК-оценок параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  второй столбец матрицы  $X$  должен быть сформирован из чисел  $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n$ .



**Рис. 1.2.** График гиперболической зависимости вида  $f(x; \Theta) = 1/(\theta_0 + \theta_1 x)$ :

а) случай  $\theta_0 < 0$ ;  $\theta_1 > 0$  (для  $x > -\theta_0/\theta_1$ );

б) случай  $\theta_0 > 0$ ;  $\theta_1 < 0$  (для  $x > -\theta_0/\theta_1$ )

2) Пусть переменные  $x$ ,  $y$  и случайные регрессионные остатки  $\varepsilon$  связаны между собой статистической зависимостью вида

$$y = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon} \quad \left( -\frac{\theta_0}{\theta_1} < x < \infty \right)$$

(см. рис. 1.2). Очевидно, мы придем к *линейной* модели  $\tilde{y} = \theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon$ , если в качестве результирующего признака рассмотрим переменную  $\tilde{y} = 1/y$ . Следует не забыть только, что при вычислении МНК-оценок  $\hat{\theta}_0$  и  $\hat{\theta}_1$  надо использовать в качестве вектора наблюдаемых значений зависимой переменной вектор  $\hat{Y} = (1/y_1, 1/y_2, \dots, 1/y_n)'$ .

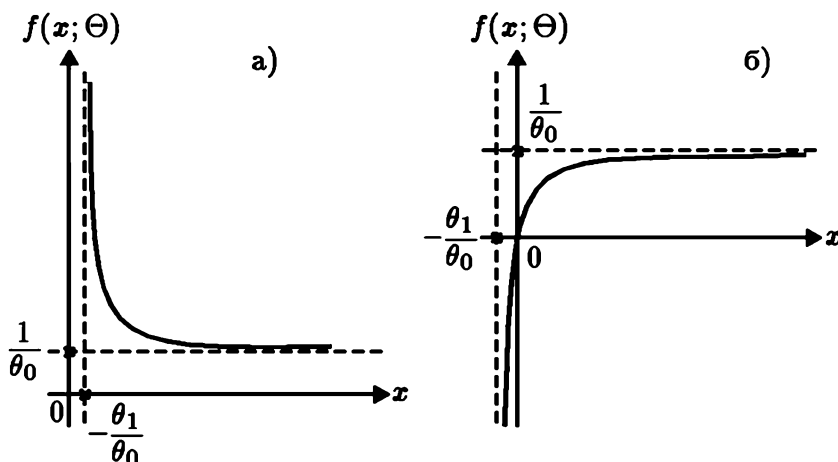
3) Если этап параметризации модели регрессии приводит нас к зависимости вида

$$y = \frac{x}{\theta_0 x + \theta_1 + x\varepsilon} \quad \left( -\frac{\theta_1}{\theta_0} < x < \infty \right)$$



(см. рис. 1.3), то линейаризацию исследуемой связи обеспечит переход к новым переменным  $\tilde{y} = 1/y$  и  $\tilde{x} = 1/x$ . Легко видеть, что эти переменные будут связаны между собой зависимостью вида

$$\tilde{y} = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon.$$



**Рис. 1.3.** График гиперболической зависимости вида  $f(x; \Theta) = \frac{x}{\theta_0 x + \theta_1}$ :  
 а) случай  $\theta_0 > 0$ ;  $\theta_1 < 0$  (для  $x > -\theta_1/\theta_0$ );  
 б) случай  $\theta_0 > 0$ ;  $\theta_1 > 0$  (для  $x > -\theta_1/\theta_0$ )

Очевидно, что матрицы  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ , используемые в формулах метода наименьших квадратов при вычислении оценок  $\hat{\theta}_0$  и  $\hat{\theta}_1$ , должны формироваться не из наблюдаемых значений, соответственно  $x_i$  и  $y_i$ , а из обратных к ним величин  $\tilde{x}_i = 1/x_i$  и  $\tilde{y}_i = 1/y_i$ .

Заметим, что функции, изображенные на рис. 1.1 (вариант  $\theta_1 < 0$ ) и 1.3 (вариант б)) используются в определенных ситуациях при построении так называемых *кривых Энгеля*, которые описывают зависимость спроса на определенный вид товаров или услуг ( $y$ ) от уровня доходов ( $x$ ) потребителей. При этом спрос определяется либо абсолютными, либо относительными (по отношению к общим потребительским расходам) расходами на данный вид товаров или услуг. Функции, изображенные на рис. 1.1 (вариант  $\theta_1 > 0$ ), 1.2. а) и 1.3. а) могут оказаться полезными при изучении спроса на товар ( $y$ ) в зависимости от его цены ( $x$ ).

#### Зависимости показательного (экспоненциального) типа

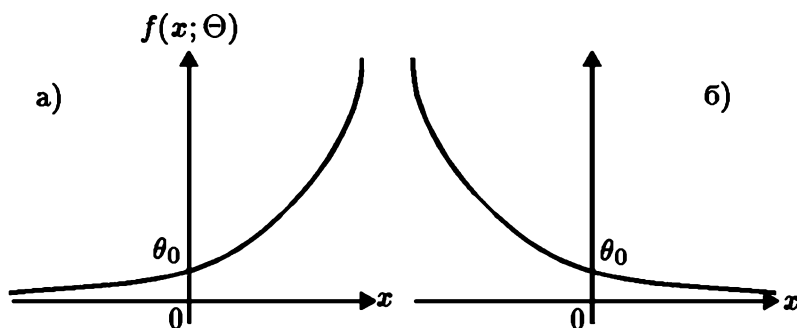
4) Достаточно широкий класс экономических показателей *характеризуется приблизительно постоянным темпом относительного прироста во времени*. Этому соответствует следующая форма зависимости этого показателя ( $y$ ) от времени ( $x$ ):

Действительно, если пренебречь влиянием случайной остаточной компоненты  $\varepsilon$  (т.е. положить  $\varepsilon = 0$ , см. рис. 1.4. а)), то непосредственные расчеты дают:

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 \theta_0 e^{\theta_1 x} = \theta_1 y,$$

так что относительный прирост  $y$  за единицу времени (т.е. за единицу «количества»  $x$ ) определяется выражением

$$\frac{dy}{dx} / y = \theta_1 \text{ (в долях } y\text{)}.$$



**Рис. 1.4.** График показательной (экспоненциальной) зависимости вида  $f(x; \Theta) = \theta_0 e^{\theta_1 x}$ : а) случай  $\theta_1 > 0$ ; б) случай  $\theta_1 < 0$

Легко видеть, что переход к новой переменной  $\tilde{y} = \ln y$  позволяет свести исследуемую зависимость к линейному виду:

$$\tilde{y} = \tilde{\theta}_0 + \theta_1 x + \varepsilon,$$

где  $\tilde{\theta}_0 = \ln \theta_0$ . Располагая наблюдениями  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  и формируя вектор-столбец  $\hat{Y}$  из  $\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_n$ , мы с помощью МНК можем построить оценки  $\hat{\tilde{\theta}}_0$  и  $\hat{\theta}_1$  параметров  $\tilde{\theta}_0$  и  $\theta_1$ , а затем получить оценку  $\hat{\theta}_0 = e^{\hat{\tilde{\theta}}_0}$  для параметра  $\theta_0$  исходного уравнения.

5) Если в результате параметризации модели мы пришли к необходимости исследовать экспоненциальную статистическую зависимость вида

$$y = \theta_0 e^{\frac{\theta_1}{x} + \varepsilon}$$

(см. рис. 1.5), то линейаризация искомой зависимости достигается с помощью следующих преобразований переменных:  $\tilde{y} = \ln y$ ,  $\tilde{x} = 1/x$ . Очевидно, в терминах переменных  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  исследуемая зависимость будет иметь вид

$$\tilde{y} = \tilde{\theta}_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon,$$

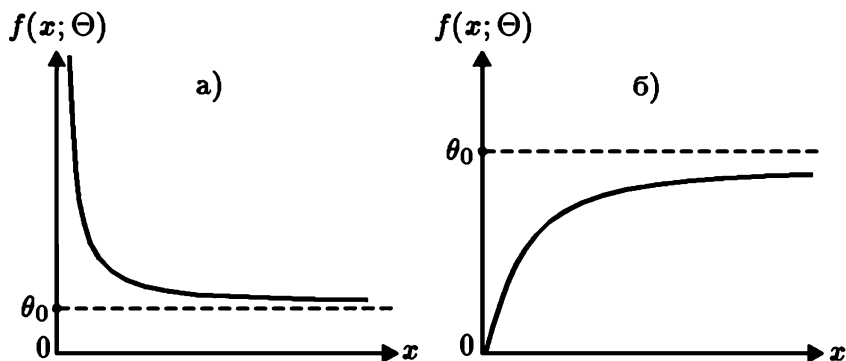


Рис. 1.5. График показательной (экспоненциальной) зависимости вида  $f(x; \Theta) = \theta_0 e^{\theta_1/x}$ : а) случай  $\theta_1 > 0$ ; б) случай  $\theta_1 < 0$

где  $\tilde{\theta}_0 = \ln \theta_0$ . Соответственно вектор-столбец  $\hat{Y}$  и матрица  $\hat{X}$ , участвующие в формулах МНК, определяются по исходным наблюдениям  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$  следующим образом:

$$\hat{Y} = (\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_n)'; \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & \dots & 1/x_n \end{pmatrix}'.$$

б) Весьма гибкую форму параметризации искомой регрессионной зависимости представляет один из частных случаев так называемой логистической кривой (см. рис. 1.6)

$$y = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

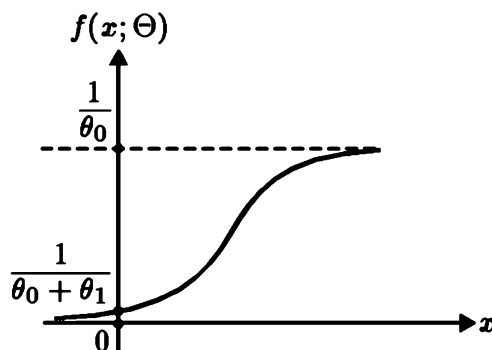


Рис. 1.6. График логистической кривой вида  $f(x; \Theta) = 1/(\theta_0 + \theta_1 e^{-x})$ : случай  $\theta_1 > 0$

Кривая  $f(x; \Theta)$  имеет две горизонтальные асимптоты  $y = 0$  и  $y = 1/\theta_0$  и «точку перегиба» ( $x_0 = \ln(\theta_1/\theta_0)$ ,  $y_0 = 1/2\theta_0$ ). Линеаризация этой зависимости производится с помощью перехода к переменным  $u = 1/y$  и  $t = e^{-x}$ . Соответственно, вектор-столбец  $\hat{Y}$  и матрица  $\hat{X}$

участвующие в формулах МНК, определяются по исходным наблюдениям  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$  следующим образом:

$$\hat{Y} = (1/y_1, 1/y_2, \dots, 1/y_n)'; \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-x_1} & e^{-x_2} & \dots & e^{-x_n} \end{pmatrix}'.$$

Логистические кривые используются для описания поведения показателей, имеющих определенные «уровни насыщения», например для описания зависимости спроса на товар ( $y$ ) от дохода ( $x$ ).

### Зависимости степенного типа

7) Широко распространены в практике социально-экономических исследований так называемые *степенные зависимости*. Степенная модель множественной регрессии имеет вид

$$y = \theta_0(x^{(1)})^{\theta_1}(x^{(2)})^{\theta_2} \dots (x^{(p)})^{\theta_p} e^\varepsilon.$$

Очевидно, при переходе к переменным  $\tilde{y} = \ln y$ ,  $\tilde{x}^{(j)} = \ln x^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) можно представить эту зависимость в виде КЛММР, а именно:

$$\tilde{y} = \tilde{\theta}_0 + \theta_1 \tilde{x}^{(1)} + \dots + \theta_p \tilde{x}^{(p)} + \varepsilon,$$

где  $\tilde{\theta}_0 = \ln \theta_0$ . При оценке параметров  $\tilde{\theta}_0, \theta_1, \dots, \theta_p$  участвующие в формулах МНК вектор-столбец  $\hat{Y}$  и матрица  $\hat{X}$  будут определяться по исходным наблюдениям  $\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)}; y_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  следующим образом:  $\hat{Y} = (\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_n)'$ , а  $(j+1)$ -й столбец матрицы  $\hat{X}$  есть  $(\ln x_1^{(j)}, \ln x_2^{(j)}, \dots, \ln x_n^{(j)})'$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  (первый столбец матрицы  $\hat{X}$ , как обычно, составлен из одних единиц). Графики зависимостей данного типа для случая  $p = 1$  представлены на рис. 1.7.

Важную роль играют зависимости степенного типа в задачах построения и анализа *производственных функций* ( $y$  — объем произведенной продукции,  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  — основные факторы производства: труд, капитал и т. д.). Достаточно часто используются степенные зависимости и при построении и анализе функций спроса ( $y$  — спрос на определенный вид товаров или услуг,  $x^{(1)}$  — доход потребителя,  $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$  — цены на данный и другие виды товаров).

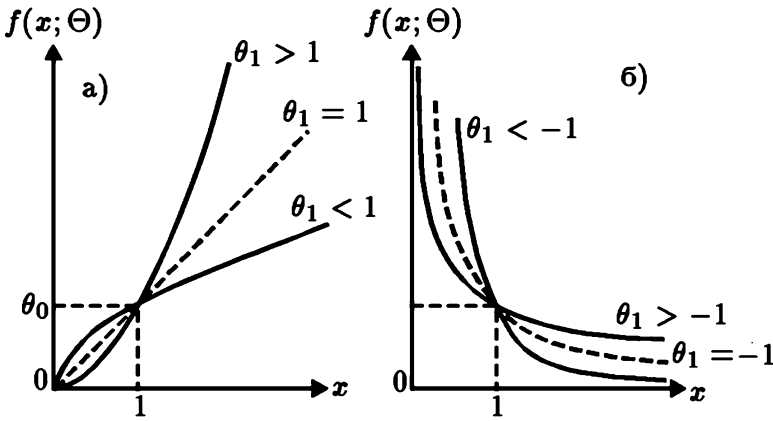


Рис. 1.7. График степенной зависимости вида  $f(x; \Theta) = \theta_0 x^{\theta_1}$ : а) случай  $\theta_1 > 0$ ; б) случай  $\theta_1 < 0$

Отметим, что при анализе степенных регрессионных зависимостей прозрачную содержательную интерпретацию получают коэффициенты  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ , а именно: в соответствии с определением *коэффициента эластичности* признака  $y$  по объясняющей переменной  $x^{(j)}$  (см., например, п. 2.9.4 в [Айвазян (2001)]) величина  $\theta_j = \partial \ln f(X; \Theta) / \partial \ln x^{(j)}$  есть не что иное, как коэффициент эластичности анализируемого результирующего показателя по  $j$ -й объясняющей переменной. Можно, кстати, показать, что если эластичность  $y$  по каждой из объясняющих переменных  $x^{(j)}$  *постоянна* (т.е. не зависит от того, при каких именно значениях объясняющих переменных она вычисляется), то  $y$  и  $X$  могут быть связаны только зависимостью степенного типа.

**Зависимости логарифмического типа**

8) На рис. 1.8 представлены графики зависимостей логарифмического типа:

$$y = \theta_0 + \theta_1 \ln x + \varepsilon \quad (0 < x < \infty).$$

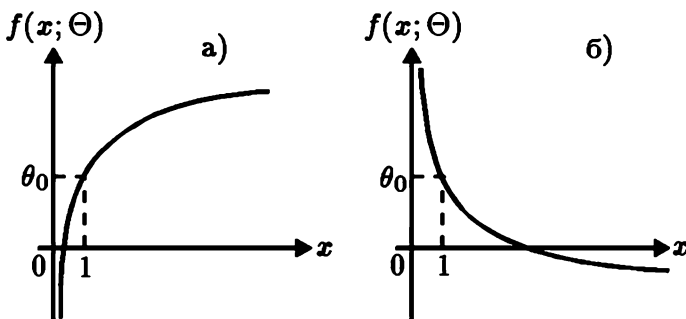


Рис. 1.8. График логарифмической зависимости вида  $f(x; \Theta) = \theta_0 + \theta_1 \ln x$ : а) случай  $\theta_1 > 0$ ; б) случай  $\theta_1 < 0$

линейному виду зависимости осуществляется с помощью логарифмического преобразования объясняющей переменной:  $\tilde{x} = \ln x$ . Соответственно, второй столбец матрицы  $\widehat{X}$ , участвующей в формулах МНК, будет иметь вид:  $(\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_n)'$ .

### 1.2.2. Подбор линейризующего преобразования (подход Бокса — Кокса)

В предыдущем пункте описан набор зависимостей, поддающихся линеаризации с помощью подходящих преобразований анализируемых переменных. Но решение вопроса о том, к какому именно из перечисленных *линеаризуемых* типов зависимостей следует отнести наш конкретный случай, является задачей непростой. Можно, конечно, действовать методом «проб и ошибок»: последовательно построить по имеющимся у нас исходным статистическим данным (1.1) каждую из альтернативного набора линеаризуемых моделей, а затем выбрать из них наилучшую в смысле какого-то «критерия качества» (например, по максимальному значению подправленной на несмещенность оценки коэффициента детерминации  $\widehat{R}^{*2}$ , см. формулу (3.35) в [Айвазян (2010)]).

Английские статистики Г. Бокс и Д. Кокс предложили более формализованную процедуру подбора линеаризующего преобразования<sup>2</sup>. Их метод основан на предположении, что искомое преобразование принадлежит определенному *однопараметрическому семейству* преобразований вида

$$\tilde{y}_i(\lambda) = \frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda}, \quad \tilde{x}_i^{(j)}(\lambda) = \frac{(x_i^{(j)})^\lambda - 1}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

Точнее их гипотезу можно сформулировать следующим образом: *существует такое вещественное (положительное или отрицательное) число  $\lambda^*$ , что один из двух нижеследующих вариантов представления искомой регрессионной зависимости между наблюдаемыми переменными  $y$  и  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ :*

$$\tilde{y}_i(\lambda^*) = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x}_i^{(1)}(\lambda^*) + \dots + \theta_p \tilde{x}_i^{(p)}(\lambda^*) + \varepsilon_i \quad (1.8)$$

или

$$\tilde{y}_i(\lambda^*) = \theta_0 + \theta_1 x_i^{(1)} + \dots + \theta_p x_i^{(p)} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8')$$

*будет удовлетворять всем требованиям нормальной классической линейной модели множественной регрессии (см. (4.1) в [Айвазян (2010)]).*

<sup>2</sup>См.: Box G.E.P. and Cox D.R. An Analysis of Transformations // Journ. of Royal Statist. Soc. Series B, Vol. 26 (1964). P. 211–243.  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

**З а м е ч а н и е 1.** Преобразования вида (1.7) применяются обычно к переменным, принимающим только *положительные* значения. Поэтому если это не так, то вначале подбирают «сдвиговые» константы  $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(p)}$ , которые обеспечивают положительность значений  $y_i + c^{(0)}$  и  $x_i^{(j)} + c^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), а затем к сдвинутым значениям переменных применяют данное преобразование, т. е.:

$$\tilde{y}_i(\lambda) = \frac{(y_i + c^{(0)})^\lambda - 1}{\lambda}, \quad \tilde{x}_i(\lambda) = \frac{(x_i^{(j)} + c^{(j)})^\lambda - 1}{\lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.7')$$

**З а м е ч а н и е 2.** Семейство степенных преобразований вида (1.7) (или (1.7')) весьма широко и гибко. При  $\lambda = 1$  модели (1.8) и (1.8') являются линейными относительно  $y_i$  и  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)}$ . При  $\lambda = 0$  мы имеем степенную зависимость между  $y$  и  $X$  (см. п. 1.2.1), поскольку  $\tilde{y}_i(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (y_i^\lambda - 1)/\lambda = \ln y_i$  и  $\tilde{x}_i^{(j)}(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [(x_i^{(j)})^\lambda - 1]/\lambda = \ln x_i^{(j)}$ . При других значениях  $\lambda$  уравнения (1.8) и (1.8') будут связывать между собой какие-то степени исходных переменных.

**Оценка неизвестного значения параметра  $\lambda$ .** Таким образом, если исходить из справедливости сформулированной выше гипотезы, подбор линеаризующего преобразования анализируемых переменных сводится к оценке параметра  $\lambda$  в формулах (1.7) или (1.7') по имеющимся в нашем распоряжении исходным статистическим данным (1.1). Эта проблема решается с помощью метода максимального правдоподобия. Будем исходить для определенности из справедливости нашего допущения применительно к представлению искомой модели в форме (1.8'), т. е. в матричной записи при неизвестном значении параметра  $\lambda$   $\tilde{Y}(\lambda)$  и  $X$  связаны между собой уравнением

$$\tilde{Y}(\lambda) = X\Theta + \epsilon, \quad (1.8'')$$

где  $\tilde{Y}(\lambda) = (\tilde{y}_1(\lambda), \tilde{y}_2(\lambda), \dots, \tilde{y}_n(\lambda))'$ ,  $\tilde{y}_i(\lambda) = (y_i^\lambda - 1)/\lambda$  (мы предполагаем, что все  $y_i$  положительны),  $X$  — матрица размерности  $n \times (p+1)$  ранга  $p+1$  из наблюдаемых значений объясняющих переменных (см. (1.1a)), а  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)'$  — вектор-столбец  $(0, \sigma^2)$ -нормально распределенных и взаимнонезависимых регрессионных случайных остатков.

Для составления уравнений метода максимального правдоподобия относительно неизвестных параметров  $\lambda, \Theta$  и  $\sigma^2$  при заданных значениях  $Y$  и  $X$  выпишем вначале функцию правдоподобия  $L(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n \mid X; \lambda, \Theta, \sigma^2)$  для преобразованных значений  $\tilde{y}_i(\lambda)$ , а затем, воспользовавшись правилом вычисления закона распределения вероятностей случайных величин, являющихся заданными функциями от известных случайных величин (см. п. 4.4, формулу (4.11) из Айвазян, Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

Мхитарян (2001)]), определим нужную нам функцию правдоподобия  $L(y_1, y_2, \dots, y_n | \mathbf{X}; \lambda, \Theta, \sigma^2)$  для непосредственно *наблюдённых* значений  $y_i$ .

**Таблица 1.1.** Соответствия в обозначениях формулы (4.11) из [Айвазян, Мхитарян (2001)] и п. 1.2.2 текста

№ п/п	Смысл понятия или характеристики, используемой в формуле (4.11)	Обозначения формулы (4.11)	Обозначения, принятые в данном пункте
1	Размерность анализируемых случайных величин	$p$	$n$
2	Случайная величина, распределение которой задано	$\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)})$	$\tilde{Y}(\lambda) = (\tilde{y}_1(\lambda), \dots, \tilde{y}_n(\lambda))'$
3	Случайная величина, распределение которой надо вычислить	$\eta = (\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(p)})$	$Y = (y_1, \dots, y_n)'$
4	Преобразование, связывающее исследуемые случайные величины	$\eta = g(\xi)$	$Y = g(\tilde{Y}(\lambda)),$ где $y_i = (\lambda \tilde{y}_i + 1)^{1/\lambda}$
5	Обратное преобразование, связывающее исследуемые величины	$\xi = g^{-1}(\eta) = (g_1^{-1}(\eta), \dots, g_n^{-1}(\eta))$	$\tilde{Y}(\lambda) = g^{-1}(Y) = (g_1^{-1}(Y), \dots, g_n^{-1}(Y)),$ где $g_i^{-1}(Y) = \tilde{y}_i = (y_i^\lambda - 1)/\lambda$
6	Определитель матрицы преобразования (якобиан)	$J = \left  \det \left( \frac{\partial g_i^{-1}(Y)}{\partial y^{(l)}} \right) \right ,$ $i, l = 1, 2, \dots, p$	$J(\lambda) =  \det(j_{il}) ,$ где $j_{il} = \begin{cases} y_i^{\lambda-1} & \text{при } i = l; \\ 0 & \text{при } i \neq l, \end{cases}$ $i, l = 1, 2, \dots, n$

Опираясь на результаты п. 4.2.2 и, в частности, соотношения (4.20)–(4.23) из [Айвазян (2010)], и с учетом взаимной независимости и  $(\theta_0 + \theta_1 x_i^{(1)} + \dots + \theta_p x_i^{(p)}, \sigma^2)$ -нормальной распределённости случайных величин  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) имеем:

$$L(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n | \mathbf{X}; \lambda, \Theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^n (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\tilde{Y} - \mathbf{X}\Theta)' (\tilde{Y} - \mathbf{X}\Theta) \right\} \quad (1.9)$$



Воспользуемся далее формулой (4.11) из [Айвазян, Мхитарян (2001)], позволяющей перейти от известного распределения (1.9) многомерной случайной величины  $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)'$  к распределению случайной величины  $Y$ , являющейся некоторой (заданной) функцией от  $\tilde{Y}$ . Таблица 1.1, устанавливающая соответствие между обозначениями формулы (4.11) [Айвазян, Мхитарян (2001)] и обозначениями, принятыми в данном пункте, облегчит читателю понимание этого перехода.

Итак, в соответствии с формулой (4.11) из [Айвазян, Мхитарян (2001)] имеем:

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n | \mathbf{X}; \lambda, \Theta, \sigma^2) = \frac{J(\lambda)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\hat{Y} - \mathbf{X}\Theta)' (\tilde{Y} - \mathbf{X}\Theta) \right\}$$

или (в терминах *логарифмической* функции правдоподобия  $l = \ln L$ )

$$l(y_1, y_2, \dots, y_n | \mathbf{X}; \lambda, \Theta, \sigma^2) = \text{const} + \ln J(\lambda) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (\hat{Y} - \mathbf{X}\Theta)' (\hat{Y} - \hat{\mathbf{X}}\Theta), \quad (1.10)$$

где  $J(\lambda) = \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{\lambda-1} > 0$  (так как все  $y_i > 0$ ), а  $\text{const}$  — некоторая постоянная величина, не зависящая от оцениваемых параметров  $\lambda$ ,  $\Theta$  и  $\sigma^2$ .

Предположим, что значение параметра  $\lambda$  *зафиксировано*. Тогда дифференцирование (1.10) по  $\Theta$  и  $\sigma^2$  и приравнивание полученных частных производных к нулю (см. (4.21)–(4.23) из [Айвазян (2010)]) дает:

$$\hat{\Theta}(\lambda) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\hat{Y}(\lambda), \quad (1.11)$$

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{1}{n} \left( \hat{Y}(\lambda) - \mathbf{X}\hat{\Theta}(\lambda) \right)' \left( \hat{Y}(\lambda) - \mathbf{X}\hat{\Theta}(\lambda) \right). \quad (1.12)$$

Для того чтобы подобрать теперь оптимальное значение параметра  $\lambda$ , вернемся к соотношению (1.10), подставив в него оптимальные выражения (1.11) и (1.12) соответственно для  $\Theta(\lambda)$  и  $\sigma^2(\lambda)$ . Обозначим полученное при этом значение  $l$  с помощью  $l_{\max}(\lambda)$ . Итак:

$$l_{\max}(\lambda) = l(y_1, \dots, y_n | \mathbf{X}; \lambda, \hat{\Theta}, \hat{\sigma}^2) = \text{const} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}^2(\lambda) \quad (1.13)$$

(при выводе (1.13) использован тот факт, что при оптимальных выражениях для  $\hat{\Theta}(\lambda)$  и  $\hat{\sigma}^2(\lambda)$  последний член в правой части (1.10) равен  $n/2$ , т. е. не зависит от  $\lambda$ ).

Далее анализируется функция  $l_{\max}(\lambda)$  и отыскивается такое значение  $\lambda^*$ , при котором  $l_{\max}(\lambda^*) = \max_{\lambda} l_{\max}(\lambda)$ . С этой целью определяется априорный диапазон  $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$  возможных значений  $\lambda$  (обычно достаточно рассмотреть в качестве области возможных значений  $\lambda$  отрезок от  $\lambda_{\min} = -1$  до  $\lambda_{\max} = 2$ ), на этом диапазоне выбирается сетка («решето») значений  $\lambda_i = \lambda_{\min} + i(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  и для каждого такого значения  $\lambda_i$  последовательно вычисляются  $\hat{\Theta}(\lambda_i)$ ,  $\hat{\sigma}^2(\lambda_i)$  и  $l_{\max}(\lambda_i)$ . То значение  $\lambda^*$ , при котором

$$l_{\max}(\lambda^*) = \max_{\lambda=\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N} l_{\max}(\lambda_i),$$

и будет определять искомое линейризующее преобразование (1.7). *Оценки  $\lambda^*$ ,  $\hat{\theta}(\lambda^*)$  и  $\hat{\sigma}^2(\lambda^*)$  являются оценками метода максимального правдоподобия, а процедуру их поиска часто называют «решетчатой».*

**З а м е ч а н и е 3.** Оценка параметра  $\lambda$  в случае, если преобразования (1.7) применяются одновременно к результирующей и к *объясняющим* переменным, производится *тем же способом* с единственным видоизменением процедуры: в формулах (1.8''), (1.9)–(1.13) матрицу  $X$  следует заменить на матрицу  $\hat{X}(\lambda)$  наблюдаемых значений *преобразованных* объясняющих переменных.

**П р и м е р 1.1** (заимствован из [А. Зельнер, с. 182–184]). Изложенный выше подход к подбору линейризующего преобразования с использованием метода максимального правдоподобия был применен в приложении к анализу *функции спроса на деньги*. Результаты предварительного анализа показали, что функция спроса на деньги может быть записана в виде

$$\frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda} = \theta_0 + \theta_1 \frac{(x_i^{(1)})^\lambda - 1}{\lambda} + \theta_2 \frac{(x_i^{(2)})^\lambda - 1}{\lambda} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.14)$$

где индекс  $i$  обозначает, что значение переменной относится к году  $i$ ,  $y_i$  — денежная наличность, включая текущие и срочные депозиты (дефлятированные индексом цен),  $x_i^{(1)}$  — измеренный доход (дефлятированный индексом цен),  $x_i^{(2)}$  — средняя норма процента по коммерческим бумагам и  $\varepsilon_i$  — остаточная случайная компонента, удовлетворяющая всем требованиям нормальной КЛММР (исходные статистические данные  $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, y_i)$  представляют собой годовые наблюдения по экономике США за 1869 – 1963 гг., причем  $i = 1$  соответствует 1869 году,

При реализации «решетчатой» процедуры был определен диапазон возможных значений  $\lambda$  от  $\lambda_{\min} = -0,90$  до  $\lambda_{\max} = 1,30$  и «шаг», равный  $\Delta = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/N = 2,20/22 = 0,1$ . Затем для каждого значения  $\lambda_j = -0,90 + j \cdot 0,1$  ( $j = 0, 1, \dots, 22$ ) были подсчитаны:

$$\widehat{Y}(\lambda_j) = (\tilde{y}_1(\lambda_j), \dots, \tilde{y}_n(\lambda_j)), \quad \text{где} \quad \tilde{y}_i(\lambda_j) = \frac{y_i^{\lambda_j} - 1}{\lambda_j};$$

$$\widehat{X}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{x}_1^{(1)}(\lambda_j) & \tilde{x}_2^{(1)}(\lambda_j) & \dots & \tilde{x}_n^{(1)}(\lambda_j) \\ \tilde{x}_1^{(2)}(\lambda_j) & \tilde{x}_2^{(2)}(\lambda_j) & \dots & \tilde{x}_n^{(2)}(\lambda_j) \end{pmatrix}',$$

где  $\tilde{x}_i^{(1)}(\lambda_j) = \frac{(x_i^{(1)})^{\lambda_j} - 1}{\lambda_j}$  и  $\tilde{x}_i^{(2)}(\lambda_j) = \frac{(x_i^{(2)})^{\lambda_j} - 1}{\lambda_j}$ ,

а также значения  $\widehat{\Theta}(\lambda_j)$  и  $\widehat{\sigma}^2(\lambda_j)$ , соответственно, по формулам (1.11) и (1.12) с заменой матрицы  $X$  матрицей  $\widehat{X}(\lambda)$ ; и, наконец, величина  $\tilde{l}_{\max}(\lambda_j) = (\lambda_j - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - \frac{n}{2} \ln \widehat{\sigma}^2(\lambda_j)$  по формуле (1.13) (с исключением константы).

График функции  $\tilde{l}_{\max}(\lambda)$  изображен на рис. 1.9. Он позволяет вычислить  $\lambda^* \approx 0,20$ , т. е. такое значение  $\lambda$ , при котором функция  $\tilde{l}_{\max}(\lambda)$  достигает своего максимума. Стандартный регрессионный анализ регрессии  $\tilde{y}(0,2)$  по  $\tilde{x}^{(1)}(0,2)$  и  $\tilde{x}^{(2)}(0,2)$  дает:

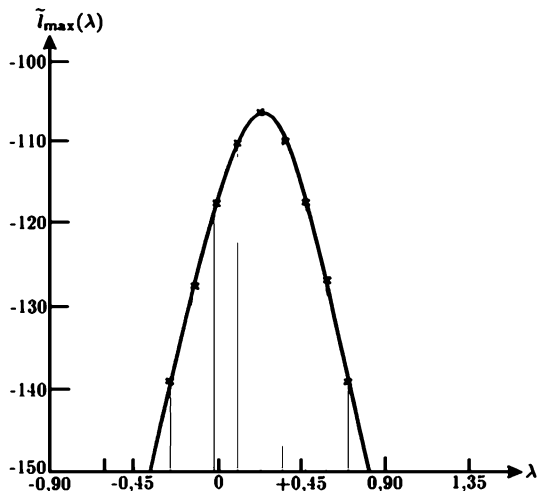
$$\tilde{y}_i(0,2) = -1,055 + 1,112 \tilde{x}_i^{(1)}(0,2) - 0,097 \tilde{x}_i^{(2)}(0,2) + \varepsilon_i; \quad \widehat{R}^{*2} = 0,72$$

(0,239)      (0,016)                      (0,016)

(напомним, что в скобках под значениями оценок коэффициентов регрессии  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  указаны величины среднеквадратических ошибок этих оценок).

Следовательно, отправляясь от (1.14) (при  $\lambda = 0,20$ ), можно показать, что функция регрессии спроса на деньги ( $y$ ) по доходу ( $x^{(1)}$ ) и средней норме процента ( $x^{(2)}$ ) в *исходных* переменных будет иметь вид:

$$E(y | x^{(1)}, x^{(2)}) = \left( -0,226 + 1,112 \sqrt[5]{x^{(1)}} - 0,097 \sqrt[5]{x^{(2)}} \right)^5. \quad (1.15)$$



**Рис. 1.9.** «Решето» значений логарифмической функции правдоподобия (без учета величины константы)

Заметим, что близость к нулю оптимального значения  $\lambda$  ( $\lambda^* = 0,2$ ) говорит о том, что и «логарифмический» вариант функции спроса на деньги (т. е. переход к переменным  $\tilde{y} = \ln y$ ,  $\tilde{x}^{(1)} = \ln x^{(1)}$  и  $\tilde{x}^{(2)} = \ln x^{(2)}$ ) находится в приближенном согласии с имеющимися выборочными данными. Так что наряду с функцией (1.15) можно было бы рассчитать и конкурирующую функцию регрессии вида

$$E(y | x^{(1)}, x^{(2)}) = \theta_0(x^{(1)})^{\theta_1}(x^{(2)})^{\theta_2}. \quad (1.16)$$

### 1.3. Вычислительные вопросы нелинейного метода наименьших квадратов<sup>3</sup>

Итак, в ходе решения задачи выбора общего вида функции регрессии  $f(X; \Theta)$  (следуя, например, рекомендациям п. 2.5 из [Айвазян (2010)]), мы пришли к выводу о *существенной нелинейности* этой функции относительно оцениваемых параметров  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)'$  (под существенной нелинейностью функции  $f(X; \Theta)$  понимаются ситуации, в которых описанные в п. 1.2 подходы к линейризации анализируемого уравнения регрессии не дают желаемого результата). Тогда, отправляясь от модели

$$y_i = f(X_i; \Theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.17)$$

и стремясь получить МНК-оценки неизвестных параметров  $\Theta$ , имеющих область допустимых значений  $\Gamma$ , мы, при достаточно общих пред-

<sup>3</sup> В данном параграфе использованы материалы В.В. Федорова и Е.З. Демиденко, Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> для гл. 9 книги [Айвазян и др. (1985)]. Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

положениях относительно вероятностной природы остатков  $\varepsilon_i$ , приходим к необходимости решения оптимизационной задачи вида

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta \in \Gamma} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(X_i; \Theta))^2, \quad (1.18)$$

а также — получения ответов на вопросы о свойствах оценок  $\hat{\Theta}$  (их существовании, единственности, состоятельности, несмещенности, эффективности). Именно этим вопросам и посвящен данный пункт гл. 1.

В целях упрощения записей там, где это не вызовет разночтений, вместо  $f(X_i; \Theta)$  будет использоваться  $f_i(\Theta)$ , а вместо  $\sum_{i=1}^n w_i (y_i - f_i(\Theta))^2$  —  $J(\Theta)$ , так что оптимизационная задача (1.18) может быть представлена в виде

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta \in \Gamma} J(\Theta). \quad (1.18')$$

Задачу (1.18) (соответственно, (1.18')) можно рассматривать как одну из *задач нелинейного программирования*, алгоритмы и программы для которых можно найти в современных пакетах программ, в том числе статистических и эконометрических, таких как STATA, E-views, SPSS и др.

Особенности использования общих алгоритмов оптимизации *именно в статистических и эконометрических задачах* давно и подробно обсуждается в литературе: например, в [Chambers (1973)], где содержится обширная библиография по теме; см. также [Химмельблау (1975)], [Демиденко (1981)], [Успенский, Федоров (1975)]. Вообще говоря, практически любой из общих алгоритмов пригоден для решения задач (1.18'), однако имеются веские аргументы для развития *специальных* алгоритмов и программ решения оптимизационных задач, связанных именно с эконометрическим анализом.

Во-первых, учет специфики функции  $J(\Theta)$  позволяет выбрать те алгоритмы, которые будут работать наиболее эффективно именно при решении задач типа (1.18).

Во-вторых, решение оптимизационной задачи (1.18) составляет приблизительно лишь половину от общего объема вычислительной работы, необходимой для выполнения полноценного эконометрического анализа модели (1.17). Действительно, помимо самих оценок  $\hat{\Theta}$  исследователю необходимы оценки ковариационных матриц этих оценок, доверительные интервалы для неизвестного значения результирующего показателя  $y$  при заданных значениях объясняющих переменных  $X = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})'$ , ряд характеристик степени адекватности оцененной модели и т. д. (см. ниже, п. 1.3.8). В вычислительном плане крайне

удобно, когда упомянутая числовая информация подсчитывается параллельно с отысканием самих оценок. Именно алгоритмам, обладающим такими свойствами, отдается предпочтение при создании программ по эконометрике и анализу данных.

Отметим, что все описанные ниже методы поиска оценок имеют итерационный характер.

### 1.3.1. Алгоритмы квазиградиентного типа

Предположим, что область  $\Gamma$  допустимых значений параметров совпадает со всем евклидовым пространством  $R^m$  (напомним, что  $m$  — число неизвестных параметров, т. е. размерность вектора  $\Theta$ ).

Наибольшее распространение в настоящее время получили алгоритмы итерационного типа

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \rho_s \delta_s, \quad (1.19)$$

где  $s$  — номер итерации;  $\delta_s$  — вектор, определяющий направление движения на  $s$ -й итерации;  $\rho_s$  — длина шага.

Идея, лежащая в основе этих алгоритмов, очень проста: на каждом шаге двигаться в направлении минимума функции  $J(\Theta)$ . Различные алгоритмы отличаются способом выбора этого направления и правилами выбора длины шага.

В данной главе обсуждаются лишь алгоритмы, движение в которых осуществляется в направлении под острым углом к антиградиенту ( $-\text{grad}(J(\Theta))$ ) функции  $J(\Theta)$  (или некоторой ее аппроксимации). Такие алгоритмы будут называться в дальнейшем алгоритмами квазиградиентного типа. Напомним, что антиградиент — это направление, противоположное градиенту, а градиент в точке перпендикулярен к линии постоянного значения функции  $J(\Theta)$ , проходящей через эту точку (рис. 1.10).

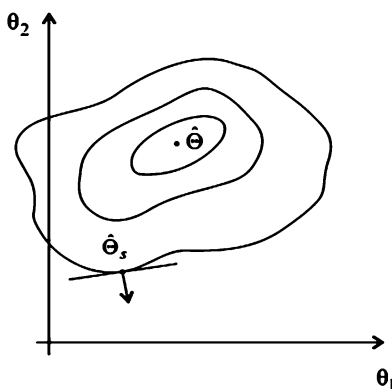


Рис. 1.10.

Определение направления градиента

Таким образом, градиент в каком-то смысле указывает направление локального наискорейшего возрастания функции  $J(\Theta)$ . Компоненты градиента определяются формулой

$$\nabla J(\Theta) = \frac{\partial}{\partial \Theta} J(\Theta) = \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\Theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_m} J(\Theta) \right)'$$

Легко проверить, что для функции  $J(\Theta)$ , соответствующей задаче МНК,

$$\nabla J(\Theta) = -2\mathfrak{R}(\Theta),$$

где  $\mathfrak{R}(\Theta) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i (y_i - f_i(\Theta)) \frac{\partial f_i(\Theta)}{\partial \Theta}$ .

По рисунку видно, что в некоторых точках направление, указываемое антиградиентом, существенно отличается от направления, указывающего на точку  $\hat{\Theta}$ . По этой причине многие алгоритмы предусматривают движение, вообще говоря, отличное от антиградиента.

**Таблица 1.2.** Характеристики наиболее распространенных алгоритмов безусловной оптимизации

№ п/п	Алгоритм	Матрица $\mathbf{H}_s$	Пункт книги, где описан алгоритм	Тип скорости сходимости
1	Градиентный спуск	$\mathbf{I}_m$	1.3.2	Геометрическая прогрессия
2	Ньютона	$(\frac{1}{2}[\mathbf{M}_s + \mathbf{V}_s])^{-1}$	1.3.3	Сверхлинейная (квадратичная)
3	Ньютона-Гаусса (линеаризации)	$(\frac{1}{2}\mathbf{M}_s)^{-1}$	1.3.4	Геометрическая прогрессия
4	Вариант Марквардта	$(\frac{1}{2}[\mathbf{M}_s + \gamma_s \mathbf{A}_s])^{-1}, \mathbf{A}_s > 0$	1.3.4	Геометрическая прогрессия
5	Сопряженных градиентов	$\mathbf{H}_0 \left( \mathbf{I}_m - \frac{g_s \nabla J'(\Theta_{s-1})}{\nabla J'(\Theta_{s-1}) \mathbf{H}_0 \nabla J'(\Theta_{s-1})} \mathbf{H}_{s-1} \right)$	1.3.5	Сверхлинейная

Для алгоритмов квазиградиентного типа соотношение (1.19) принимает вид:

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s - \rho_s \mathbf{H}_s \tilde{\nabla} J_s$$

Вектор  $\tilde{\nabla} J_s$  либо совпадает с градиентом  $\nabla J(\hat{\Theta}_s)$ , подсчитанным в точке  $\hat{\Theta}_s$ , либо представляет собой его некоторую аппроксимацию.

Матрица  $\mathbf{H}_s$  — положительно полуопределенная матрица, т. е.  $\tilde{\nabla} J'_s \times \mathbf{H}_s \tilde{\nabla} J_s \geq 0$ , что и гарантирует движение под острым углом к антиградиенту.

В табл. 1.2 представлены выражения для матрицы  $\mathbf{H}_s$ , которые используются в наиболее распространенных алгоритмах безусловной минимизации.

### 1.3.2. Алгоритмы градиентного спуска

**Описание общей схемы алгоритма.** При градиентном спуске движение осуществляется непосредственно в направлении антиградиента, т. е.  $\mathbf{H}_s \equiv \mathbf{I}_m$  (напомним, что  $\mathbf{I}_m$  — единичная матрица размерности  $m \times m$ ). Итерационная процедура, таким образом, принимает вид:

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \frac{1}{2} \rho_s \mathfrak{R}_s, \tag{1.20}$$

где  $\mathfrak{R}_s = \mathfrak{R}(\hat{\Theta}_s)$ , а вектор-столбец  $\mathfrak{R}\Theta$  определен выше.

Перечислим несколько возможных способов выбора величины шага  $\rho_s$ .

Обозначим  $p_s = \frac{1}{2} \mathfrak{R}_s$  направление минимизации. Существуют два основных способа, приводящих к снижению значения  $J(\Theta)$  на каждом шаге и к сходимости итерационного процесса.

1) Зададимся некоторым  $0 < \varepsilon < 1$ . Дроблением шага добьемся того, чтобы

$$J(\hat{\Theta}_{s+1}) - J(\hat{\Theta}_s) \leq \varepsilon p'_s \nabla J(\hat{\Theta}_s).$$

Поскольку  $p'_s \nabla J(\hat{\Theta}_s) < 0$ , всегда  $J(\hat{\Theta}_{s+1}) - J(\hat{\Theta}_s) < 0$ .

2) Длина шага определяется из условия

$$\rho_s = \arg \min_{\rho \geq 0} J(\hat{\Theta}_s + \rho \cdot p_s). \tag{1.21}$$

При таком выборе шага обычно говорят о «наискорейшем спуске». Оптимизационная задача (1.21) чаще всего решается с помощью квадратичной аппроксимации по  $\rho$ .

Решение задачи минимизации вторым способом может оказаться чрезвычайно трудоемким. Дело может осложниться тем, что функция  $J(\Theta)$  вдоль выбранного направления может быть *мультимодальной*. Поэтому первый способ нам кажется более предпочтительным. Описанные способы выбора шага могут применяться и в других методах



Сравнение эффективности различных способов выбора длины шага применительно к задачам регрессии проведено в [Bard (1970)].

Алгоритмы типа (1.20) (см., например, [Бард (1979)], [Васильев (1980)]) обеспечивают при определенных ограничениях на функцию  $J(\Theta)$  сходимость последовательности  $\{\hat{\Theta}_s\}$  со скоростью геометрической прогрессии

$$\|\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}\| \leq Cq^s.$$

В частности, такая скорость сходимости обеспечивается так называемой *линейной сходимостью*, при которой

$$\|\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}\| \leq q\|\Theta_s - \hat{\Theta}\|, \quad 0 < q < 1,$$

где  $\|\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}\|$  — длина вектора  $\Theta_s - \hat{\Theta}$ ; и  $q$  — константы, определяемые видом  $J(\Theta)$ .

Например, если помимо некоторых не очень существенных ограничений градиент удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\nabla J(\Theta) - \nabla J(\hat{\Theta})\| \leq L\|\Theta - \hat{\Theta}\|$$

при всех  $\Theta, \hat{\Theta} \in R^m$ ,  $L = \text{const} > 0$ , а функция  $J(\Theta)$  сильно выпукла с показателем  $\mu$ , т. е.:

$$\begin{aligned} J[\alpha\Theta + (1 - \alpha)\hat{\Theta}] &\leq \alpha J(\Theta) + (1 - \alpha)J(\hat{\Theta}) - \\ &- \mu \cdot \alpha(1 - \alpha)(\Theta - \hat{\Theta})' \cdot (\Theta - \hat{\Theta}) \text{ при всех } \Theta, \\ &\hat{\Theta} \in R^m \text{ и } 0 \leq \alpha \leq 1, \end{aligned}$$

то величина  $q$  определяется соотношением  $q = 1 - \mu/2L$ .

**Замечание об эффективности алгоритма.** Одним из основных достоинств градиентного спуска является его простота. Однако реальная скорость его сходимости уменьшается при приближении  $\hat{\Theta}_s$  к точке  $\hat{\Theta}$ . Для функций овражного типа с сильно вытянутыми линиями уровня в окрестности  $\hat{\Theta}$  эффективность методов типа градиентного спуска особенно низка, так как обычно для таких функций  $\mu$  близко к нулю.

При решении статистических задач с помощью градиентного спуска приходится на заключительном этапе проводить дополнительные расчеты по отысканию оценок ковариационных матриц и прочих величин, описывающих статистические свойства оценок.

Обычно градиентный спуск целесообразно применять лишь на начальных этапах минимизации, используя найденные в результате сравнительно небольшого числа итераций величины  $\hat{\Theta}_s$  в качестве начального приближения для более сложных методов, обладающих большей

### 1.3.3. Метод Ньютона

**Описание общей схемы метода.** Идея метода Ньютона (иногда его называют методом Ньютона — Рафсона) заключается в квадратичной аппроксимации функции  $J(\Theta)$  в окрестности точки  $\hat{\Theta}_{s+1}$ . Значения  $\hat{\Theta}_{s+1}$  находятся из условия минимума аппроксимирующего полинома второй степени и определяются в случае положительной определенности матрицы

$$G_s = \left. \frac{\partial^2 J(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}_s},$$

по формуле 
$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s - G_s^{-1} \nabla(\hat{\Theta}_s). \quad (1.22)$$

Положительная определенность  $G_s$  является существенным ограничением использования метода Ньютона. Вместе с тем, чем ближе начальное приближение к минимуму, тем скорее можно ожидать выполнение этого условия. Ведь в точке минимума, весьма вероятно, матрица  $G(\hat{\Theta})$  положительно определена, а из непрерывности  $G(\Theta)$  следует, что в некоторой окрестности  $\hat{\Theta}$  гессиан также будет положительно определен. Поэтому наибольший эффект имеет применение этого метода в достаточно близкой окрестности решения.

Иными словами,  $\rho_s = 1$ ,  $H_s = G_s^{-1}$ . Несложные выкладки показывают, что для  $J(\Theta)$  вида (1.18)

$$G_s = 1/2(M_s + V_s), \quad \text{где}$$

$$M_s = \sum_{i=1}^n \omega_i f_{is} f'_{is}; \quad f_{is} = \left. \frac{\partial f_i(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \Theta_s};$$

$$V_s = \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i (y_i - f_i(\Theta)) \Phi_{is}; \quad \Phi_{is} = \left. \frac{\partial^2 f_i(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right|_{\Theta = \Theta_s}.$$

При линейной параметризации  $f_i(\Theta) = \theta_1 \varphi_1(x_1) + \theta_2 \varphi_2(x_2) + \dots + \theta_m \varphi_m(x_m)$ , где  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1, \bar{m}}$  — некоторая система базисных функций, не зависящих от  $\Theta$ , решение  $\hat{\Theta}$  получается на первом же шаге независимо от выбора  $\Theta_0$ . На практике предпочитают использовать метод Ньютона с регулировкой шага

$$\Theta_{s+1} = \Theta_s + \rho_s (M_s + V_s)^{-1} \mathfrak{R}_s, \quad (1.23)$$

где  $\rho$  выбирается, например, в соответствии со способом 1 из п. 1.3.2 или из условия

Процедура (1.23) оказывается более стабильной по сравнению с (1.22), которая особенно чувствительна к выбору начального приближения  $\Theta_0$  и подвержена эффекту «раскачки» при его неудачном выборе.

**Скорость сходимости процедуры.** Если дополнительно к условиям, сформулированным в конце описания общей схемы алгоритма градиентного спуска, потребовать, чтобы  $\|G(\Theta - G(\hat{\Theta}))\| \leq K\|\Theta - \hat{\Theta}\|$  при всех  $\Theta, \hat{\Theta} \in R^m$ , то при упомянутых последовательностях  $\{\rho_s\}$  независимо от выбора  $\Theta_0$  последовательность  $\{\hat{\Theta}_s\}$  сходится к  $\hat{\Theta}$  с квадратичной скоростью, т. е.

$$\|\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}\| \leq C\|\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}\|^2,$$

где константа определяется видом функции  $J(\Theta)$  и не зависит от  $s$ .

При решении практических задач на данное утверждение (впрочем, как и на аналогичное утверждение из п. 1.3.2) не следует особенно полагаться. Дело в том, что проверка условий, его сопровождающих, за исключением тривиальных случаев, реально невозможна. К тому же большинство из них для «экзотических» выборок (маловероятных выборок) заведомо не будут выполняться. Тем не менее подобные утверждения все же имеют смысл, так как позволяют дать оценку той максимальной скорости сходимости, которую можно достигнуть с помощью данного метода. Данное замечание имеет место для всех рассматриваемых здесь методов.

Одним из наиболее существенных недостатков метода Ньютона является необходимость подсчета производных  $\dot{f}_{is}$  и  $\Phi_{is}$ .

Для достаточно сложных функций  $f_i(\Theta)$  это приводит к весьма громоздким вычислениям и заметно усложняет работу пользователя, так как приходится составлять специальные дополнительные программы по подсчету производных.

### 1.3.4. Метод Ньютона — Гаусса и его модификации

**Общая схема метода.** Заметно более простым по сравнению с предыдущим методом является метод Ньютона — Гаусса, в котором матрица  $H_s = M_s^{-1}$ . Тем не менее практика показывает, что именно для регрессионных задач вида (1.18) его эффективность оказывается не худшей, чем в методе Ньютона.

К итерационной процедуре Ньютона — Гаусса

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \rho_s M_s^{-1} \mathfrak{R}_s$$

можно прийти из следующих соображений. Для достаточно гладких функций  $f_i(\Theta)$  в окрестности точки  $\hat{\Theta}_s$  можно полагаться на простей-

шую аппроксимацию

$$f_i(\Theta) = f_i(\hat{\Theta}_s) + f'_{is}(\Theta - \hat{\Theta}_s). \quad (1.24)$$

Полагая  $\tilde{y}_i = y_i - f_i(\hat{\Theta}_s)$  и  $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}_s$ , приходим к необходимости минимизации (см. (1.19)) функции

$$\sum_{i=1}^n \omega_i (\tilde{y}_i - f'_{is} \tilde{\Theta})^2.$$

А это значит, что задача сведена к реализации взвешенного МНК в условиях *линейной* (по оцениваемым параметрам) функции регрессии. Но в этом случае, как известно (см., например [Айвазян и др. (1985)], гл. 7), минимум достигается при  $\tilde{\Theta} = \mathbf{M}_s^{-1} \mathfrak{R}_s$ . Отсюда следует, что

$$\hat{\Theta} \approx \hat{\Theta}_s + \mathbf{M}_s^{-1} \mathfrak{R}_s.$$

Для линейного случая решение достигается за один шаг. При нелинейной параметризации процедура повторяется:

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \rho_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathfrak{R}_s.$$

Именно эта процедура и носит название метода Ньютона — Гаусса.

Для рассматриваемой экстремальной задачи метод Ньютона — Гаусса близок методу Ньютона. При линейной параметризации они совпадают. Их близость при малых вторых производных  $\Phi_{is}$  очевидна. Имеется и более глубокая причина их близости. Действительно, при  $n \rightarrow \infty$  и некоторых не слишком ограничительных предположениях в силу закона больших чисел имеем следующую сходимость (с вероятностью единица)

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i (y_i - f_i(\hat{\Theta}_s)) \Phi_{is} \rightarrow \lim_n n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i (f_i(\Theta_u) - f_i(\hat{\Theta}_s)) \Phi_{is},$$

где  $\Theta_u$  — истинные значения искомых параметров.

**Обсуждение скорости сходимости процедуры.** Метод Ньютона — Гаусса очень чувствителен к обусловленности матриц  $\mathbf{M}_s$ . При плохо обусловленных матрицах  $\mathbf{M}_s$  наблюдается «раскачка» итерационного процесса, а если он и сходится, то его предельные точки меняются с изменением начального приближения  $\Theta_0$ . Наиболее распространенной причиной плохой обусловленности матриц  $\mathbf{M}_s$  является неудачный выбор режимов наблюдений  $\mathbf{X}$ . Поэтому, сталкиваясь с плохо обусловленными матрицами  $\mathbf{M}_s$ , экспериментатору следует попытаться в

провести дополнительные наблюдения. Если же структура данных не может быть улучшена, то приходится обращаться к методам, которые менее чувствительны к виду матриц  $\mathbf{M}_s$ . Одним из наиболее широко применяемых является *метод Марквардта*:

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \rho_s [\mathbf{M}_s + \gamma_s \mathbf{A}_s]^{-1} \mathfrak{R}_s, \quad (1.25)$$

который может трактоваться как некоторое усовершенствование метода Ньютона — Гаусса.

В (1.25)  $\gamma_s \geq 0$ ,  $\mathbf{A}_s$  — неотрицательно определенная матрица. При  $\gamma_s = 0$  реализуется метод Ньютона — Гаусса, при  $\gamma_s \rightarrow \infty$  и  $\mathbf{A}_s = \mathbf{I}$  направление движения приближается к антиградиенту. Выбор  $\rho_s$  и  $\gamma_s$  в большинстве модификаций (1.25) проводится из соображений монотонного убывания  $J(\Theta)$ .

Матрица  $\mathbf{A}_s$  в большинстве компьютерных реализаций (1.25) выбирается диагональной, причем ее элементы совпадают с диагональными элементами матрицы  $\mathbf{M}_s$ .

Полезно иметь в виду следующий факт. Если опираться на линейную аппроксимацию (1.24), то при  $\rho_s = 1$  каждый шаг в методе Марквардта может быть истолкован как минимизация функции

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \left( \tilde{y}_i - f'_{is} \tilde{\Theta} \right)^2 + \gamma_s \tilde{\Theta}' \mathbf{A}_s \tilde{\Theta}.$$

Иными словами, в этом методе на каждом шаге проводится регуляризация исходной задачи.

Сходимость метода Ньютона — Гаусса и его модификаций изучалась, например, в [Поляк (1971)], [Hartley (1961)], [Pereyga (1967)], различные комментарии и дополнительную библиографию можно найти в [Химмульблау (1975)], [Бард (1979)], [Демиденко (1981)].

Скорость сходимости в зависимости от условий, накладываемых на функции  $f_i(\Theta)$ ,  $f'_{is}$ ,  $\Phi_{is}$ , и способов выбора  $\rho_s$ ,  $\gamma_s$ ,  $\mathbf{A}_s$  может быть:

$$\begin{aligned} \text{линейной:} & \quad \|\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}\| \leq q \|\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}\|; \\ \text{сверхлинейной:} & \quad \|\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}\| \leq q_s \|\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}\|, \quad q_s \rightarrow 0 \text{ или} \\ \text{квадратичной:} & \quad \|\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}\| \leq C \|\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}\|^2. \end{aligned}$$

**Рекомендации по правилу остановки итерационной процедуры.** Для регрессионной задачи (1.18) матрица  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}(\hat{\Theta})$  может быть использована в качестве оценки ковариационной матрицы МНК-оценок. Если  $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_s = \hat{\Theta}$ , то итерационная процедура Ньютона — Гаусса наряду с оценками  $\hat{\Theta}$  поставляет и матрицу  $\mathbf{D} \approx \mathbf{M}^{-1}$ .

где  $s^*$  — номер заключительной итерации). Этот факт позволяет также сформулировать простое и естественное правило остановки. Расчеты прекращаются, как только

$$(\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}_s)' M_{s+1}^{-1} (\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}_s) \leq slant \alpha,$$

где  $\alpha$  — наперед заданная точность.

Данное правило более естественно, чем, например, правило, используемое в общих программах минимизации  $-(\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}_s)'(\hat{\Theta}_{s+1} - \hat{\Theta}_s) \leq \alpha$ . Действительно, точность нахождения  $\hat{\Theta}$  целесообразно соизмерять со *статистической* точностью (ее ковариационной матрицей) МНК-оценок.

### 1.3.5. Методы, не использующие вычисления производных

**Основные подходы к устранению необходимости вычисления производных.** Как уже отмечалось, существенным недостатком методов, изложенных выше, является необходимость подсчета производных  $\dot{f}_{is}$ , а в методе Ньютона — и вторых производных  $\Phi_{is}$ , на каждой итерации. При сложных функциях  $f_i(\Theta)$  это, *во-первых*, оказывается утомительным с программистской точки зрения, а *во-вторых*, приводит к громоздким вычислениям на каждой итерации.

Возможны несколько способов избавления от необходимости подсчета производных:

- использование методов прямого поиска (нулевого порядка), таких, как симплекс-метод, метод случайного поиска и т. п. (см., например, [Fletcher (1965)]);
- аппроксимация производных конечно-разностными аналогами;
- специальные методы аппроксимации матриц  $\mathbf{H}_s, \nabla J_s$ , позволяющие реализовать итерационные процедуры, близкие по эффективности к процедурам Ньютона и Ньютона — Гаусса, но с меньшим объемом вычислений.

Прямые методы минимизации оказались малоэффективными для задач регрессионного типа даже по сравнению с градиентными методами ([Бард (1979)]). К тому же после отыскания с их помощью экстремальных значений  $\hat{\Theta}$  требуется проведение объемистых вычислений по нахождению статистических характеристик, описывающих качество оценок.

Конечно-разностная аппроксимация хотя и избавляет потребителя от утомительной работы по составлению дополнительных программ для вычисления производных, но не решает проблемы сокращения объема вычислений. Чаще всего она приводит к его заметному увеличению.

Наиболее перспективными и удобными оказались методы третьей группы. Они завоевали весьма прочное место во многих эконометрических и статистических пакетах.

**Разностные аналоги метода Ньютона — Гаусса.** Основная идея, на которую опираются методы третьей группы, заключается в использовании на  $(s + 1)$ -й итерации информации, полученной на предыдущих  $s$  итерациях, для построения разумных аппроксимаций элементов матрицы  $\mathbf{H}_s$  и компонент градиента  $\nabla J_s$ .

При решении регрессионных задач хорошо зарекомендовали себя методы, являющиеся, по существу, аппроксимациями метода Ньютона — Гаусса. По-видимому, работа [Peckham (1970)] является в этом направлении пионерской. Упрощенный и непосредственно приспособленный к задачам регрессии алгоритм предложен в [Ralston, Jennrich (1978)]. Достаточно подробный анализ алгоритмов подобного типа и их дальнейшее развитие содержатся, например, в [Вересков и др. (1981)].

Данную совокупность методов целесообразно назвать методами Ньютона — Гаусса без подсчета производных. Как и обычный метод Ньютона — Гаусса (см. п. 1.3.4), эти методы опираются на линейную аппроксимацию функций  $f_i(\Theta)$  в окрестности точки  $\hat{\Theta}_s$ :

$$f_i(\Theta) \approx f_i(\hat{\Theta}_s) + \gamma'_{is}(\Theta - \hat{\Theta}_s).$$

В отличие от метода Ньютона — Гаусса коэффициенты в вектор-столбце  $\gamma_{is}$  не совпадают с производными  $f'_{is}$ , а подсчитываются по значениям функции  $f_i(\Theta)$ , полученным по прошлым итерациям. В принципе величины  $\gamma_{is}$  могут быть подсчитаны самыми различными способами, но в программах по регрессионному анализу оказывается очень удобным отыскивать их с помощью все того же метода наименьших квадратов. Определим  $\gamma_{is}$  как решение следующей задачи МНК:

$$\gamma_{is} = \arg \min_{\gamma} \sum_{t=1}^{s+q} \omega_{st} \left[ f_i(\hat{\Theta}_t) - f_i(\hat{\Theta}_t) - \gamma'(\hat{\Theta}_t - \hat{\Theta}_s) \right]^2,$$

где  $\omega_{st}$  — веса, описывающие вклад того или иного значения  $f_i(\hat{\Theta}_t)$ . При этом  $s$  значений получены непосредственно из итерационной процедуры, а выбор остальных  $q$  значений параметров  $\Theta$  будет объяснен позднее. В частности, в алгоритме, предложенном в [Ralston, Jennrich (1978)],  $\omega_{s,s+q} = \omega_{s,s+q-1} = \dots = \omega_{s,s+q-m} = 1$ , а остальные веса полагаются нулевыми.

Хорошие результаты дает выбор весов вида  $\omega_{s,l} = \varphi(J(\Theta_l))$ , где  $\varphi$  — убывающая функция, например  $\exp[-kJ(\Theta)]$ . Можно показать, что

где  $\mathbf{Q}_s = \sum_{t=1}^{s+q} \omega_{st} \Delta_{st} \Delta'_{st}$ ;  $U_{is} = \sum_{t=1}^{s+q} \omega_{st} \Delta_{st} u_{ist}$ ;  $\Delta_{st} = \hat{\Theta}_t - \hat{\Theta}_s$ ;  $u_{ist} = f_i(\hat{\Theta}_t) - f_i(\hat{\Theta}_s)$ .

Подставляя теперь в (1.18) приближенное значение функции  $f_i(\Theta) = f_i(\hat{\Theta}_s) + \gamma'_{is}(\Theta - \hat{\Theta}_s)$  (ср. с (1.24)), получим, что функция  $J(\Theta)$  достигает своего минимума при  $\Theta - \hat{\Theta}_s = \mathbf{M}_s^{-1} \mathfrak{R}_s$ , где  $\mathbf{M}_s = \sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_{is} \gamma'_{is}$ ;  $\mathfrak{R}_s = \sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_{is} (y_i - f_i(\hat{\Theta}_s))$ .

После несложных преобразований приходим к очень удобной в вычислительном плане формуле

$$\Theta - \hat{\Theta}_s = \mathbf{Q}_s \mathbf{m}_s^{-1} \sum_{i=1}^n U_{is} (y_i - f_i(\hat{\Theta}_s)), \quad (1.27)$$

$$\text{где } \mathbf{m}_s = \sum_{i=1}^n \omega_i U_{is} U'_{is}.$$

Итерационная процедура Ньютона — Гаусса, опирающаяся на (1.27), принимает вид

$$\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \rho_s \mathbf{Q}_s \mathbf{m}_s^{-1} \sum_{i=1}^n U_{is} (y_i - f_i(\Theta_s)). \quad (1.28)$$

Выбор  $\rho_s$  осуществляется по одному из правил, принимаемых для процедуры Ньютона — Гаусса с переменным шагом.

Остановимся на некоторых особенностях процедуры (1.28). Ее основное достоинство состоит в том, что на каждом шаге достаточно всего одного вычисления функции  $f_i(\Theta)$  (естественно, при всех  $i = \overline{1, n}$ ). Данное свойство оказывается чрезвычайно полезным при сложных функциях  $f_i(\Theta)$ . Например, в тех случаях, когда эта функция удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, допускающему лишь численное решение, для получения которого требуются специальные объемистые вычисления.

Процедура (1.28) содержит операцию обращения матрицы, от которой можно было бы избавиться, заменив ее обращением с помощью рекуррентных формул. Однако, как правило, трудоемкость этой операции несущественна по сравнению с трудоемкостью подсчета значений функций  $f_i(\Theta)$ .

В [Ralston, Jennrich (1978)] утверждается, что вместо непосредственного обращения матрицы  $\mathbf{m}_s$  целесообразно использовать пошаговые процедуры, применяемые при отборе существенных факторов (см., например, [Айвазян (2010)], п. 4.4). Подобный прием особенно удобен при функциях  $f_i(\Theta)$  «вражнего» типа (матрица  $\mathbf{m}_s$  плохо обусловлена).



Для определения  $\gamma_{i1}$  требуется подсчет функций  $f_i(\Theta)$  по крайней мере в  $(m+1)$ -й точке  $\Theta_i$ . На последующих итерациях достаточно проведения подсчета функций  $f_i(\Theta)$  лишь в одной точке  $\Theta_s$ . Однако при плохо обусловленных матрицах  $m_s$  рекомендуется использовать в (1.26) дополнительные значения функций, подсчитанные в точках  $\Theta_{i_1}, \dots, \Theta_{i_{k_s}}$ . Таким образом, упоминавшееся ранее  $q$  равно  $\sum_{l=1}^s k_l$ . Дополнительные точки рекомендуется располагать на направлениях, ортогональных к направлению, определяемому (1.26).

При линейной параметризации метод Ньютона — Гаусса без подсчета производных дает точное решение задачи МНК на первой итерации, если  $\rho_1 = 1$ .

На наш взгляд, выигрыш в объеме вычислений при переходе от итерационной процедуры (1.27) к более сложным процедурам весьма сомнителен ввиду резкого увеличения сложности расчетов на каждой итерации.

**Некоторые замечания о выборе длины шага.** Один из главных недостатков изложенного метода состоит в следующем. Как показано ранее, существенным свойством квазиградиентных методов является возможность отыскания такого (может быть, достаточно малого) шага  $\rho_s$  (в выбранном направлении), который приводит к уменьшению значения минимизируемой функции. Это имеет место всякий раз, когда направление минимизации составляет острый угол с антиградиентом. Выбор же направления в формуле (1.28) не гарантирует нам этого. Поэтому даже при малых  $\rho_s > 0$  мы будем не в состоянии уменьшить значение  $J(\Theta)$ . В [Ralston, Jennrich (1978)] предлагается попеременно для  $\rho_s$  пробовать как положительные, так и отрицательные значения. Например, если задаться коэффициентом редукции  $0 < \beta < 1$ , то можно положить  $\rho = (-\beta)^r$ , где  $r = 0, 1, \dots$ ; величина  $\rho_s$  тогда соответствует первому  $r$ , для которого  $J(\hat{\Theta}_{s+1}) < J(\hat{\Theta}_s)$ .

Однако и эта процедура иногда может не привести к уменьшению функции (например, в случае, когда направление минимизации ортогонально градиенту). Тогда следующую точку можно искать методом случайного поиска в окрестности  $\hat{\Theta}_s$ .

**Разностные аналоги метода Ньютона.** В предыдущем пункте отправной точкой при конструировании итерационных процедур служила доступность информации лишь о функциях  $f_i(\hat{\Theta}_s)$ . Иногда в регрессионных задачах, оказывается, сравнительно просто подсчитать производные  $\dot{f}_{is}$ . Подчеркнем, что речь идет о непосредственном подсчете величины  $\dot{f}_{is}$ , а не их разностных аналогов, которые требуют, по крайней мере  $(m+1)$ -го вычисления функций  $f_i(\Theta)$ .

Обращение к разностным формулам для вычисления  $f'_{is}$  делает применение изложенной ниже группы методов бессмысленным. Каждый шаг, ими определяемый, будет по трудоемкости близок к нескольким шагам из итерационных процедур, рассмотренных в п. 1.3.4 и 1.3.5.

По-видимому, наиболее известным из рассматриваемой группы методов является метод Дэвидона — Флетчера — Пауэлла. Идея, лежащая в основе данных методов, состоит в отыскании на каждом шаге направлений спуска, близких к направлению метода Ньютона, но без использования матрицы вторых производных.

Матрица  $\tilde{\mathbf{H}}_s$ , аппроксимирующая матрицу  $\mathbf{H}_s$  из метода Ньютона, может быть, например, определена как решение системы

$$\nabla J(\hat{\Theta}_t) - \nabla J(\hat{\Theta}_{t-1}) = \mathbf{H}^{-1}(\hat{\Theta}_t - \hat{\Theta}_{t-1}); \quad t \leq s, \quad (1.29)$$

где  $\mathbf{H}$  — симметричная матрица.

Решение системы (1.29) при  $s < m$  неоднозначно, поэтому возможны различные способы конструирования матрицы  $\mathbf{H}$ . Различные методы рассматриваемой группы отличаются способами конструирования этой матрицы и правилами выбора направлений  $\tilde{\mathbf{H}}_s^{-1} \nabla J(\hat{\Theta}_s)$ , если они не определены однозначно. Матрица  $\tilde{\mathbf{H}}_s$  должна удовлетворять одновременно уравнениям (1.29) при всех  $t \leq s$ .

Приведем способы конструирования матриц  $\tilde{\mathbf{H}}_s$  для некоторых наиболее распространенных методов (см. [Поляк (1969)], [Пшеничный, Данилин (1975)], [Powell (1970)], [Huang (1970)]):

а) *метод сопряженных градиентов*: 
$$\tilde{\mathbf{H}}_{s+1} = \tilde{\mathbf{H}}_0 - \frac{\tilde{\mathbf{H}}_0 g_s \nabla J'(\Theta_s) \tilde{\mathbf{H}}_s}{\nabla J'(\hat{\Theta}_s) \tilde{\mathbf{H}}_0 \nabla J(\hat{\Theta}_s)}$$

где  $g_s = \nabla J(\hat{\Theta}_s) - \nabla J(\hat{\Theta}_{s-1})$ , матрицу  $\mathbf{H}_0$  часто выбирают единичной или диагональной с элементами  $\theta_{i,0} / (\frac{\partial}{\partial \theta_i} J(\Theta))_{\Theta=\Theta_0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

б) *метод Дэвидона — Флетчера — Пауэлла*:

$$\tilde{\mathbf{H}}_s = \tilde{\mathbf{H}}_{s-1} + \frac{(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})'}{(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})' g_s} - \frac{\tilde{\mathbf{H}}_{s-1} g_s g_s' \tilde{\mathbf{H}}_{s-1}}{g_s' \tilde{\mathbf{H}}_{s-1} g_s};$$

в) *измененный вариант метода Дэвидона — Флетчера — Пауэлла*:

$$\tilde{\mathbf{H}}_s = \tilde{\mathbf{H}}_{s-1} + \frac{(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})'}{(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})' g_s} - \frac{\tilde{\mathbf{H}}_{s-1} g_s (\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})'}{(\hat{\Theta}_s - \hat{\Theta}_{s-1})' g_s}.$$

При квадратичной функции  $J(\Theta)$  (в нашем случае — линейной параметризации) после  $m$  шагов матрица  $\mathbf{H}$ , подсчитываемая любым из методов а) — в), в точности совпадает с матрицей  $\mathbf{H}_s$ , определенной в п. 1.3.3. Иными словами, при  $\rho_s = 1$  в этом случае точное решение исходной экстремальной задачи будет заведомо получено за  $m$  шагов. Если

$\rho_s = 1$  выбирается из условия наискорейшего спуска в направлении —  $\hat{\mathbf{H}}_s^{-1} \nabla J(\hat{\Theta}_s)$ , то при выполнении не слишком ограничительных условий последовательность  $\{\hat{\Theta}_s\}$  сходится при  $s \rightarrow \infty$  к  $\hat{\Theta}$  со сверхлинейной скоростью независимо от выбора  $\Theta_0$ .

### 1.3.6. Способы нахождения начального приближения

В задаче минимизации функции  $J(\Theta)$  первостепенное значение имеет удачный выбор начального приближения  $\Theta_0$ . Разумеется, невозможно придумать общего правила, которое было бы удовлетворительно для всех случаев, т. е. для всех возможных нелинейных функций  $\{f_i\}$ . Каждый раз приходится искать свое решение. Ниже предлагается набор некоторых способов нахождения грубого начального приближения, которое на практике может служить отправной точкой поиска удовлетворительных приближений в конкретной задаче.

**Поиск на сетке.** Особенно эффективен этот метод при небольшом числе собственно нелинейных параметров. Часто функции  $f_i$  устроены так, что при фиксации значений одних параметров (которые и называем собственно нелинейными) остальная часть параметров становится линейной.

Задаваясь тогда нижней и верхней границей для нелинейных параметров, с некоторым шагом можно устроить перебор вариантов на полученной сетке значений этих собственно нелинейных параметров и выявить ту линейную регрессию, которая приводит к минимальной сумме квадратов.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(X_i; \Theta) = \theta_1 + \theta_2 x_i^{(1)} + \theta_3 e^{\theta_4 x_i^{(2)}}. \quad (1.30)$$

Здесь собственно нелинейным параметром будет  $\theta_4$ .

Допустим, известно, что  $\underline{\theta}_4 \leq \theta_4 \leq \bar{\theta}_4$ . Пусть  $h$  — шаг для параметра  $\theta_4$ . Вычислим  $K = (\bar{\theta}_4 - \underline{\theta}_4)/h$  линейных регрессий

$$\tilde{f}_k(X_i; \Theta) = \theta_1 + \theta_2 x_i^{(1)} + \theta_3 z_{ik},$$

где  $z_{ik} = \exp[(\underline{\theta}_4 + hk) x_i^{(2)}]$ ,  $k = \overline{1, K}$ , и найдем для каждой из них минимальную сумму квадратов. Наименьшей из них соответствует оптимальное начальное приближение. В принципе шаг  $h$ , от которого зависит «густота» сетки, *может варьироваться*, так что за счет уменьшения величины  $h$  значения параметров могут быть найдены с любой точностью.

**Преобразование модели.** Иногда некоторым преобразованием модели можно привести к линейной (см. п. 1.2) или же уменьшить число



**Разложение в ряд Тейлора по независимым переменным.**

Основой итерационной минимизации суммы квадратов является разложение функции регрессии в ряд Тейлора до линейных членов по параметрам. Для нахождения грубого начального приближения иногда бывает полезна процедура аппроксимации регрессии путем разложения ее в ряд Тейлора по независимым переменным  $X_i$ . Будем для простоты считать  $X_i$  одномерным. Пусть  $\bar{x}$  — среднее значение, тогда приближенно

$$f(x_i; \Theta) \approx f(\bar{x}; \Theta) + (x_i - \bar{x}) f_x^{(1)}(\bar{x}; \Theta) + \dots + \frac{1}{m!} (x_i - \bar{x})^m f_x^{(m)}(\bar{x}; \Theta).$$

Обозначим  $(x_i - \bar{x})^k = z_{ik}$ ,  $f_x^{(k)}(\bar{x}; \Theta) = \Phi_k$ , таким образом приходим к линейной модели  $\tilde{f}(Z_i; \Phi) = \Phi_0 + \Phi_1 z_{i1} + \dots + \Phi_m z_{im}$ .

Пусть  $\hat{\Phi}_k$  — МНК-оценки параметров этой линейной регрессии. В качестве начальных приближений примем решение нелинейной системы уравнений относительно  $\theta_1, \dots, \theta_m$ :

$$f(\bar{x}; \Theta) = \hat{\Phi}_0, \dots, f_x^{(m)}(\bar{x}; \Theta) = \hat{\Phi}_m.$$

Очевидно, этот метод приемлем в том случае, когда последняя система относительно первоначальных параметров решается довольно просто (аналитически).

Продемонстрируем использование этого приема на примере нелинейной регрессии (1.30). Для простоты будем считать  $\bar{x}^{(2)} = 0$ . Тогда  $e^{\theta_4 x_i^{(2)}} \approx 1 + (x_i^{(2)} - \bar{x}^{(2)})\theta_4 + \frac{1}{2}(x_i^{(2)} - \bar{x}^{(2)})^2 \theta_4^2$ .

Подставляя это разложение в (1.30), получим

$$\tilde{f}(X_i; \Theta) = (\theta_1 + \theta_3) + \theta_2 x_i^{(1)} + \theta_3 \theta_4 x_i^{(2)} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_4^2 (x_i^{(2)})^2.$$

Обозначив  $\Phi_0 = \theta_1 + \theta_3$ ,  $\Phi_1 = \theta_2$ ,  $\Phi_3 = \theta_3 \theta_4$ ,  $\Phi_4 = \theta_4^2/2$ ,  $x_i^{(1)} = z_{i1}$ ,  $x_i^{(2)} = z_{i2}$ ,  $(x_i^{(2)})^2 = z_{i3}$ , приходим к линейной по  $\Phi$  модели  $\tilde{f}(Z_i; \Phi) = \Phi_0 + \Phi_1 z_{i1} + \Phi_3 z_{i3} + \Phi_4 z_{i3}$ .

Тогда если  $\hat{\Phi}_i$  — МНК-оценки линейной регрессии, то легко проверить, что начальным приближением для параметров  $\Theta$  будут

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\Phi}_1, \quad \hat{\theta}_4 = 2\hat{\Phi}_4/\hat{\Phi}_3, \quad \hat{\theta}_3 = \hat{\Phi}_3/\hat{\theta}_4, \quad \hat{\theta}_1 = \hat{\Phi}_0 - \hat{\theta}_3.$$

В реальности возможна комбинация предложенных способов. Практика показывает, что таким образом можно получить достаточно хорошее начальное приближение для широкого круга нелинейных регрессий.

### 1.3.7. Вопросы существования и единственности МНК-оценки

**Существование.** Запись (1.18), строго говоря, не совсем корректна, так как МНК-оценка может отсутствовать, если априорное множество допустимых значений параметров  $\Gamma$  не является компактом (по предположению  $f_i$  считаем непрерывными на  $\Gamma$ ). Отсутствие решения в задаче МНК практически приведет к тому, что итерационный процесс минимизации  $f(\Theta)$  будет расходиться и  $\|\Theta_s\| \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Естественно, перед тем как решать задачу минимизации, желательно удостовериться, что она корректна. Изложим один подход к решению этой проблемы (более подробно см. [Демиденко (1981)]). Назовем *нижней границей функции  $J(\Theta)$  на бесконечности* число

$$\bar{J} = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|\Theta\| \geq r} J(\Theta).$$

Можно показать, что если существует такое начальное приближение  $\Theta_0$ , что  $J(\Theta_0) < \bar{J}$ , то МНК-оценка существует, а множество  $S(\Theta_0) = \{\Theta \in R^m : J(\Theta) \leq L(\Theta_0)\}$  компактно. Компактность его гарантирует существование хотя бы одной предельной точки последовательности значений параметров, вырабатываемой одним из методов минимизации.

*Нелинейная регрессия имеет бесконечные хвосты*, если при  $\|\Theta\| \rightarrow \infty$   $|f_i(\Theta)| \rightarrow \infty$  для любого  $i = \overline{1, n}$ . Наоборот, *регрессия имеет конечный хвост*, если существует такая последовательность параметров  $\|\Theta_k\| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ , что  $|f_i(\Theta)| \leq M < \infty$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Можно показать, что  $\bar{J} = +\infty$  тогда и только тогда, когда регрессия имеет бесконечные хвосты. В случае  $\bar{J} = \infty$  МНК-оценка всегда существует. Например, в случае логлинейной модели, т.е. когда  $f(X_i; \Theta) = \exp(\Theta' X_i)$ , регрессия имеет бесконечные хвосты, если векторы  $X_1, \dots, X_n \in R^m$  *разнонаправлены* (для любого  $\alpha' \in R^m$  существует вектор  $X_j$ , для которого  $\alpha' X_j < 0$ ). В то же время можно показать, что если наблюдения  $y_i > 0$ , то в логлинейной модели МНК-оценка всегда существует.

Оценки снизу для величины  $\bar{J}$  в каждом конкретном случае находят аналитически до начала процесса минимизации.

**Единственность.** Сумма квадратов  $J(\Theta)$  (см. (1.18)) может быть *мультимодальной*. Более того, можно доказать, что вероятность мультимодальности  $J(\Theta)$  отлична от нуля для любой нелинейной регрессии, не сводящейся к линейной преобразованием в пространстве параметров. Дело усугубляется тем, что все методы минимизации в лучшем случае приводят к *локальному* минимуму функции. Проверка того, является ли этот минимум глобальным, является следующей, возможно, не менее трудоемкой операцией. На практике часто поступают следующим

образом. Процесс итераций начинают из другого начального приближения. Тогда, если он сойдется к точке, полученной в первой попытке, можно быть более уверенным в том, что нелинейный минимум является глобальным.

Существуют аналитические методы проверки на достижимость глобального минимума суммы квадратов. Все они предполагают аналитическое исследование поверхности отклика. Иногда при исследовании этой проблемы бывает полезен следующий результат. Пусть найдено выпуклое множество значений параметров  $S$ , на котором гессиан  $\partial^2 J / (\partial \theta \partial \theta')$  положительно определен. Пусть далее найдена оценка снизу, такая, что  $J(\theta) \geq M$  для всех  $\theta \in S$ . Тогда, если найденной точке в процессе итераций  $\hat{\theta} \in S$  соответствует локальный минимум со значением  $J(\hat{\theta}) < M$ , то  $J(\hat{\theta})$  — глобальный минимум функции. Например (см. [Демиденко (1981)]), для логлинейной модели  $f(X_i; \theta) = \exp(\theta' X_i)$  с положительными наблюдениями  $y_i$  множеством  $S$  будет

$$S = \{ \theta \in R^m : \theta' X_i > \ln(y_i) - \ln(2), \quad i = \overline{1, b} \},$$

а в качестве простейшей оценки снизу можно взять  $M = \frac{1}{4} \min(y_i^2)$ . Подобные оценки, как и в случае исследования на существование МНК-оценки, необходимо проводить аналитическими методами.

### 1.3.8. Основные свойства МНК-оценок

В данном пункте исследуются основные свойства МНК-оценок параметров и связанные с ними вопросы точности построенной модели регрессии, в которой наблюдаемые значения  $y_i$  результирующего показателя  $\eta$  и  $X_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)})$  объясняющих переменных  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(p)})$  связаны соотношениями (1.17).

При этом постулируется выполнение следующих допущений:

(i) выбранный исследователем класс допустимых решений  $F$  содержит в себе искомую функцию регрессии  $f(X; \theta) = E(\eta | \xi = X)$ , т. е.

$$f(X; \theta) \in F; \tag{1.31}$$

(ii) регрессионные остатки  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$  несмещены относительно нуля, взаимно некоррелированы и одинаково  $(0; \sigma^2)$ -нормально распределены, т. е.

$$\varepsilon \in N(0, \sigma^2 \cdot I_n); \tag{1.32}$$

(iii) искомая функция регрессии  $f(X; \theta)$  нелинейно зависит от подлежащих статистическому оцениванию параметров  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$ ,

однако характер этой зависимости *достаточно гладкий* (например, существуют всевозможные вторые производные от  $f(X; \Theta)$  по параметрам  $\theta_k, \theta_j; k, j = 1, \dots, m$ ).

Напомним, что главным (*принципальным*) пунктом «идеализации» анализируемой схемы является первый, т. е. допущение (1.31). Два других носят, скорее, полутехнический характер.

Относительная сложность решения различных вопросов, относящихся к свойствам оценок  $\hat{\Theta}$  и к точности регрессионного анализа (по сравнению с линейным вариантом), состоит в том, что в данном случае МНК-оценки  $\hat{\Theta}$  неизвестных параметров  $\Theta$  определяются не в виде явных аналитических выражений, а лишь в ходе итерационных алгоритмических процедур (см. п. 1.3.1–1.3.5), что существенно затрудняет исследование их свойств. В основе обычно используемых в данной схеме подходов — разложение в ряд Тейлора (по параметрам  $\Theta$  в окрестности наилучшей оценки  $\hat{\Theta}$ ) оптимизируемого критерия МНК и искомой функции регрессии  $f(X; \Theta)$ .

Поскольку МНК-оценки  $\hat{\Theta}$  параметра  $\Theta$  модели (1.17) в условиях (1.31)–(1.32) совпадают с оценками максимального правдоподобия, то мы можем воспользоваться общими результатами о свойствах последних. Из них, в частности, следует, что МНК-оценки  $\hat{\Theta}$  регрессионных коэффициентов  $\Theta$  модели (1.17) являются (при условии соблюдения упомянутых условий) *состоятельными, асимптотически-несмещенными, асимптотически-эффективными и асимптотически-нормальными* (асимптотика по  $n \rightarrow \infty$ ).

Для того чтобы перейти непосредственно к решению задач анализа точности нелинейной регрессионной модели, нам необходимо получить предварительно выражение для ковариационной матрицы  $\Sigma_{\hat{\Theta}}$  МНК-оценок  $\hat{\Theta}$ .

С этой целью воспользуемся разложением функции регрессии  $f(X_i; \Theta)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\Theta = \hat{\Theta}$ , (где  $\hat{\Theta}$  — МНК-оценка параметра  $\Theta$ , полученная с помощью процедур, описанных в п. 1.3.1–1.3.5), ограничиваясь линейными членами разложения:

$$f(X_i; \Theta) \approx f(X_i; \hat{\Theta}) + (\Theta - \hat{\Theta})' \left. \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}}$$

или, в более удобных обозначениях,

$$f_i(\Theta) \approx f_i(\hat{\Theta}) + (\Theta - \hat{\Theta})' f_i, \tag{1.33}$$

где  $f_i(\Theta) = f(X_i; \Theta)$  и  $f_i = (\partial f_i / \partial \theta_1, \dots, \partial f_i / \partial \theta_m)'$ .

Выражение (1.33) для произвольного значения  $X$  дает:

$$f(X; \Theta) - f(X; \hat{\Theta}) \approx (\Theta - \hat{\Theta})' f$$



## Введение обозначений

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_k(X) &= \left. \frac{\partial f(X; \Theta)}{\partial \theta_k} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ \tilde{\Theta} &= \Theta - \hat{\Theta}; \quad \tilde{f}(X; \tilde{\Theta}) = f(X; \tilde{\Theta} + \hat{\Theta}) - f(X; \hat{\Theta}); \\ \tilde{\Psi}(X) &= \tilde{f} = (\tilde{\psi}_1(X), \dots, \tilde{\psi}_m(X))'\end{aligned}$$

позволяет записать выражение (1.34) в виде

$$\tilde{f}(X; \tilde{\Theta}) \approx \tilde{\Theta}' \tilde{\Psi}(X) \quad (1.34')$$

и свести, таким образом, нелинейную модель (1.17) к ее аппроксимации линейной схемой.

Решение задач анализа точности регрессионной модели основано на исследовании точности оценок  $\hat{\Theta}$  и отклонений  $f(X; \Theta) - f(X; \hat{\Theta})$ .

Примем во внимание приближенные соотношения (1.34) и (1.34'), равенство ковариационных матриц оценок  $\hat{\Theta}$  и  $\tilde{\Theta}$  (т.е.  $\Sigma_{\hat{\Theta}} = \Sigma_{\tilde{\Theta}}$ ) и возможность использования обычного приближенного приема вычисления вторых моментов статистических оценок, когда в полученные выражения для этих моментов, зависящие от неизвестных значений оцениваемых параметров, вставляются *их оценки*.

Тогда можно (см., например, [Бард (1979)], § 7.5) получить следующие выражения для ковариационной матрицы  $\Sigma_{\hat{\Theta}}$  оценок  $\hat{\Theta}$  и для ее оценки  $\hat{\Sigma}_{\hat{\Theta}}$ :

$$\Sigma_{\hat{\Theta}} \approx \sigma^2 \mathbf{M}_{\Theta}^{-1} \quad \text{и, соответственно,} \quad \hat{\Sigma}_{\hat{\Theta}} \approx \hat{\sigma}^2 \mathbf{M}_{\hat{\Theta}}^{-1}, \quad (1.35)$$

где

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(X_i; \hat{\Theta}))^2, \quad \mathbf{M}_{\Theta} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{\Theta}(X_i),$$

а

$$\mathbf{M}_{\Theta}(X_i) = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_1} \right)^2 & \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_1} & \left( \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_2} \right)^2 & \dots & \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_2} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_m} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_2} & \dots & \left( \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_m} \right)^2 \end{bmatrix},$$

причем производные, участвующие в выражении элементов матрицы

$\mathbf{M}_{\Theta}(X_i)$  берутся в точке  $\Theta = \Theta^*$ , т.е.

Разработка электронных библиотек  
https://право.информ2000.рф

Скопировано с сайта  
http://учебники.информ2000.рф

$$\frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_k} \Big|_{\Theta=\Theta^*} \cdot \frac{\partial f(X_i; \Theta)}{\partial \theta_j} \Big|_{\Theta=\Theta^*}$$

$$k, j = 1, \dots, m; \quad \Theta^* = \Theta, \hat{\Theta}.$$

Подчеркнем два главных отличия данного случая от линейного.

*Во-первых*, используемые для построения доверительных интервалов свойства состоятельных МНК-оценок  $\Theta$  — несмещенность, оптимальность, нормальность, а также свойства б), в) и г) из п. 11.1.1 [Айвазян и др. (1985)] справедливы лишь в *асимптотическом* (по  $n \rightarrow \infty$ ) смысле.

*Во-вторых*, следует учитывать *приближенный характер* базовых соотношений (1.34) и соответственно (1.35). Следует признать, что возможны различные уточнения описываемого здесь приближенного подхода (см., например, [Beale (1974)]).

Однако вряд ли они существенно усовершенствуют предлагаемые в данном пункте практические рекомендации: ведь даже так называемые точные критерии и доверительные интервалы *на практике оказываются всего лишь приближенными* (они точны лишь в той мере, в какой соблюдаются в реальной ситуации те идеализированные допущения, на которых строятся соответствующие статистические выводы). Поэтому, говоря о том, что интересующая нас погрешность не превзойдет определенной величины с доверительной вероятностью, например, равной 0,95, мы должны всегда отдавать себе отчет в приближенном характере подобных заключений.

В заключение отметим, что приведенные выше результаты дают основание использовать в *построении интервальных оценок* для результирующего показателя  $y$  и функции регрессии  $f$  (при заданных значениях объясняющих переменных  $X$ ) рекомендации п. 6.3 из [Айвазян (2010)], полученные для *линейной* модели регрессии, в которых, однако, следует заменить:

- матрицу  $X^T \Sigma_0^{-1} X$  на матрицу  $M_{\hat{\Theta}}$ ;
- оценку  $\hat{\sigma}^2$  на оценку  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(X_i; \hat{\Theta}))^2$ ;
- вектор-столбец  $X_{n+1}$  на вектор-столбец

$$\Psi(X_{n+1}) = \dot{f}(X_{n+1}) = \left( \frac{\partial f(X_{n+1}; \hat{\Theta})}{\partial \hat{\theta}_1}, \dots, \frac{\partial f(X_{n+1}; \hat{\Theta})}{\partial \hat{\theta}_m} \right)'$$

## Выводы

1. *Этап параметризации регрессионной модели*, т.е. выбора параметрического семейства функций (класса допустимых решений), в рамках которого производится дальнейший поиск неизвестной функции регрессии, является одновременно наиболее важным и наименее теоретически обоснованным этапом регрессионного анализа.

2. Прежде всего, исследователь должен сосредоточить свои усилия на *анализе содержательной сущности* искомой статистической зависимости, чтобы максимально использовать имеющиеся априорные сведения о «физическом» механизме изучаемой связи при выборе общего вида функции регрессии, (см. п. 2.5.1 в [Айвазян (2010)], а также п. 6.1 из [Айвазян и др. (1985)]).

3. Важную роль в правильном выборе параметрического класса допустимых решений играет *предварительный анализ геометрической структуры* совокупности исходных данных, и в первую очередь анализ геометрии парных корреляционных полей, включающий в себя, в частности, учет и формализацию «гладких» свойств искомой функции регрессии (см. п. 2.5.2 из [Айвазян (2010)], а также п. 6.2 [Айвазян и др. (1989)]), использование вспомогательных линеаризующих преобразований (см. п.1.2 книги).

4. Сформулированные с помощью содержательного (эконометрического) и геометрического анализа рабочие гипотезы об общем виде искомой функции регрессии могут быть проверены с привлечением соответствующих *математико-статистических критериев*.

Среди фундаментальных идей, на которых базируются эти статистические критерии, следует выделить:

- а) идею компромисса между сложностью регрессионной модели («емкостью» класса допустимых решений) и точностью ее оценивания;
- б) идею поиска модели, наиболее устойчивой к варьированию состава выборочных данных, на основании которых она оценивается;
- в) идею проверки гипотез об общем виде функции регрессии на базе сравнения выборочных критериев адекватности и исследования статистических свойств получаемых при этом оценок размерности модели (п. 6.3 из [Айвазян и др. (1985)], а также п. 2.5.3 из [Айвазян (2010)]).

5. При исследовании параметрических моделей регрессии весьма распространенным типом оптимизируемого (с целью нахождения оценок неизвестных значений параметров регрессии) критерия адекватности модели является *взвешенный (или обобщенный) критерий наименьших квадратов* (см. (1.18)). Следует стремиться к построению таких вычислительных алгоритмов решения оптимизационных задач, ко-

вестных параметров  $\Theta$ , — давали бы необходимые характеристики их точности (оценки элементов ковариационных матриц, доверительные области и т. п.).

6. Наибольшее распространение среди методов поиска оценок наименьших квадратов получили алгоритмы итерационного типа, позволяющие на каждой следующей  $((s + 1)$ -й) итерации получать приближенные значения  $\hat{\Theta}_{s+1}$  искомых оценок параметров, лежащие «ближе» к истинному решению  $\hat{\Theta}$  соответствующей оптимизационной задачи, чем значения  $\hat{\Theta}$  предыдущей итерации, т. е.  $\hat{\Theta}_{s+1} = \hat{\Theta}_s + \rho_s \cdot \delta_s$ , где  $s$  — номер итерации,  $\delta_s$  — вектор, определяющий направление движения на  $s$ -й итерации,  $\rho_s$  — длина шага.

Если движение осуществляется в направлении под острым углом к антиградиенту оптимизируемой функции, то алгоритм относится к классу алгоритмов *квазиградиентного типа* (см. п. 1.3.1).

7. Если движение в итерационной процедуре уточнения значений оценок параметров осуществляется непосредственно в направлении антиградиента, то процедуру относят к *алгоритмам градиентного спуска*. Подобные алгоритмы обеспечивают (при определенных ограничениях на минимизируемую функцию) сходимость последовательности  $\hat{\Theta}_s$  со скоростью геометрической прогрессии (линейная сходимость). Из-за того, что реальная скорость сходимости таких алгоритмов резко снижается при приближении  $\hat{\Theta}_s$  к предельному значению  $\hat{\Theta}$ , градиентный спуск целесообразно применять лишь на начальных этапах минимизации, используя найденные в результате сравнительно небольшого числа итераций величины  $\hat{\Theta}_s$  в качестве начальных приближений для более сложных методов, обладающих более высокой скоростью сходимости (см. п. 1.3.2).

8. В *методе Ньютона* значения неизвестных параметров на каждой следующей итерации  $\hat{\Theta}_{s+1}$  находятся из условия минимума квадратичного полинома, аппроксимирующего исходную критериальную функцию в окрестности точки  $\hat{\Theta}_s$ . При этом соответствующая процедура будет менее чувствительна к выбору начального приближения (в частности, будет менее подвержена эффекту «раскачки» при его неудачном выборе), если использовать ее вариант с регулировкой шага. При определенных условиях метод Ньютона обеспечивает квадратичную скорость сходимости последовательности  $\hat{\Theta}_s$  к  $\hat{\Theta}$  (см. п. 1.3.3).

9. *Используя линейную (по параметрам) аппроксимацию* исследуемой функции регрессии в окрестности точки  $\hat{\Theta}_s$ , можно прийти к модификации метода Ньютона — *методу Ньютона — Гаусса*. Он существенно проще в вычислительном плане, однако бывает слишком чувствительным к эффекту слабой обусловленности используемых в нем матриц. *Метод Ньютона — Гаусса* обеспечивает квадратичную скорость сходимости этого метода в зависимости от условий

накладываемых на регрессионную функцию и свободные параметры алгоритма, может быть линейной, сверхлинейной или квадратичной (см. п. 1.3.4).

**10.** *Существенным недостатком методов* квазиградиентного типа, в том числе метода Ньютона, метода Ньютона — Гаусса и других, является *необходимость подсчета производных* от искомым регрессионных функций на каждой итерации.

Основная идея, на которую опираются методы, позволяющие обходиться без подсчета производных, заключается в использовании на  $(s + 1)$ -й итерации информации, полученной на предыдущих  $s$  итерациях, для построения разумных аппроксимаций для элементов матриц, определяющих выбор направления и шаг движения к решению  $\hat{\Theta}$  (см. п. 1.3.5).

**11.** Первостепенное значение для скорости сходимости используемых итерационных процедур решения оптимизационной задачи метода наименьших квадратов имеет удачный выбор начального приближения  $\hat{\Theta}_0$ . Для реализации этого выбора используется ряд приемов: «поиск на сетке» вспомогательного преобразования (линеаризирующего) модели, разбиение имеющейся выборки на подвыборки, разложение регрессионной функции в ряд Тейлора (см. п. 1.3.6).

**12.** При вычислительной реализации метода наименьших квадратов в нелинейном (по оцениваемым параметрам  $\Theta$ ) случае приходится исследовать вопросы существования и единственности решения (см. п. 1.3.7). Необходимо помнить, что используемые (в том числе все описанные выше) методы оптимизации приводят в лучшем случае лишь к *локальному* минимуму критериальной функции. Проверка того, является ли этот минимум глобальным, является следующей, зачастую не менее трудоемкой, вычислительной операцией.

## Глава 2

# Построение интегральных измерителей для синтетических латентных категорий

И в профессиональной деятельности, и в своей повседневной жизни человек постоянно сталкивается с ситуациями, когда ему приходится сравнивать между собой и упорядочивать по некоторому (не поддающемуся непосредственному измерению) свойству ряд объектов. Речь может идти, в частности, о сравнении стран по тем или иным аспектам качества жизни, предприятий отрасли по эффективности их деятельности, сложных изделий по обобщенной характеристике их качества, специалистов по эффективности их участия в выполнении поставленной задачи, участников игровых видов спорта по уровню проявленного ими мастерства и т. д. Формализации подобных ситуаций и вытекающим из нее рекомендациям по построению некоторого условного измерителя упомянутого свойства и посвящена глава.

В частности, рассматривается задача **измерения** так называемых **синтетических латентных категорий**, т. е. категорий, которые являются одновременно *синтетическими*, т. е. объединяющими в себе широкий спектр свойств анализируемого качества, и *латентными*, т. е. не поддающимися непосредственному измерению. К подобным синтетическим латентным категориям (СЛК) относятся, например, такие понятия, как *качество жизни населения* определенной территории (страны, региона), *уровень социальной напряженности* в обществе, *уровень взяточничества и коррупции*, *уровень материального благосостояния*, *индекс здоровья* определенного конгломерата населения, *качество эко-*

логической ниши для данной территории, инновационный уровень национальной экономики и т.п. Каждой такой синтетической латентной категории можно сопоставить (конечно, не единственным способом) набор статистических показателей  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , достаточно полно и разноаспектно ее характеризующих. Эти статистические показатели естественно интерпретировать как *частные критерии* анализируемой синтетической категории. Тогда измеритель  $y$  (интегральный индикатор) или измерители  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ ,  $k < p$  (интегральные индикаторы) такой синтетической категории строятся (строятся) в виде некоторой свертки (функции) этих показателей, т.е.  $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  (в случае *нескольких* интегральных индикаторов:  $y^{(1)} = f_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}), \dots, y^{(k)} = f_k(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ ).

Тогда, очевидно, сформулированную задачу можно охарактеризовать как некоторую **проблему редукции многокритериальных схем**. Этой проблеме посвящена обширная литература (см., например, [Хованов (1996)], [Фишберн (1978)], [Тангян (1980)], [Полищук (1989)], [Каплинский и др. (1991)], [Steuer (1986)]. Однако описанные ниже методы ее решения отличаются тем, что, *во-первых*, они являются *эконометрическими* по своей природе (т.е. они, являясь математико-статистическими, основаны на сочетании использования результатов некоторых измерений и соответствующих теоретических положений той области науки, к которой эти измерения и сама задача относятся), а *во-вторых*, предложенные методы формирования упомянутых выше свертки  $f(x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$  лишены тех существенных недостатков, которые свойственны другим (к сожалению, широко распространенным) методам (подробнее об этом см. ниже).

**З а м е ч а н и е.** Следует подчеркнуть возможность объективно оправданного отсутствия удовлетворительного решения проблемы перехода от многокритериальной схемы (с частными критериями  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ ) к **однокритериальной** ( $y$ ). В этом случае возникает задача определения числа и вида **нескольких** критериев  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ , позволяющих существенно редуцировать размерность  $p$  исходной многокритериальной схемы (т.е.  $k \ll p$ ).

## 2.1. Концептуальные основы подхода к измерению синтетических латентных категорий

Итак, пусть обобщенная сводная характеристика  $f$  анализируемого свойства объекта определяется набором частных критериев, задаваемых набором переменных  $x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$ . Тогда измеритель  $y$  (интегральный индикатор) этой категории строится в виде некоторой свертки (функции) этих показателей, т.е.  $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  (в случае *нескольких* интегральных индикаторов:  $y^{(1)} = f_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}), \dots, y^{(k)} = f_k(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ ).

однако сама эта характеристика является *латентной*, т. е. *не поддается непосредственному количественному измерению* (для нее не существует объективно обусловленной шкалы). Естественно предположить, что интуитивную количественную экспертную (профессиональную) оценку этой характеристики (обозначим ее  $y_э$ ) можно представить как несколько искаженное значение  $f(x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$ , причем это искажение  $\delta$  носит случайный характер и обусловлено как разрешающей способностью такого «измерительного прибора», каковым в данной схеме является эксперт, так и существованием ряда относительно слабо влияющих на  $y_э$ , но не входящих в состав  $X = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})'$ , частных критериев. Тогда модель, связывающая между собой интуитивное представление о сводном показателе качества ( $y_э$ ) с самим сводным показателем  $f(X)$  (как функцией от  $X$ ) и случайной погрешностью  $\delta(X)$ , может быть определена в виде

$$y_э = f(X) + \delta(X). \quad (2.1)$$

Если принять естественные, практически не ограничивающие общности данной схемы допущения относительно первых двух моментов остаточной случайной компоненты  $\delta(X)$ :

$$E\delta(X) = 0, \quad D\delta(X) = \sigma^2(X) < \infty,$$

то в случае, когда мы располагаем наблюдениями  $(X_i; y_{эi})$ ,  $-i = 1, 2, \dots, n$ , — очевидно, *обобщенная сводная (интегральная) характеристика  $f(X)$  может интерпретироваться как регрессия  $y_э$  по  $X$ .*

**Замечание о целевых функциях.** Весьма распространенной в области социально-экономических исследований является интерпретация обобщенной сводной (интегральной) характеристики качества  $f(X)$  как *целевой функции*. При этом под целевой функцией анализируемого выходного качества  $y$  понимается любое преобразование  $f$  частных критериев  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})'$ , сохраняющее заданное соотношение порядка между  $n$  рассматриваемыми объектами по  $y$ , т. е. обладающее тем свойством, что из

$$f(X_{i_1}) \geq f(X_{i_2}) \geq \dots \geq f(X_{i_n})$$

с необходимостью следует выполнение неравенств

$$y_{i_1} \geq y_{i_2} \geq \dots \geq y_{i_n},$$

где  $f(X_i)$  и  $y_i$  — значения, соответственно, целевой функции и истинно-  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.ru>  
 го (ненаблюдаемого) сводного показателя качества, характеризующие



$i$ -й объект. Очевидно, данное здесь определение целевой функции неоднозначно. Действительно, если  $f(X)$  есть целевая функция и  $\varphi(f)$  — любая монотонно возрастающая функция, то всякая функция вида

$$\tilde{f}(X) = \varphi(f(X))$$

также будет целевой функцией. Это означает, что наше допущение о наличии определенной шкалы в измерении  $y$  в ряде случаев играет чисто вспомогательную роль и не нацеливает нас на поиск, связанный с ее выявлением. Ведь в соответствии с этим определением само значение целевой функции не отражает никакой реальной, физически содержательной количественной закономерности. Реальные закономерности отражаются только соотношениями «больше» или «меньше» между значениями этой функции для различных наборов величин входных параметров  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})'$ . Тем самым эти соотношения отражают предпочтение (с точки зрения анализируемого выходного качества) одних значений  $X$  перед другими. Поэтому в задачах, в которых возможно регулирование значений  $X$  (в некоторой допустимой области), наиболее рациональным (оптимальным) управлением естественно признать то, которое максимизирует (при заданных ограничениях на  $X$ ) значения целевой функции.

Вопросы построения разного рода целевых функций широко представлены в литературе (см. [Хованов (1996)], [Полищук (1989)], [Доманский и др. (2006)]). Они обсуждаются, в частности, в гл. 4 книги [Айвазян (2012)] в связи с проблемой статистической оценки целевой функции потребительских предпочтений по данным выборочных бюджетных обследований домашних хозяйств (см. п. 4.1.2 этой работы).

Резюмируя сказанное, мы приходим к следующей общей логической схеме редукции многокритериальных схем (см. рис. 2.1).

Комментарии к реализации этой общей логической схемы и, в частности, формулировка связанных с этим задач даются ниже (см. п. 2.3.1).

## 2.2. Исходные данные

Исходные данные, необходимые в эконометрическом подходе для решения задачи редукции многокритериальных схем, состоят, в зависимости от объективных условий, либо из двух массивов — *статистического* и *экспертного (обучающего)*, либо только из одного — *статистического*.

**Статистический массив** объединяет в себе данные вида

$$\left( x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где  $x_i^{(j)}$  — значение  $j$ -го частного критерия (статистического показателя), зарегистрированное на  $i$ -м объекте, а  $n$  — общее число статистически обследованных объектов (объем выборки).

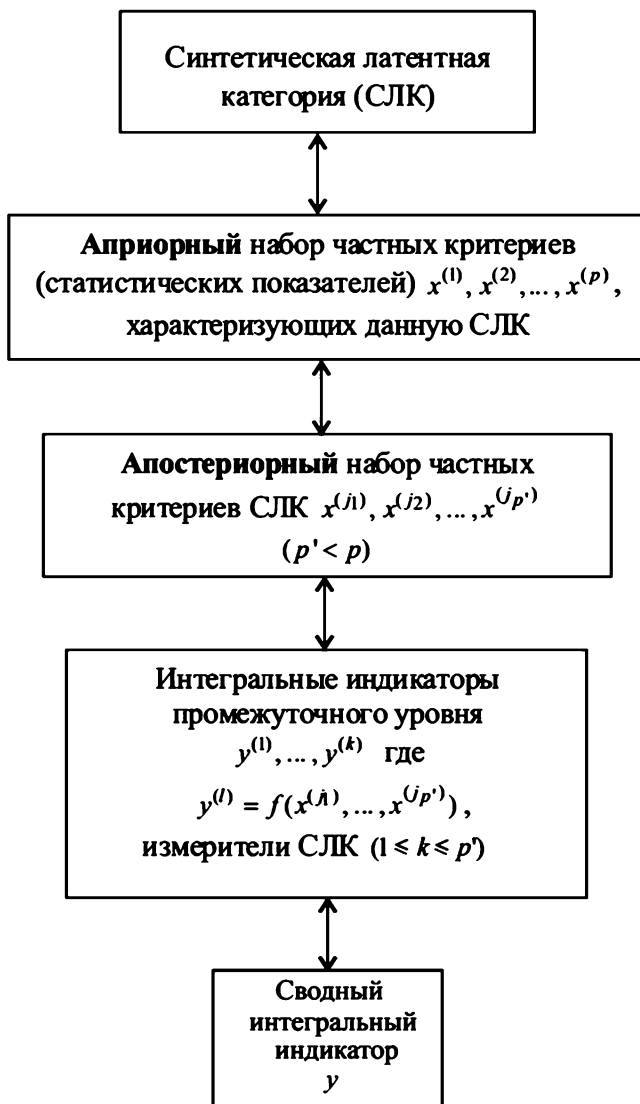


Рис. 2.1. Общая логическая схема редукции многокритериальных схем

**Экспертный (обучающий) массив** (или просто «обучение») содержит некоторую информацию о сравнении статистически обследованных (представленных в (2.2)) объектов по анализируемой синтетической латентной категории.

Эту информацию о сравнении объектов получают, как правило, с помощью специально организованного опроса экспертов и соответствующей статистической обработки экспертных оценок. Она обычно представляется в одной из следующих форм.



синтетической категории, но не предусматривающее никаких предпочтений между объектами, принадлежащими одной какой-то группе (например, разбиение всех анализируемых объектов на три группы: лидеров, середняков и аутсайдеров). В этом случае мы имеем информацию вида

$$(\tilde{y}_{i1}, \tilde{y}_{i2}, \dots, \tilde{y}_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3г)$$

где  $\tilde{y}_{il}$  — номер класса, к которому  $l$ -й эксперт отнес  $i$ -й объект,  $\tilde{y}_{il} \in \{1, 2, \dots, k_0\}$  (для определенности будем считать, что чем выше номер класса, тем выше качество анализируемой СЛК).

Строго говоря, эта форма экспертного обучения укладывается как в рамки формы (ii) (если допустить существование так называемых *связных*, т. е. неразличимых, рангов), так и в рамки формы (iii).

Вычислительные трудности, связанные с реализацией алгоритмов построения интегральных индикаторов (ИИ) в форме свертки  $f(X)$ , естественно, возрастают по мере перехода от более информативных вариантов экспертного обучения к менее информативным. Ниже (в п. 2.3.4) мы рассмотрим эти алгоритмы для каждой из приведенных выше форм обучения.

**Некоторые общие требования к формированию исходного (априорного) набора частных критериев.** При формировании исходного (априорного) набора статистических показателей (частных критериев)  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , характеризующих определенную синтетическую латентную категорию, эксперты должны руководствоваться следующими общими требованиями:

(А) *представительности (релевантности)*, в соответствии с которым в данном перечне должны быть представлены (при экзогенной заданности всех прочих аспектов СЛК) все основные показатели рассматриваемой синтетической категории; так, например, для синтетической категории «Качество жизни населения определенной территории» в этом перечне должны присутствовать наиболее существенные характеристики качества населения, материального благосостояния, качества социальной сферы и качества экологической ниши (см., например, [Айвазян (2012)]);

(Б) *информационной доступности*, в соответствии с которым привлекаемые к дальнейшему анализу показатели и частные критерии должны быть, по меньшей мере, доступны для их статистической регистрации и, более того, они должны входить в номенклатуру периодически регистрируемых официальных статистических показателей (или могут быть вычислены по значениям последних).

(В) *информационной достоверности*, в соответствии с которым используемые статистические данные и частные критерии должны адекватно отражать состояние анализируемого аспекта СЛК; так, именно по причине нарушения этого требования нам в ряде исследований пришлось отказаться от использования такого, казалось бы, существенного для синтетической категории «Качество жизни» показателя, как «среднее число зарегистрированных тяжких преступлений за год, приходящееся на 100 000 жителей»: дело в том, что малые значения этого показателя часто сигнализируют не о благополучном состоянии дел в данной области, а о слабой работе статистических и правоохранительных органов.

**Формирование редуцированного (апостериорного) набора частных критериев.** При формировании исходного (априорного) набора статистических показателей для анализируемой латентной синтетической категории экспертам предлагается опираться на определенную структуризацию частных критериев и интегральных свойств этой СЛК (см., например, ниже, рис. 2.2) и учитывать при этом сформулированные выше общие требования (А), (Б) и (В).

**Базовая идея, на которой строится методика формирования редуцированных (апостериорных) наборов частных критериев по каждой из анализируемых синтетических латентных категорий, заключается в следующем.**

Из состава сформированного (из теоретических, содержательных соображений, на экспертном уровне) априорного набора частных критериев заданного интегрального свойства требуется выделить (оставить для дальнейшего анализа) сравнительно небольшое число показателей таким образом, чтобы, во-первых, они являлись бы *наиболее существенно влияющими на анализируемую СЛК* (т.е. были бы **детерминантами** последней), а во-вторых, чтобы в оставшемся наборе частных критериев (который мы будем называть **апостериорным**) *было бы исключено явление мультиколлинеарности*, при котором наблюдается дублирование информации относительно анализируемой СЛК, доставляемой тесно коррелированными частными критериями (заметим, что при описанном ниже способе устранения мультиколлинеарности значения исключенных из априорного набора частных критериев обычно поддаются достаточно точному восстановлению по значениям переменных, вошедших в апостериорный набор).

Метод реализации этой общей идеи зависит от наличия (или отсутствия) «обучения» в постановке задачи измерения латентной синтетической категории.

**а) Отбор наиболее существенных частных критериев в условиях наличия обучения.** Будем предполагать, что модель (2.1) параметризуется в классе *линейных* функций частных критериев  $x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$  и при этом мы располагаем обучением в форме (i) в виде единого варианта экспертных балльных оценок  $y_{1э}, y_{2э}, \dots, y_{nэ}$ , анализируемой синтетической категории для всех рассматриваемых объектов (регионов, стран). В этом случае мы можем рассмотреть линейную регрессионную модель вида

$$y_{iэ} = \theta_0 + \theta_1 x_i^{(1)} + \dots + \theta_p x_i^{(p)} + \delta_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1')$$

Тогда отбор наиболее существенных частных критериев можно производить, например, с помощью сочетания методов пошаговой регрессии (или «метода всех возможных регрессий») «с присоединением» и «с исключением». Напомним общую схему этих процедур (см. п. 4.4.2 в [Айвазян (2010)]).

**Пошаговая процедура последовательного присоединения** предназначена для отбора (в рамках линейной модели множественной регрессии (2.1')) наиболее информативного набора из  $p'$  объясняющих переменных, отобранных из исходного (априорного) множества объясняющих переменных  $x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$  (очевидно,  $p' < p$ ).

*На первом шаге этой процедуры* ( $p' = 1$ ) из исходного набора объясняющих переменных  $X = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})'$  выбирается та переменная  $x^{(j_1)}$ , которая имеет максимальное значение квадрата коэффициента парной корреляции с зависимой переменной  $y$ , т. е.

$$r^2(y, x^{(j_1)}) = \max_{1 \leq j \leq p} r^2(y, x^{(j)}).$$

*На  $(\nu + 1)$ -м шаге этой процедуры* ( $1 \leq \nu \leq p - 2$ ) мы уже располагаем отобранными до этого шага наиболее информативными переменными  $x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_\nu)}$ . Следующая  $(\nu + 1)$ -я информативная переменная  $x^{(j_{\nu+1})}$  отбирается таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} R^2(y; (x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_\nu)}, x^{(j_{\nu+1})})) &= \\ &= \max_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq j_1, j_2, \dots, j_\nu}} R^2(y; (x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_\nu)}, x^{(j)})), \end{aligned}$$

где  $R^2(y; (x^{(l_1)}, \dots, x^{(l_N)}))$  — подправленный (“adjusting”) коэффициент детерминации между  $y$ , с одной стороны, и набором  $(x^{(l_1)}, \dots, x^{(l_N)})$  — с другой.

Обычно процедуру заканчивают на таком шаге, при котором переход к следующему шагу не дает статистически значимого приращения

**Пошаговая процедура последовательного исключения** предназначена для удаления из исходного (априорного) набора объясняющих переменных  $x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$  тех переменных, которые практически не увеличивают прогностическую силу модели (2.1').

На первом шаге этой процедуры из исходного набора объясняющих переменных удаляется та переменная  $x^{(i_1)}$ , исключение которой из модели (2.1') приводит к минимальному уменьшению величины коэффициента детерминации  $R^2$ , т. е.

$$R^2(y; X(i_1)) = \max_{1 \leq i \leq p} R^2(y; X(i)),$$

где  $X(l)$  обозначает исходный набор объясняющих переменных, из которого удалена переменная  $x^{(l)}$ .

Перед реализацией  $(\nu + 1)$ -го шага этой процедуры ( $1 \leq \nu \leq p - 2$ ) из исходного набора останется  $p - \nu$  объясняющих переменных. Обозначим их  $X^{(\nu)} = (x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_{p-\nu})})'$ . Тогда на  $(\nu + 1)$ -м шаге из этого набора будет исключена та переменная  $x^{(i_{\nu+1})}$ , удаление которой приводит к минимальному уменьшению величины  $R^2(y; (x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_{p-\nu})}))$ , т. е.

$$R^2(y; X^{(\nu)}(i_{\nu+1})) = \max_{i=j_1, \dots, j_{p-\nu}} R^2(y; X^{(\nu)}(i)),$$

где  $X^{(\nu)}(l)$  обозначает набор объясняющих переменных  $X^{(\nu)}$ , из которого исключена переменная  $x^{(l)}$ .

Обычно процедуру последовательного исключения проводят до того шага, после которого очередное удаление переменной приводит к статистически значимому уменьшению величины коэффициента детерминации  $R^2$ .

Возможно обобщение описанной процедуры на случаи, когда обучение представлено в форме (ii), (iii) или (iv) (например, с использованием подходов, описанных в [Айвазян, 2012, п. 2.3.5]).

**б) Отбор наиболее существенных частных критериев при отсутствии обучения.** Методологическая схема, по которой реализуется в данном случае общая базовая идея, состоит в следующем.

1) *Анализ мультиколлинеарности частных критериев априорного набора показателей.* С этой целью для переменных каждого из априорных наборов рассчитываются:

- матрица значений парных коэффициентов корреляции,  $r(x^{(l)}, x^{(\nu)})$  ( $l, \nu = 1, 2, \dots, p$ ), характеризующих степень тесноты попарных статистических связей между частными критериями анали-

- коэффициенты детерминации  $R^2$  каждого из частных критериев  $x^{(l)}$  анализируемого априорного набора по всем остальным показателям этого набора.

Анализ полученных числовых характеристик позволяет провести предварительную стадию выявления тесно связанных между собой пар, троек и т.п. групп переменных и поставить вопрос об отборе от каждой такой группы по одному представителю. О необходимости редукции каждого из априорных наборов частных критериев свидетельствует и близость к единице значений подавляющего большинства упомянутых выше коэффициентов детерминации  $R^2$  (см. примеры результатов вычислений по данной схеме в Приложении 3 к работе [Айвазян (2012)]).

2) *Отбор наиболее информативных частных критериев среди показателей априорного набора каждого интегрального свойства.* Пусть задан количественный состав ( $p'$ ) редуцированного набора показателей определенного интегрального свойства ( $p' < p$ ). Назовем набор частных критериев

$$x^{(l_1^0)}, x^{(l_2^0)}, \dots, x^{(l_{p'}^0)}$$

наиболее информативным, если

$$\sum_{l=1}^p R^2 \left( x^{(l)}; \left( x^{(l_1^0)}, \dots, x^{(l_{p'}^0)} \right) \right) = \max_{l_1, l_2, \dots, l_{p'}} \sum_{l=1}^p R^2 \left( x^{(l)}; \left( x^{(l_1)}, \dots, x^{(l_{p'})} \right) \right),$$

где  $R^2(y; (x^{(1)}, \dots, x^{(s)}))$  — подправленный ("adjusting") коэффициент детерминации зависимой переменной  $y$  по объясняющим переменным  $x^{(1)}, \dots, x^{(s)}$ . Очевидно, при подобном выборе апостериорных редуцированных *ограниченных* наборов частных критериев максимизируется прогностическая сила регрессионных моделей, с помощью которых можно восстановить значения **всего** априорного набора показателей анализируемого интегрального свойства по значениям только тех частных критериев, которые попали в этот ограниченный набор.

Выбор количественного состава ( $p'$ ) ограниченного набора частных показателей осуществляется в каждом конкретном случае на базе сочетания теоретических (содержательных) соображений и требований к минимально допустимым значениям  $R_{\min}^2$  коэффициентов детерминации  $R^2(x^{(l)}; (x^{(l_1^0)}, \dots, x^{(l_{p'}^0)}))$ .

**З а м е ч а н и е.** Отбор наиболее существенных частных критериев и в условиях наличия обучения, и без него основан на решении соответствующих оптимизационных задач. Для того чтобы оставить возможность учета *содержательных* (а не только *формальных*) соображений предлагается наряду с оптимальным составом апостериорного



набора переменных выводить и так называемые *околооптимальные* составы, т. е. такие наборы заданного числа переменных, значение оптимизируемого критерия для которых мало (статистически незначимо) отличаются от оптимального. И тогда окончательный выбор состава апостериорного набора частных критериев (из вариантов, предоставляемых оптимальным и околооптимальными наборами) производить, руководствуясь содержательными соображениями. Я бы рекомендовал это замечание распространить на общий случай, включив его в описание соответствующих процедур, содержащихся в статистических и эконометрических пакетах (SPSS, E-views, STATA и др.).

## 2.3. Методология построения интегральных индикаторов — измерителей синтетических латентных категорий и методы многокритериального рейтингования

### 2.3.1. Формулировка основных задач

Итак, мы должны предложить и обосновать методологию построения интегральных индикаторов (ИИ) для различных синтетических латентных категорий, основанную на специальном виде свертках ряда частных (*статистически регистрируемых*) критериев соответствующей синтетической категории, продемонстрировать работоспособность этой методологии (например, при сравнительном макроэконометрическом анализе и рейтинговании стран или регионов), а также предложить подход к *многокритериальному* рейтингованию объектов по анализируемой СЛК в ситуациях, когда задача построения *единственного* скалярного ИИ не имеет удовлетворительного решения. Для достижения поставленной цели мы должны уметь решать следующие задачи.

**Задача 1 (преданализ).** *Определение исходного (априорного) перечня статистических показателей  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , достаточно полно (разноаспектно) характеризующих анализируемую синтетическую категорию. Учитывая смысловую нагрузку, приданную этим показателям, мы называем их также частными критериями рассматриваемой синтетической категории. Решение этой задачи находится исключительно в компетенции специалистов-экспертов той области, к которой относится анализируемая СЛК.*

**Задача 2 (преданализ).** *Разработка определенной методики отбора из априорного перечня частных критериев  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , полученных в результате решения задачи 1, относительно небольшого числа частных критериев, играющих главную роль в формировании рейтинга объектов.*

вании значений анализируемого интегрального индикатора. Другими словами, речь идет о *методике формирования апостериорного набора частных критериев*  $x^{(j_1)}, x^{(j_2)}, \dots, x^{(j_{p'})}$ , отбираемых из априорного перечня показателей  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ . Подходы к решению этой задачи были описаны в п. 2.2, посвященном исходным данным.

**Задача 3 (преданализ).** Унификация измерительных шкал всех анализируемых переменных, т. е. переход к  $[0; N]$  — балльным шкалам в измерении рассматриваемых частных и интегральных критериев СЛК таким образом, чтобы значение «нуль» соответствовало самому низкому уровню качества СЛК, а значение  $N$  — самому высокому (размерность шкалы  $N$  выбирается исследователем). Решение этой задачи представлено ниже, см. п. 2.3.2.

**Задача 4 (центральная).** Разработка методики построения интегрального индикатора — измерителя анализируемой синтетической латентной категории (ИИ СЛК) в виде некоторой функции от  $x^{(j_1)}, x^{(j_2)}, \dots, x^{(j_{p'})}$  в каждой из двух возможных постановок задач:

- *вариант с обучением:* построение ИИ по значениям частных критериев  $x^{(j_1)}, x^{(j_2)}, \dots, x^{(j_{p'})}$  апостериорного набора и по некоторой (обучающей) экспертной информации о сравнении рассматриваемых объектов по анализируемой синтетической латентной категории (описание решения этого варианта центральной задачи см. в п. 2.3.3);
- *вариант без обучения:* построение ИИ *только* по значениям частных критериев  $x^{(j_1)}, x^{(j_2)}, \dots, x^{(j_{p'})}$  апостериорного набора (описание решения этого варианта центральной задачи см. в п. 2.3.4).

**Задача 5 (постанализ при наличии обучения).** Оценка согласованности двух ранжировок рассматриваемых объектов по анализируемой СЛК, одна из которых основана на имеющемся экспертном обучении, а другая — на значениях ИИ, построенного в результате решения задачи 4 (в любом из двух возможных вариантов).

**Задача 6 (постанализ).** Построение и анализ показателей авто- и межобъектной динамики ИИ, позволяющих сравнивать во времени анализируемое свойство объекта относительно себя самого («автодинамика») и относительно других объектов («межобъектная динамика»).

Подходы к решению задач 5 и 6 обсуждаются в п. 2.3.5.

### 2.3.2. Унификация шкал в измерениях частных и интегральных критериев (задача 3)

Перед тем, как переходить непосредственно к процедуре свертки частных критериев, необходимо привести все эти частные критерии к «об-

щему знаменателю», т. е. применить к каждому из них такое преобразование, в результате которого все они будут измеряться в  $N$ -балльной шкале. При этом нулевое значение преобразованного показателя должно соответствовать самому низкому качеству анализируемой СЛК, а максимальное ( $N$ ) — самому высокому.

*Конкретный выбор унифицирующего преобразования зависит от того, к какому из трех типов принадлежит анализируемый показатель.*

1) Если исходный показатель (частный критерий)  $x$  связан с анализируемым интегральным свойством *монотонно-возрастающей* зависимостью (т. е. чем больше значение  $x$ , тем выше качество), то значение соответствующей унифицированной переменной  $\tilde{x}$  подсчитывается по формуле

$$\tilde{x} = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot N, \quad (2.4)$$

где  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  — соответственно, — наименьшее (самое худшее) и наибольшее (самое лучшее) значения исходного показателя.

2) Если исходный показатель (частный критерий)  $x$  связан с анализируемым интегральным свойством *монотонно-убывающей* зависимостью (т. е. чем больше значение  $x$ , тем ниже качество), то значение соответствующей унифицированной переменной  $\tilde{x}$  подсчитывается по формуле

$$\tilde{x} = \frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot N. \quad (2.5)$$

3) Если исходный показатель (частный критерий)  $x$  связан с анализируемым интегральным свойством *немонотонной* зависимостью (т. е. между  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  существует некоторое оптимальное значение  $x_{\text{опт}}$ , при котором достигается наивысшее качество), то значение соответствующей *унифицированной* переменной  $\tilde{x}$  подсчитывается по формуле

$$\tilde{x} = \left( 1 - \frac{|x - x_{\text{опт.}}|}{\max\{(x_{\max} - x_{\text{опт.}}), (x_{\text{опт.}} - x_{\min})\}} \right) \cdot N. \quad (2.6)$$

Для реализации этих преобразований необходимо уметь определять для каждого анализируемого частного критерия  $x$  значения  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  и  $x_{\text{опт}}$ . Поскольку *теоретико-нормативный подход* в определении этих значений в большинстве случаев сопряжен с большими трудностями (и в частности, с необходимостью согласования различных точек зрения), то в данной работе предлагается использовать для этих целей *эмпирический подход*. В частности, за  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  предлагается принимать, соответственно, минимальное и максимальное значения среди всех наблюдаемых (по различным статистически обследованным объектам или за различные такты времени) значений этой переменной.

Вопрос с определением значений  $x_{\text{опт}}$  решается в каждом конкретном случае с учетом специфики ситуации.

Так, например, если мы располагаем обучением в форме экспертных балльных оценок или ранжирования рассматриваемых территорий по анализируемой синтетической категории, то в качестве  $x_{\text{опт}}$  можно рекомендовать использовать результат усреднения этого показателя по трем или пяти объектам, *отнесенным экспертами к лидирующим по анализируемой синтетической категории.*

**З а м е ч а н и я.** 1) Легко видеть, что первые две формулы, с помощью которых производится унификация измерительных шкал анализируемых показателей, являются частными случаями третьей, соответственно, при  $x_{\text{опт}} = x_{\text{max}}$  и  $x_{\text{опт}} = x_{\text{min}}$ . 2) Выбор диапазона шкалы ( $N$ ) находится в компетенции исследователя.

### 2.3.3. Построение ИИ СЛК при наличии обучения (экспертно-статистический метод)

1) Построение ИИ СЛК при балльной форме обучения (см. выше, форма (i), данные (2.3a)<sup>1</sup>. В этом случае задача построения ИИ СЛК сводится к статистическому оцениванию функции регрессии («свертки»)  $f(X)$  в модели (2.1) по исходным данным вида

$$(X_i; y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

т. е. к стандартной задаче регрессионного анализа. Так что, если мы ограничиваем свой поиск свертки рамками параметрического семейства  $\{(f(X; \Theta))\}$ , то

$$f(X; \hat{\Theta}) = \arg \min_{\Theta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^2 (y_{ij} - f(X_i; \Theta))^2, \quad (2.8)$$

где «взвешивающие» коэффициенты  $c_{ij}^2$  определяются двумя факторами:

- *сравнительной компетентностью экспертов (зависимость от  $j$ );*
- *сравнительной значимостью рассматриваемых объектов или сравнительной воспроизводимостью (точностью) экспертных оценок по каждому из объектов (зависимость от  $i$ ).*

<sup>1</sup>В целях упрощения обозначений здесь и в дальнейшем будем обозначать с помощью  $n$  общее число частных критериев в апостериорном наборе

Один из возможных приемов определения коэффициентов  $c_{ij}^2$  — это факторизация их значений с помощью произведения

$$c_{ij}^2 = \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{\cdot j}^2},$$

где

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{ij};$$

и

$$\sigma_{\cdot j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

Очевидно величина  $\sigma_i^2$  характеризует «размытость» в точности экспертной оценки  $i$ -го объекта, а значение  $\sigma_{\cdot j}^2$  — меру уклонения в оценках  $j$ -го эксперта от общего группового мнения.

В случае наличия единого (группового) варианта экспертного оценивания, т. е. при данных вида

$$(X_i; y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7')$$

искомый ИИ СЛК  $f(X; \hat{\Theta})$  будет определяться как решение задачи

$$f(X; \hat{\Theta}) = \arg \min_{\Theta} \sum_{i=1}^n c_i^2 (y_i - f(X_i; \Theta))^2, \quad (2.8')$$

где при отсутствии информации о сравнительной значимости рассматриваемых объектов полагают  $c_i^2 \equiv 1$ .

Программную реализацию решения задач (2.8) и (2.8'), осуществляемого с помощью обычного или обобщенного (взвешенного) метода наименьших квадратов, читатель может найти в любом из интегрированных статистических (эконометрических) пакетов программ (SPSS, Statistica, E-views и т.п.).

**З а м е ч а н и е о в ы б о р е о б щ е г о в и д а ИИ СЛК.** Выбор параметрического семейства  $\{f(X; \Theta)\}$ , как правило, не удается подкрепить строгим теоретическим обоснованием. Ведь *скалярная* характеристика анализируемого качества может и не существовать (см. выше, замечание в конце введения к гл. 2), так что в этом случае мы имеем дело с некоторой аппроксимацией, имеющей условный смысл в течение ограниченного промежутка времени и при определенных усло-

Тейлора, обычно ограничиваются линейной или квадратичной аппроксимацией искомой свертки, т. е.

$$f(X; \Theta) = \sum_{k=0}^p \theta_k x^{(k)} \quad (x^{(0)} \equiv 1)$$

или

$$f(X; \Theta) = \sum_{k=0}^p \theta_k x^{(k)} + \sum_{k,l=1}^p \theta_{kl} \cdot x^{(k)} x^{(l)}.$$

Заметим, что при конкретизации постановки задачи коэффициенты  $\theta_k$  и  $\theta_{kl}$  часто удается наполнить реальным социально-экономическим смыслом (см., например, [Слуцкий (1963)]).

2) Построение ИИ СЛК при наличии экспертных ранжировок объектов по анализируемой синтетической категории (см. выше, форма (ii), данные (2.36)). В этом случае мы располагаем данными вида

$$(X_i; R_{i1_s}, R_{i2_s}, \dots, R_{im_s}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $R_{ij_s}$  — ранг (место), присвоенный  $i$ -му объекту  $j$ -м экспертом в ряду из  $n$  обследованных объектов, упорядоченных им по анализируемой синтетической латентной категории (в порядке от лучшего к худшим). Если бы мы уже располагали ИИ СЛК в форме  $f(X; \Theta)$  (т. е. знали бы значение векторного параметра  $\Theta$ ), то подставляя в  $f(X; \Theta)$  значения  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и вычисляя соответствующие значения  $f_i = f(X_i; \Theta)$ , мы могли бы получить упорядочение рассматриваемых объектов по значениям  $f_i$ , т. е. ранги  $R_i(\Theta)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), которые, конечно, будут зависеть от значения параметров  $\Theta$ .

Но тогда мы можем вычислить согласованность этого упорядочения с упорядочением каждого ( $j$ -го) из экспертов с помощью, например, коэффициента ранговой корреляции Спирмена

$$r_j(\Theta) = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n (R_{ij_s} - R_i(\Theta))^2.$$

При наличии так называемых связных рангов следует воспользоваться соответствующей модификацией этой формулы, см., например, [Айвазян (2010)], п. 3.3.4.

Естественно было бы «настроить» значение параметров  $\Theta$  на имеющееся экспертное обучение, максимизировав согласованность ранжировки, основанной на ИИ СЛК  $f(X; \Theta)$ , с ранжировками экспертов.

Это можно сделать, например, решая одну из двух задач:

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} \sum_{j=1}^m c_j r_j(\Theta) \quad (2.9)$$

или

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} r(\Theta), \quad (2.9')$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — неотрицательные веса, пропорциональные степени компетентности привлеченных экспертов (в частном случае  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 1$ ), а  $r(\Theta)$  — коэффициент ранговой корреляции Спирмена между ранжировкой объектов, основанной на ИИ СЛК  $f(X; \Theta)$ , и единым (групповым) вариантом экспертного упорядочения тех же объектов.

Замечание о весовых коэффициентах  $c_k$ . В качестве одного из возможных способов определения весовых коэффициентов  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) можно рекомендовать метод, основанный на условной сравнительной оценке компетентности  $k$ -го эксперта с помощью значений коэффициентов конкордации (см., например, [Айвазян (2010)], п. 3.3.7)

$$W(m) = \frac{12}{m^2(n^3 - n)} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m R_{ij_s} - \frac{m(n+1)}{2} \right)^2$$

и

$$W_k(m-1) = \frac{12}{(m-1)^2(n^3 - n)} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^m R_{ij_s} - \frac{(m-1)(n+1)}{2} \right)^2.$$

Полагая, что чем больше возрастает коэффициент согласованности в ранжировках экспертов  $W$  при исключении из общей группы экспертов эксперта с номером  $k$  (т. е. чем больше разность  $W_k(m-1) - W(m)$ ), тем менее компетентен этот эксперт, значения  $c_k$  можно вычислить, например, по следующей формуле:

$$c_k = 1 - \frac{W_k(m-1) - W}{\sum_{j=1}^m (W_j(m-1) - W)}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$R^{(гр)} = (R_1^{(гр)}, R_2^{(гр)}, \dots, R_n^{(гр)})$  определяется как решение оптимизационной задачи

$$R_i^{(гр)} = \arg \min_{\tilde{R}_i} \sum_{j=1}^m |R_{ij_s} - \tilde{R}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Как известно, решение этой задачи дается *медианными* значениями ряда  $(R_{i1_s}, R_{i2_s}, \dots, R_{im_s})$ .

К сожалению, в плане вычислительной реализации задачи (2.9) и (2.9') весьма сложны и не имеют стандартного программного обеспечения. Избежать эти осложнения помогает некоторый специальный прием, с помощью которого обучение (ii) в форме (2.3б) сводится к обучению (iv) в форме (2.3г), после чего задача решается стандартными программно-алгоритмическими средствами *модели множественного упорядоченного выбора* (см. ниже, замечание к п. 4).

3) **Построение ИИ СЛК при наличии экспертных парных сравнений объектов по анализируемой синтетической категории (см. выше, форма (iii), данные (2.3в)).** В этом случае обучение предоставлено нам матрицами  $\Gamma_{\Theta}(j)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) парных сравнений объектов, и задача, при заданном общем виде функции свертки  $f(X; \Theta)$ , сводится к определению векторного параметра  $\hat{\Theta}$  из условия

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta} \sum_{j=1}^m c_j \|\Gamma(\theta) - \Gamma_{\Theta}(j)\|^2, \quad (2.10)$$

где  $\Gamma(\Theta)$  — матрица парных сравнений анализируемых объектов, полученных с помощью сравнения значений функций  $f(X_i; \Theta)$  и  $f(X_j; \Theta)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), весовые коэффициенты  $c_j$  имеют тот же смысл, что и в задаче (2.9), а с помощью  $\|A\|^2$  определена евклидова норма матрицы  $A$ . Существует разные подходы к решению задачи (2.10), см., например, «метод голосования», предложенный Ю.М. Журавлевым (см. [Айвазян и др. (1974)], § 3 из гл. 5), или метод, основанный на линейном программировании ([Киселев (1980)]). К сожалению, решение и этой задачи (так же, как и задачи (2.9)) не имеет стандартного программно-алгоритмического обеспечения в общедоступных пакетах программ. Поэтому и в этом случае целесообразно воспользоваться приемом сведения формы (iii) обучения к форме (iv), см. ниже, замечание к следующему пункту.

4) **Построение ИИ СЛК при наличии экспертного разбиения множества анализируемых объектов на определенное (как правило, небольшое) число  $k_0$  однородных и упорядоченных по СЛК групп (см. выше, форма (iv), данные (2.3г)).** В этом случае





модели), получаем следующее выражение для функции правдоподобия:

$$L(w_1, \dots, w_p; c_0, c_1, \dots, c_k) = \prod_{j=1}^k \prod_{\tilde{y}_i=j} (F(c_j - X'_i W) - F(c_{j-1} - X'_i W)) \quad (2.13)$$

(обычно, без ограничения общности, полагают:  $c_0 = -\infty$  и  $c_k = +\infty$ ).

Максимизируя правую часть (2.13) по  $w_1, \dots, w_p; c_0, c_1, \dots, c_k$ , получаем оценки  $\widehat{W}$  и  $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k$  для неизвестных параметров. Соответствующие вычислительные процедуры реализованы в стандартных пакетах программ (SPSS, E-views и др.) и подробно описаны, например, в [Greene (2000)].

**З а м е ч а н и е.** Как упомянуто выше, случаи (ii) и (iii) могут быть сведены к случаю (iv), что существенно облегчает задачу построения ИИ СЛК при ранжировках и парных сравнениях объектов, полученных от экспертов в качестве обучения. Поясним эту возможность подробнее.

И при обучении в форме (ii), и при обучении в форме (iii) каждый  $i$ -й объект может быть оснащен *характеристикой степени его предпочтительности*: в форме (ii) это средний ранг, полученный  $i$ -м объектом от экспертов (т.е.  $\bar{R}_i = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m R_{il\alpha}$ ), а в форме (iii) это среднее число случаев, в которых  $i$ -й объект оказался предпочтительнее при его парных сравнениях со всеми остальными  $(n - 1)$  объектами (т.е.  $\bar{\gamma}_i = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \gamma_{il.j\alpha}$ ). Переход к варианту (iv) разбиения объектов на сравнительно небольшое число  $k_0$  классов производится простым агрегированием объектов с относительно близкими значениями  $\bar{\gamma}_i$ , т.е. с помощью решения простой одномерной задачи кластер-анализа.

#### 2.3.4. Построение ИИ СЛК в условиях отсутствия обучения

В данной постановке задачи мы располагаем *только* унифицированными значениями частных критериев апостериорного набора

$$(\tilde{x}_i^{(1)}, \tilde{x}_i^{(2)}, \dots, \tilde{x}_i^{(p)}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2')$$

т.е. не имеем никакой информации о сравнении рассматриваемых объектов (территорий) по анализируемой синтетической категории (значения  $\tilde{x}_i^{(j)}$  получены из исходных данных (2.2) с помощью операций унификации, описанных в п. 2.3.2).

Возникает вопрос: **правомерно ли в такой ситуации ставить задачу измерения анализируемой латентной синтетической категории с помощью некоторой свертки частных критериев?**

*Условно положительный* ответ на этот вопрос основан на следующей логике:

- (а) Анализируемая синтетическая категория достаточно полно характеризуется унифицированными значениями частных критериев  $\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(p)}$  апостериорного набора.
- (б) Если мы хотим ограничиться только одним (т. е. скалярным) агрегированным показателем (**интегральным индикатором**) данной синтетической категории, то естественно искать такой показатель  $\hat{y}$ , который среди всех других интегральных показателей обладал бы следующим свойством: **среди всех скалярных переменных, характеризующих анализируемую латентную синтетическую категорию, именно по значениям этого показателя  $\hat{y}$  можно наиболее точно (в определенном смысле) восстановить значения всех частных критериев апостериорного набора, используя для этого соответствующие модели парной регрессии.**

А ведь если ограничить вид искомой свертки классом *линейных* функций (т. е. строить ИИ СЛК в форме  $\sum_{j=1}^p w_j \tilde{x}^{(j)}$ ), то именно таким свойством (б), как известно (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 13.2.5), обладает **первая главная компонента**, построенная по частным критериям (2.2') апостериорного набора!

Но возникает другой вопрос: **всегда ли достаточно одной наилучшей, в смысле свойства (б), свертки частных критериев для решения задачи восстановления значений всех частных критериев апостериорного набора по значениям этой свертки с удовлетворительной точностью, и если «нет», то какова минимальная размерность соответствующей мультикритериальной схемы? То есть если одной свертки мало, то сколько таких свертки и каким образом мы должны построить?**

Ведь возможны ситуации, когда не существует сколько-нибудь удовлетворительного решения задачи построения скалярного индикатора анализируемой СЛК. Подобные ситуации возникают, в частности, когда в составе рассматриваемого набора частных критериев имеется определенное количество взаимно слабо коррелированных переменных, хотя каждая из них вносит существенный вклад в описание и интерпретацию анализируемой синтетической категории. Тогда задача аппроксимации

мации (с приемлемой точностью) значений **всех** частных критериев по значению *единственного* скалярного индикатора может в принципе не иметь удовлетворительного решения, хотя скалярный индикатор в виде первой главной компоненты и является *сравнительно* наилучшим предиктором в данной аппроксимационной схеме.

И тогда возникает вопрос определения минимальной размерности  $k < p$  многокритериального пространства, в рамках которого возможно удовлетворительное решение задач рейтингования и типологизации объектов по анализируемой синтетической категории.

В данном пункте учебника предлагается подход к решению поставленных выше вопросов.

**З а м е ч а н и е.** Перед описанием предлагаемого подхода необходимо остановиться на двух достаточно общих недостатках, свойственных абсолютному большинству известных (и широко практикуемых в мире) методов построения интегральных измерителей синтетических латентных категорий.

(I) При построении *линейной* аппроксимации  $\hat{y} = \sum_{j=1}^p w_j \tilde{x}^{(j)}$  искомого

интегрального индикатора анализируемой синтетической латентной категории (ИИ СЛК), а именно *линейной* моделью ограничиваются в подавляющем большинстве случаев, весовые коэффициенты  $w_j$  определяются **методом прямой экспертной оценки**. Другими словами, эксперты в ходе той или иной процедуры согласования должны численно оценить относительную значимость каждого из частных критериев  $x^{(j)}$  в формировании значения ИИ (многочисленные примеры такого рода из мировой практики приведены, например, в [Айвазян (2012)], гл. 1). Между тем большое число экспериментальных исследований в экономике, социологии, психологии, педагогике подтверждает тот факт, что эксперты гораздо устойчивее и согласованнее умеют давать *интегральную* оценку объекту, чем раскладывать эту интегральную оценку по значимости составляющих ее компонентов (пример именно такой ситуации приведен ниже, см. п. 2.4.3).

(II) Практически во всех известных нам работах по данной тематике возможность объективно оправданного отсутствия удовлетворительного решения проблемы перехода от многокритериальной схемы (с частными критериями  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ ) к **однокритериальной** ( $y$ ) либо игнорируется вовсе, либо не ставится **задача** определения числа и вида *несколько* критериев

риев  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ , позволяющих существенно редуцировать размерность  $p$  исходной многокритериальной схемы (т. е.  $k \ll p$ ). Предлагаемый ниже метод построения ИИ СЛК лишен обоих этих недостатков.

**Общая логическая схема предлагаемого подхода** предусматривает *четыре основных этапа* исследования. На первом этапе решается вопрос определения минимальной размерности  $k$  пространства **интегральных индикаторов**, достаточной для восстановления (по значениям этих ИИ) с приемлемой точностью унифицированных значений всех частных критериев апостериорного набора. Используемый для решения этого вопроса критерий информативности основан на идеологии факторного анализа, в частности, на известных свойствах главных компонент. На втором этапе (который оказывается необходимым только в случае  $k > 1$ ) с помощью специальных методов анализа структуры корреляционных связей между частными критериями апостериорного набора этот набор разбивается на  $k$  поднаборов (блоков) таким образом, чтобы каждый из полученных поднаборов частных критериев служил информационной базой для построения одного из  $k$  искомым интегральных критериев. На третьем этапе частные критерии каждого из выявленных на предыдущем этапе поднаборов **линейно** сворачиваются таким образом, чтобы по полученной линейной свертке можно было наилучшим образом предсказать (в рамках линейной модели парной регрессии) значение каждого из частных критериев этого поднабора. Наконец, **четвертый этап** (который, так же как и второй, оказывается необходимым только в случае  $k > 1$ ) посвящен построению единого (сводного) интегрального индикатора в форме некоторой **нелинейной** свертки  $k$  индикаторов, построенных на предыдущем этапе.

Теперь опишем каждый из этапов подробнее.

**Этап 1. Определение числа интегральных индикаторов, необходимого для характеристики анализируемой синтетической категории.** Во-первых, уточним в каком именно смысле мы понимаем точность восстановления унифицированных значений частных критериев  $\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(p)}$  заданного апостериорного набора по значениям  $k$  ( $1 \leq k < p$ ) вспомогательных (интегральных) показателей  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}$ . С этой целью рассмотрим линейные регрессии вида

$$\tilde{x}^{(j)} = b_j(Y) \cdot Y + \varepsilon^{(j)}(Y), \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

где  $Y = (1, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)})'$ ,  $b_j(Y) = (b_{j,0}(Y), b_{j,1}(Y), \dots, b_{j,k}(Y))$  — коэффициент регрессии  $\tilde{x}^{(j)}$  по  $Y$ , а  $\varepsilon^{(j)}(Y)$  — остаток.

удовлетворяющие требованиям классических линейных моделей регрессии.

Мы говорим, что  $k$  интегральных индикаторов  $\tilde{Y} = (1; \tilde{y}^{(1)}, \dots, \tilde{y}^{(k)})'$  обеспечивают наилучшую точность восстановления значений  $p$  переменных  $\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(p)}$  ( $k < p$ ), если

$$\sum_{j=1}^p E(\tilde{x}^{(j)} - b_j(\tilde{Y}) \cdot \tilde{Y})^2 = \min_Y \sum_{j=1}^p E(\tilde{x}^{(j)} - b_j(Y) \cdot Y)^2. \quad (2.14)$$

Так вот, известно (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 13.2.5), что именно этим свойством обладают первые  $k$  главных компонент, построенных по переменным  $\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(p)}$  (т. е. переменные  $\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)}, \dots, \tilde{y}^{(k)}$  — это и есть первые  $k$  главных компонент), причем правая часть (2.14) может быть выражена в терминах отношения  $\left( \frac{\sum_{j=k+1}^p \lambda_j}{\sum_{j=1}^p \lambda_j} \right)$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  — собственные числа ковариационной матрицы  $\Sigma_{\tilde{X}}$  вектора  $\tilde{X} = (\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(p)})'$ , расположенные в порядке убывания (невозрастания).

Именно на этих фактах основан наш критерий определения минимального числа  $k$  интегральных индикаторов, необходимых для характеристики анализируемой синтетической категории. В частности, предлагается определить  $k$  из условия:

$$k = \min_{1 \leq m \leq p-1} \left\{ m : \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} \geq q_0 \right\}, \quad (2.15)$$

где  $q_0$  — некоторое число (большее 0,5), конкретное значение которого зависит от требуемой точности восстановления значений  $\tilde{X} = (\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(p)})'$  по значениям  $\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)}, \dots, \tilde{y}^{(k)}$  и от вида корреляционной матрицы вектора  $\tilde{X}$ . Эмпирическая реализация правила (2.15) требует:

- оценки  $\hat{\Sigma}_{\tilde{X}}$  матрицы  $\Sigma_{\tilde{X}}$  по наблюдениям (2.2'), т. е.

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}_i - \tilde{X})(\tilde{X}_i - \tilde{X})', \quad \text{где } \tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i;$$

- вычисления собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  матрицы  $\hat{\Sigma}_{\tilde{X}}$ , т. е. решения уравнения  $|\hat{\Sigma}_{\tilde{X}} - \lambda \mathbf{I}_p| = 0$ , где  $\mathbf{I}_p$  — единичная матрица

Заметим, что экспериментально установленный нами диапазон приемлемых значений критической константы  $q_0$  колебался от 0,55 до 0,60.

Если в результате реализации правила (2.15) оказалось, что  $k = 1$ , то приемлема схема редукции к **единственному** интегральному индикатору  $\tilde{y}^{(1)}$ , и тогда сразу переходят к завершающему (*в этой ситуации*) этапу 3. если же  $k > 1$ , то переходят к этапу 2.

**Э т а п 2. Разбиение анализируемого набора частных критериев на  $k$  непересекающихся блоков.** Как упоминалось выше, именно наличие в составе апостериорного набора слабо коррелированных между собой, но значимых для анализируемой синтетической латентной категории частных критериев, является причиной недостаточной информативности *единственного* интегрального индикатора, построенного на идеологии метода главных компонент. Напротив, первая главная компонента будет обладать высокой прогностической силой (в смысле (2.14)), если *она строится по тесно взаимнокоррелированным частным критериям*. Отсюда мы имеем следующее правило формирования блоков, на которые требуется разбить апостериорный набор частных критериев в случае слабой работоспособности *единственного* ИИ (т. е. при  $k > 1$ ): *принадлежность частных критериев к одному блоку должно определяться* двумя требованиями: они должны характеризовать какой-то один аспект анализируемой синтетической категории (например, реальные доходы и расходы в синтетической категории «Благосостояние населения», или социальную патологию в синтетической категории «Качество социальной сферы» и т. п., см., например структуризацию анализируемых синтетических категорий качества жизни населения, приведенную в [Айвазян (2012)], гл. 2) и, одновременно, иметь относительно высокий уровень взаимной коррелированности (как правило, но не всегда, последнее свойство является следствием первого требования).

Разбиение апостериорного набора частных критериев на такие группы (**блоки**) можно производить *чисто экспертно*, т. е. руководствуясь вышеупомянутыми содержательными соображениями. Однако полезной поддержкой в решении этой задачи может быть использование некоторого специального алгоритма, а именно — *процедуры экстраемальной группировки признаков* (см. [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 13.4.2). Эта процедура предназначена для такого разбиения рассматриваемой совокупности из  $p$  признаков на заданное число  $k$  ( $k < p$ ) непересекающихся блоков  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , при котором признаки, принадлежащие одному блоку, были бы относительно сильно коррелированы, в то время как переменные, принадлежащие разным блокам, коррелированы относительно слабо. Это требование формализуется в форме

задачи максимизации по  $S_1, S_2, \dots, S_k$  и  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$  критерия

$$F = \sum_{x^{(i)} \in S_1} r^2(x^{(i)}, f^{(1)}) + \sum_{x^{(i)} \in S_2} r^2(x^{(i)}, f^{(2)}) + \dots + \sum_{x^{(i)} \in S_k} r^2(x^{(i)}, f^{(k)}), \quad (2.16)$$

в котором под  $r(\xi, \eta)$  понимается обычный парный коэффициент корреляции между случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$ , а  $f^{(l)}$  — так называемый *общий фактор* для признаков  $l$ -го блока, т. е. такая переменная, которая максимизирует (при заданном составе  $l$ -го блока) величину  $\sum_{x^{(i)} \in S_l} r^2(x^{(i)}, f^{(l)})$ .

Можно показать, что  $f^{(l)}$  — это, с точностью до линейного преобразования, 1-я главная компонента  $p_l$  показателей  $l$ -го блока. А именно для заданного состава блока  $S_l$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ):

$$f^{(l)} = \frac{\sum_{x^{(i)} \in S_l} \alpha_i^{(l)} x^{(i)}}{\sqrt{\sum_{x^{(i)}, x^{(j)} \in S_l} \alpha_i^{(l)} \alpha_j^{(l)} r(x^{(i)}, x^{(j)})}}, \quad (2.17)$$

где  $\alpha^{(l)} = (\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)}, \dots, \alpha_{p_l}^{(l)})'$  — собственный вектор корреляционной матрицы  $\mathbf{R}^{(l)}$  показателей блока  $S_l$ , соответствующий максимальному собственному значению этой матрицы, т. е. компоненты вектора  $\alpha^{(l)}$  — это решение системы из  $p_l$  уравнений

$$(\mathbf{R}^{(l)} - \lambda_{\max}^{(l)} \cdot \mathbf{I}) \alpha^{(l)} = 0$$

( $p_l$  — число показателей, входящих в блок  $S_l$ ; очевидно  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = p$ ).

С другой стороны, при заданных факторах  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$  нетрудно построить разбиение  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , максимизирующее функционал (2.16), а именно:

$$S_l = \left\{ x^{(i)} : r^2(x^{(i)}, f^{(l)}) \geq r^2(x^{(i)}, f^{(q)}) \text{ для всех } q = 1, 2, \dots, k \right\}. \quad (2.18)$$

Соотношения (2.17) и (2.18) являются необходимыми условиями максимума функционала  $j$ . Поэтому для одновременного определения оптимального состава блоков  $S_1, S_2, \dots, S_k$  и оптимального набора факторов  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$  используется следующий итерационный алго-



пусть на  $v$ -м шаге итерации построено разбиение признаков  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$  на блоки  $S_1^{(v)}, S_2^{(v)}, \dots, S_k^{(v)}$ . Тогда для каждого блока признаков  $S_l^{(v)}$  строят факторы  $f_v^{(l)}$  по формуле (2.17) и новое разбиение  $S_1^{(v+1)}, \dots, S_k^{(v+1)}$  в соответствии с правилом (2.18), т. е. показатель  $x^{(i)}$  относится к блоку  $S_l^{(v+1)}$ , если

$$r^2(x^{(i)}, f_v^{(l)}) \geq r^2(x^{(i)}, f_v^{(q)}) \quad \text{для всех } q = 1, 2, \dots, k.$$

Очевидно, на каждом шаге итерации функционал  $F$  не убывает, поэтому данный алгоритм будет сходиться к максимуму (правда, максимум может оказаться *локальным*, поэтому желательна многократная прогонка алгоритма при разных начальных условиях).

**Э т а п 3. Построение блочных ИИ отдельно по частным критериям, входящим в каждый из блоков, определенных на предыдущем этапе.** Итак, мы добились того, что частные критерии, входящие в один блок, во-первых, характеризуют какой-то один аспект анализируемой синтетической латентной категории и, во-вторых, достаточно тесно взаимоскоррелированы. Теперь мы можем сформировать состав  $k$ -мерного критерия анализируемой синтетической латентной категории (в частном случае  $k = 1$  критерий оказывается одномерным, т. е. скалярным). Пусть

$$\tilde{X}_i(j) = (\tilde{x}_i^{(1)}(j), \tilde{x}_i^{(2)}(j), \dots, \tilde{x}_i^{(p_j)}(j))' \quad (2.19)$$

значения унифицированных частных критериев  $j$ -го блока ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), характеризующих  $i$ -й анализируемый объект ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Будем строить  $j$ -й интегральный индикатор ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) в форме *унифицированной* (или *модифицированной*, см. ниже) первой главной компоненты переменных (2.19). Для этого необходимо реализовать следующие вычислительные процедуры (последовательно для каждого  $j = 1, 2, \dots, k$ ):

1) Вычислим оценки  $\hat{\Sigma}_{\tilde{X}}(j)$  ковариационных матриц  $\Sigma_{\tilde{X}}(j)$  переменных (2.19)

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{X}}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}_i(j) - \bar{\tilde{X}}(j)) (\tilde{X}_i(j) - \bar{\tilde{X}}(j))',$$

$$\text{где } \bar{\tilde{X}}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i(j).$$

2) Определим собственные значения  $\lambda_1(j) \geq \lambda_2(j) \geq \dots \geq \lambda_{p_j}(j)$  матрицы  $\hat{\Sigma}_{\tilde{X}}(j)$ , т. е. решим уравнения вида

$$|\hat{\Sigma}_{\tilde{X}}(j) - \lambda \mathbf{I}_{p_j}| = 0. \quad \text{Разработка электронных библиотек}$$

3) Вычислим собственный вектор  $C_1(j) = (c_{11}(j), c_{12}(j), \dots, c_{1p_j}(j))'$ , соответствующий наибольшему собственному значению  $\lambda_1(j)$ , т. е. решим систему из  $p_j$  уравнений вида

$$\left( \widehat{\Sigma}_{\tilde{x}}(j) - \lambda_1(j) \mathbf{I}_{p_j} \right) C_1(j) = 0.$$

4) Построим **первую главную компоненту** частных критериев  $\tilde{x}^{(1)}(j), \tilde{x}^{(2)}(j), \dots, \tilde{x}^{(p_j)}(j)$   $j$ -го блока:

$$\hat{y}(j) = \sum_{s=1}^{p_j} c_{1s}(j) \cdot (\tilde{x}^{(s)}(j) - \bar{\tilde{x}}^{(s)}(j)), \quad \text{где} \quad \bar{\tilde{x}}^{(s)}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^{(s)}(j).$$

5) В целях унификации измерительных шкал (см. задачу 3 в п. 2.3.1) построим ИИ переменных  $j$ -го блока в форме:

$$y_i(j) = \sum_{s=1}^{p_j} \tilde{c}_{1s} \cdot \tilde{x}_i^{(s)}(j), \quad \text{где} \quad \tilde{c}_{1s} = c_{1s} / \sum_{s=1}^{p_j} c_{1s} \quad (2.20a)$$

если все коэффициенты  $c_{1s}$  ( $s = 1, 2, \dots, p_j$ ) одного знака, или

$$y_i(j) = \sum_{s=1}^{p_j} c_{1s}^2 \cdot \tilde{x}_i^{(s)}(j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.20б)$$

если знаки коэффициентов  $c_{1s}$  ( $s = 1, 2, \dots, p_j$ ) различаются.

**З а м е ч а н и е.** Напомним что, по построению, все частные критерии  $\tilde{x}^{(s)}(j)$  унифицированы, т. е. измерены в одной и той же  $[0, N]$  — шкале, в которой 0 соответствует наихудшему качеству, а  $N$  — наилучшему. Отсюда и из простого анализа формул (2.20a) и (2.20б), в частности, следует:

а) ИИ в форме (2.20a) также измерен в  $[0; N]$  — шкале, причем, он отличается от 1-й главной компоненты только простым линейным преобразованием. А значит, он не теряет свойства наивысшей прогностической силы в отношении всех частных критериев  $\tilde{x}^{(1)}(j), \tilde{x}^{(2)}(j), \dots, \tilde{x}^{(p_j)}(j)$  (см. выше формулу (2.14)).

б) Использование ИИ в форме (2.20a) в случае, когда коэффициенты  $c_{1s}$  оказываются «разнознаковыми» (хотя это бывает весьма редко при положительно взаимнокоррелированных частных критериях (2.19)), противоречило бы естественному требованию монотонно неотрицательной зависимости ИИ от частных критериев. Этим объясняется переход к форме (2.20б), которая, кроме того, обеспечивает унифицированность шкалы измерения  $y_i(j)$  (т.к.  $\sum_{s=1}^{p_j} c_{1s}^2 = 1$  в соответ-

компонент). Правда, строго говоря, при этом теряется свойство наивысшей прогностической силы ИИ в смысле (2.14). Однако наши исследования (основанные на вычислительном эксперименте) показали, что прогностическая точность ИИ снижается при этом не более чем на  $10 \sim 12\%$ .

Интегральный индикатор в форме (2.20а) и (2.20б) будем называть, соответственно, *унифицированной* и *модифицированной* первой главной компонентой частных критериев.

Итак, «на выходе» этапа 3 мы располагаем набором значений блочных интегральных индикаторов (или мультикритерием)

$$(y_i(1), y_i(2), \dots, y_i(k)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.21)$$

компоненты которого определяются по формулам (2.20а) или (2.20б). Еще раз отметим, что в случае  $k = 1$  этот мультикритерий сводится к скалярному (т. е. к однокритериальной схеме).

**Э т а п 4.** Построение единственного (сводного) ИИ, характеризующего анализируемую синтетическую латентную категорию. Этот этап необходим только в случае  $k > 1$ . По существу, речь идет о переходе на один, более высокий, уровень иерархии в общей схеме интегральных индикаторов (см. выше, рис. 2.1), когда для анализируемой синтетической категории, характеризующейся набором ИИ вида (2.21), требуется построить единый (сводный) измеритель.

Решение задачи основано на следующей идее. Будем использовать геометрический образ положения  $i$ -го анализируемого объекта в виде точки с координатами (2.21) в  $k$ -мерном пространстве интегральных индикаторов. С учетом того, что все интегральные индикаторы  $y(j)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) измеряются в  $N$ -балльной шкале по принципу «чем больше значение  $y(j)$ , тем выше качество», естественно оценить интегральный уровень  $i$ -го объекта ( $O_i$ ) по анализируемой синтетической категории расстоянием от точки с координатами (2.21) до «эталона» ( $\Theta$ ), который задается координатами  $(N, N, \dots, N)$ . На рис. 2.2 изображена эта схема для случая  $k = 2$ .

Остается ответить на два вопроса:

- как именно измерять расстояние в  $k$ -мерном пространстве интегральных индикаторов  $y_i(1), y_i(2), \dots, y_i(k)$ ?
- как по расстоянию  $\rho_i = \rho(O_i; \Theta)$  определить сводный ИИ — скалярный измеритель анализируемой синтетической латентной категории?

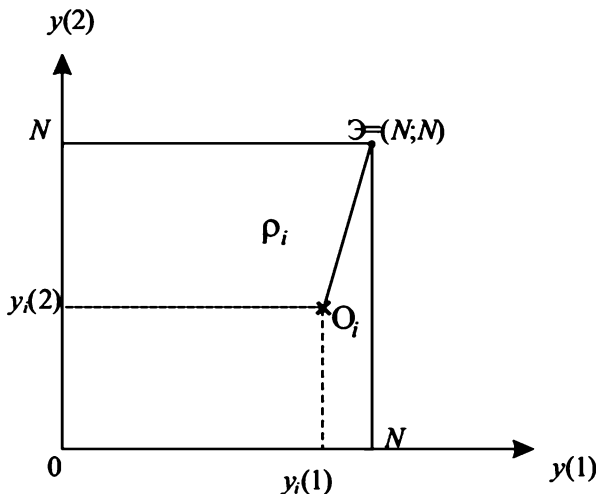


Рис. 2.2. Расположение объекта  $O_i$  относительно эталона  $\Xi$

Для измерения расстояний в пространстве  $(y(1), y(2), \dots, y(k))$  предлагается использовать *взвешенную евклидову метрику*, в которой веса, продолжая следовать идеологии метода главных компонент (в соответствии с которой *информативность показателя тем выше, чем выше его вариабельность*), мы определяем пропорционально разбросу данных (дисперсии  $s^2(j)$ ) по каждой из осей  $y(j)$  и числу частных критериев  $k_j$ , входящих в состав  $j$ -го блока ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Итак:

$$\rho_i^2 = \sum_{j=1}^k q(j) \cdot (y_i(j) - N)^2, \quad (2.22)$$

где  $q(j) = \frac{p_j \cdot s^2(j)}{\sum_{l=1}^k p_l \cdot s^2(l)}$ ,  $s^2(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i(j) - \bar{y}(j))^2$ , а  $\bar{y}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(j)$ .

Теперь мы можем определить значение  $\hat{y}_i$  единого (сводного) интегрального индикатора анализируемой синтетической категории для объекта (территории)  $O_i$ :

$$\hat{y}_i = N - \rho_i. \quad (2.23)$$

Очевидно, определенный таким образом сводный ИИ  $\hat{y}$  уже не является **линейной** сверткой частных критериев и будет измеряться в той же  $[0; N]$  — унифицированной шкале, что и все другие частные критерии и интегральные индикаторы.

Отметим, что использование в задаче построения сводного ИИ по блочным ИИ *той же техники метода главных компонент*, которая была применена при построении каждого блочного ИИ, как правило, не приносит успеха в силу «разнонаправленности» действия (а следовательно, *слабой взаимной коррелированности*) блочных интегральных



ния (ранга) в ряду других рассматриваемых объектов, т. е. на величину

$$\delta_i(t) = R(y_i(t-1)) - R(y_i(t)),$$

где  $R(y_i(t))$  — ранг  $i$ -го объекта в рейтинге объектов, построенном в соответствии со значениями  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ . Очевидно, положительные значения  $\delta_i(t)$  будут свидетельствовать о положительной межобъектной динамике объекта  $i$ .

## 2.4. Примеры построения интегральных индикаторов — измерителей качества анализируемых синтетических латентных категорий

Первые два из представленных ниже примеров относятся к проблематике измерения различных СЛК *качества жизни населения (КЖН)*. Они заимствованы из [Айвазян (2012)]. В частности, в них на статистических данных по странам (в п. 2.4.1) и по субъектам Российской Федерации (в п. 2.4.2) представлены конкретные иллюстрации решения основных задач методологии измерения синтетических категорий качества жизни населения (см. выше, п. 2.3.1), а именно:

- задачи отбора из априорного перечня частных критериев  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$  редуцированного (апостериорного) набора показателей  $x^{(j_1)}, x^{(j_2)}, \dots, x^{(j_{p'})}$ , где  $p' < p$  (задача 2 преданализа);
- задачи унификации измерительных шкал всех анализируемых переменных, т. е. такого перехода к  $N$ -балльным шкалам, при котором значение нуль свидетельствовало бы о наихудшем качестве по анализируемой переменной, а значение  $N$  — о наилучшем (задача 3 преданализа);
- задачи перехода от  $p'$  частных критериев  $x^{(j_1)}, x^{(j_2)}, \dots, x^{(j_{p'})}$  к одному ( $y$ ) или сравнительно небольшому числу ( $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ ) интегральных индикаторов ( $k \ll p'$ ), в которой последние строятся в форме некоторых функций (сверток) от  $p'$  частных критериев апостериорного набора (задача 4 — центральная задача методики);
- наконец, задач *постанализа*, в которых анализируется работоспособность построенных ИИ КЖ и их динамика (задачи 5

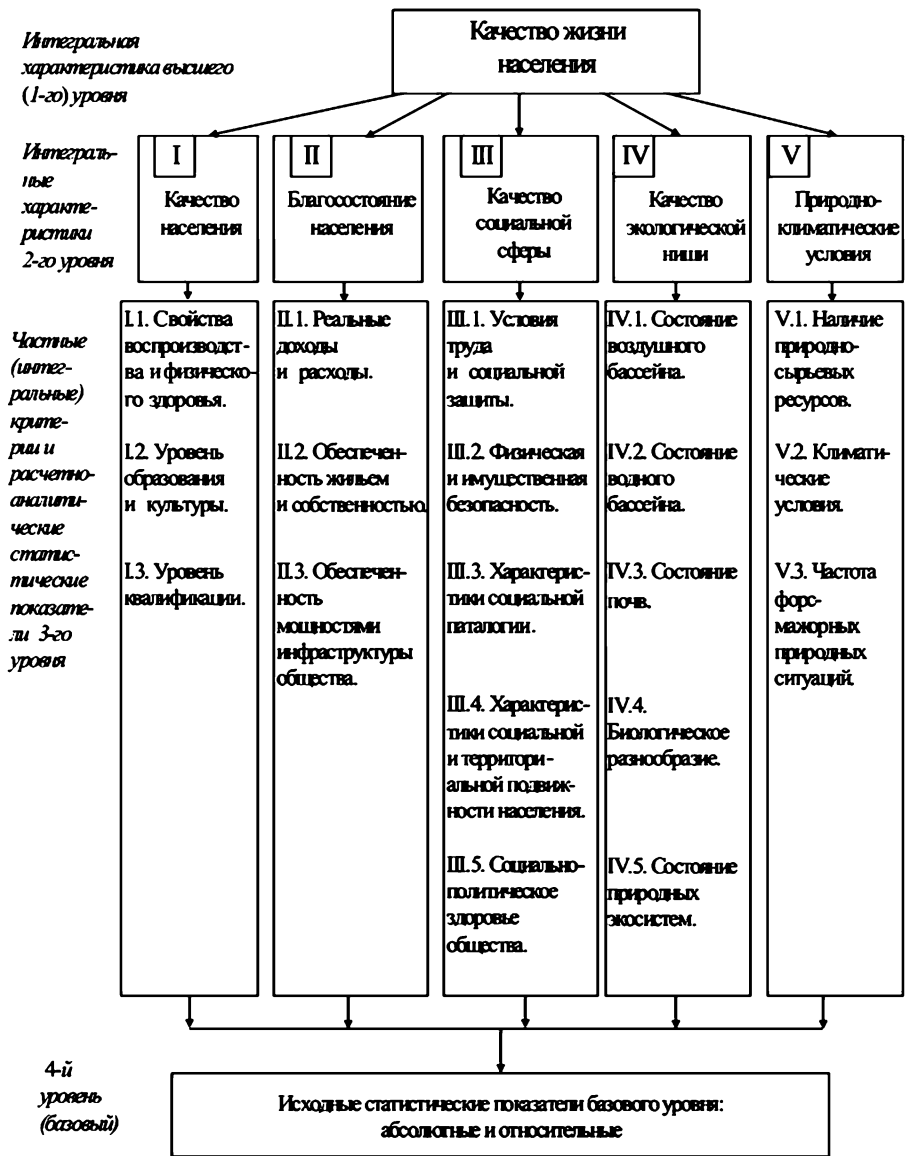
Что касается **содержательных** целей представленных в п. 2.4.1 и 2.4.2 эмпирических исследований КЖН, то они ограничены **рейтингованием** рассматриваемых территорий (стран, субъектов РФ) но анализируемой синтетической категории КЖ.

Наконец, в п. 2.4.3 описан один из самых первых опытов эмпирического анализа СЛК. Этот пример датируется 1973-м (!) годом и не относится прямо к социально-экономической тематике. В нем речь идет об оценке *уровня мастерства спортсмена командного вида спорта*, проявленного им в отдельном матче или в серии матчей в рамках определенных соревнований. Да и с точки зрения методологии построения ИИ читатель не обнаружит здесь ничего нового (обучение в данном примере имеет форму балльных экспертных оценок). Однако этот пример выделяется *чистотой эксперимента* (высокой квалификацией и независимостью экспертов) и *очевидной прикладной дееспособностью*. Именно поэтому мы посчитали целесообразным включить его в учебник. Так же, как и предыдущие два примера, этот пример относится к личному опыту прикладной деятельности одного из авторов учебника и заимствован из [Айвазян (1974)].

#### 2.4.1. **Межстрановой эмпирический анализ синтетической категории «Качество жизни населения» по данным 2009 г.**

**Цель данного исследования** — рейтингование ряда статистически обследованных стран по синтетической категории «Качество жизни населения» наивысшего уровня общности (см. «*интегральную характеристику высшего уровня*» на рис. 2.3). При этом рейтингование будет основано на значениях ИИ, построенных в форме линейных сверток частных критериев параллельно в двух вариантах: **с обучением и без него**.

**Информационная база исследования.** Исходные статистические данные заимствованы из ежегодника [WCY (2009)]. Эти ежегодники включают в себя макроэкономические данные по ряду стран мира (общее число статистически обследованных стран, так же как количество и состав показателей, претерпевают некоторые изменения во времени), структурированные по блокам и разделам, и содержат значения порядка 300 показателей, в том числе *более 100 показателей, оцененных экспертно* (см. краткое описание структуры и содержания информации, включаемой в ежегодники WCY в Приложении П2.1 к [Айвазян



**Рис. 2.3.** Иерархическая система статистических показателей, частных критериев и интегральных индикаторов качества жизни населения страны (региона)

**Априорный набор частных критериев качества жизни населения страны формировался с учетом требований (А)-(Б)-(В) и п. а) параграфа 2.2 на базе источника [WCY (2009)] и содержал статистические показатели, характеризующие все четыре базисные синтетические категории: «Качество населения» (ожидаемая при рождении продолжительность жизни — переменная  $x^{(7)}$  или 4.4.05 в кодировке [WCY (2009)]; доля неграмотных среди населения старше 15 лет —  $x^{(4)}$  или 4.5.14; младенческая смертность —  $x^{(8)}$  или 4.4.07); «Уровень благосостояния» (ВВП на душу в долларах США с учетом паритета покупательной способности (ППС) — переменная  $x^{(1)}$  или 1.1.22 в кодировке [WCY (2009)]; расходы на личное потребление на душу в**



долларах США с учетом ППС —  $x^{(3)}$  или 1.1.23; *индекс потребительских цен в %* —  $x^{(6)}$  или 1.5.01; *производительность труда в долларах США* —  $x^{(2)}$  или 3.1.04); «**Качество социальной сферы**» (20%-ный коэффициент фондов, т. е. отношение суммарных доходов 20% богатейшего населения страны к суммарным доходам 20% беднейшего населения — переменная  $x^{(5)}$  или отношение переменной 2.5.07 к переменной 2.5.06 в кодировке [WCY (2009)]; *общие расходы на НИОКР в % к ВВП* —  $x^{(10)}$  или 4.3.02) и «**Качество экологической ниши**» (суммарные выбросы в атмосферу  $CO_2$  в метрических тоннах, приходящиеся на один миллион долларов ВВП — переменная  $x^{(9)}$  или 4.4.17 в кодировке [WCY (2009)]). Перечень и индексация частных критериев априорного набора приведены в табл. 2.1. Ограничение априорного набора частных критериев *всего десятью показателями* продиктовано соображениями оптимальности соотношения числа  $n$  статистически обследованных объектов (стран) и числа  $p$  переменных, участвующих в модели ИИ, оцениваемой либо (в условиях наличия обучения) с помощью линейной регрессии экспертной оценки КЖ  $y_i$ , по какому-то подмножеству частных критериев ( $x_i^{(j_1)}, x_i^{(j_2)}, \dots, x_i^{(j_{p'})}$ ), либо в форме модифицированной 1-й главной компоненты всех десяти упомянутых частных критериев  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(10)}$  (в варианте построения ИИ *без обучения*).

**Таблица 2.1.** Априорный набор частных критериев синтетической категории «Качество жизни» в межстрановом анализе (по данным [WCY (2009)])\*)

NN пп.	Переменная (частный критерий): наименование и единицы измерения	Обозначение	Код по [WCY (2009)]	Формула унифицирующего преобразования
1	2	3	4	5
1	ВВП на душу с учетом паритета покупательной способности (доллары США)	$x^{(1)}$	1.1.22	(2.4)
2	Производительность труда (доллары США)	$x^{(2)}$	3.1.04	(2.4)
3	Расходы на личное потребление на душу (доллары США)	$x^{(3)}$	1.1.23	(2.4)
4	Доля неграмотных среди населения старше 15 лет (%)	$x^{(4)}$	4.5.14	(2.5)
5	20%-ный коэффициент фондов (в разгах)**)	$x^{(5)}$	$\frac{2.5.07}{2.5.06}$	(2.6)

Таблица 2.1 (окончание)

1	2	3	4	5
6	Индекс потребительских цен (%)	$x^{(6)}$	1.5.01	(2.5)
7	Ожидаемая (при рождении) продолжительность жизни (лет)	$x^{(7)}$	4.4.05	(2.4)
8	Младенческая смертность: среднее число умерших в возрасте до 1 года, приходящееся на 1000 родившихся	$x^{(8)}$	4.4.07	(2.5)
9	Выбросы CO <sub>2</sub> (метрич. тонны на 1 млн долл. ВВП)	$x^{(9)}$	4.4.17	(2.5)
10	Общие расходы на НИОКР (в % к ВВП)	$x^{(10)}$	4.3.02	(2.6)

\*) По некоторым показателям в [WCY (2009)] приведены лишь *лагированные* (на 1~2 года) значения.

\*\*) 20%-ный коэффициент фондов вычисляется как отношение суммарных доходов 20% богатейшего населения к суммарным доходам 20% беднейшего населения.

Отметим, что в соответствии с рекомендациями п. 2.3.2 была проведена **унификация измерительных шкал** анализируемых переменных. Она была осуществлена по формулам (2.4)~(2.6) при  $N = 10$ , т. е. все переменные оказываются измеренными в **десятибалльной шкале** таким образом, что нулевое значение унифицированного показателя свидетельствует о наихудшем качестве, а оценка в 10 баллов — о наилучшем. Параметры, необходимые для унификации, приведены в табл. 2.2, а исходные и унифицированные значения анализируемых переменных — в Приложении П1.

Таблица 2.2. Данные, используемые при унификации измерительных шкал

NN пп (j)	Частный критерий $x^{(j)}$ (код)	$x_{\min}^{(j)}$	$x_{\max}^{(j)}$	$x_{\max}^{(j)} - x_{\min}^{(j)}$	$x_{\text{опт}}^{(j)*}$	Формула унифицирующего преобразования
1	2	3	4	5	6	7
1	$x^{(1)}$ (1.1.22)	3400,00	56 000	52 600,0	56 000,0	(2.2)
2	$x^{(2)}$ (3.1.04)	4,09	59,45	55,36	59,45	(2.2)
3	$x^{(3)}$ (1.1.23)	928,0	37 219,0	36 291,0	37 219,0	(2.2)
4	$x^{(4)}$ (4.5.14)	1,00	12,0	11,0	1,0	(2.3)
5	$x^{(5)}$ ( $\frac{2.5.07}{2.5.06}$ )	3,37	18,50	15,13	5,00	(2.4)
6	$x^{(6)}$ (1.5.01)	1,40	19,0	17,6	1,4	(2.3)
7	$x^{(7)}$ (4.4.05)	60,00	83,0	23,0	83,0	(2.2)



**Таблица 2.3.** Корреляционная матрица унифицированных частных критериев\*

	$\tilde{x}^{(1)}$	$\tilde{x}^{(2)}$	$\tilde{x}^{(3)}$	$\tilde{x}^{(4)}$	$\tilde{x}^{(5)}$	$\tilde{x}^{(6)}$	$\tilde{x}^{(7)}$	$\tilde{x}^{(8)}$	$\tilde{x}^{(9)}$	$\tilde{x}^{(10)}$
$\tilde{x}^{(1)}$	1	0,93	0,83	0,45	0,39	0,52	0,76	0,72	0,58	0,63
$\tilde{x}^{(2)}$		1	0,89	0,56	0,46	0,61	0,77	0,74	0,63	0,66
$\tilde{x}^{(3)}$			1	0,57	0,32	0,60	0,74	0,64	0,61	0,62
$\tilde{x}^{(4)}$				1	0,62	0,35	0,47	0,70	0,18	0,46
$\tilde{x}^{(5)}$					1	0,21	0,31	0,48	0,05	0,37
$\tilde{x}^{(6)}$						1	0,73	0,61	0,69	0,52
$\tilde{x}^{(7)}$							1	0,80	0,74	0,52
$\tilde{x}^{(8)}$								1	0,54	0,54
$\tilde{x}^{(9)}$									1	0,32
$\tilde{x}^{(10)}$										1

\*) На пересечении строки  $\tilde{x}^{(i)}$  и столбца  $\tilde{x}^{(j)}$  приведено значение коэффициента корреляции между  $\tilde{x}^{(i)}$  и  $\tilde{x}^{(j)}$ .

С этой целью была применена *методика отбора наиболее существенных частных критериев «в условиях наличия обучения»*, описанная в п. 2.2, пп. а). В частности, по извлеченным из [WCY (2009)] исходным данным (обозначения табл. 2.1)

$$\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(10)}; y_i\right), \quad i = 1, \dots, 56,^4$$

были реализованы пошаговые процедуры отбора наиболее информативных объясняющих переменных в линейной модели регрессии, а именно процедуры «последовательного присоединения» и «последовательного удаления». Ход процедуры «последовательного присоединения» отражен в табл. 2.5. Добавим к этому, что процедура «последовательного удаления», примененная к тому же набору предикторов  $\tilde{x}^{(3)} \sim \tilde{x}^{(10)}$ , дала точно такой же результат.

Почему из априорного набора частных критериев были исключены переменные  $\tilde{x}^{(1)}$  (ВВП на душу) и  $\tilde{x}^{(2)}$  (производительность труда)? Это было сделано по двум причинам.

<sup>4</sup>Объектом анализа являются 56 стран из 60 стран и регионов, включенных в ежегодник WCY (2009) (см. Приложение П2.3). Ряд стран и регионов не были включены в наше исследование либо из-за пропусков в исходных данных, либо из-за того, что они не представляли страну в целом.



**Причина первая.** Эти переменные высоко коррелированы между собой (коэффициент корреляции  $r(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}) = 0,93$ , см. табл. 2.3), и каждая из них тесно коррелирована с переменной  $\tilde{x}^{(3)}$  — расходами на личное потребление ( $r(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(3)}) = 0,83$ ;  $r(\tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) = 0,89$ ). Поэтому одновременное включение всех трех переменных (или даже только двух из них) в качестве предикторов в анализируемую модель регрессии приводило к плохо интерпретируемым результатам, давая при этом минимальный выигрыш в значении коэффициента детерминации зависимой переменной  $y_3$  по *всему* набору частных критериев (приращение  $R^2$  составляло величину порядка 0,045, которая не может быть квалифицирована как статистически значимая при числе наблюдений  $n = 56$  и числе оцениваемых параметров, равном  $p + 1 = 11$ ).

**Причина вторая.** Зададимся вопросом: *так ли бесспорно важен валовый внутренний доход страны как характеристика качества жизни ее населения?* В ряде исследований (см., например, [Сен (2004)], [Айвазян (2008)]) приводятся убедительные примеры ситуаций, в которых ВВП не мог квалифицироваться как детерминанта качества населения. В этой связи, я думаю, уместно привести здесь некоторые фрагменты из доклада авторитетнейшей международной «Комиссии по оценке экономических результатов и социального прогресса», возглавляемой лауреатами Нобелевских премий *Джозефом Стиглицем и Амартией Сеном* (см. [Доклад (2010–2011)]):

1) (Из «Введения» к гл. 1) «...Он (ВВП) представляет собой механизм для измерения прежде всего совокупного предложения, а не уровня жизни граждан. Хотя величина ВВП взаимосвязана со многими показателями уровня жизни, корреляция не носит всеобъемлющего характера и значительно ослабевает, когда речь идет об отдельных секторах экономики. Например, изменение реального дохода домашних хозяйств (меры дохода, наиболее тесно связанной с уровнем жизни) в ряде стран ОЭСР весьма отличалось от роста ВВП. Слишком большой упор на ВВП как эталонную меру может привести к ложным представлениям о благосостоянии людей и повысить риск принятия ошибочных политических решений».

2) (Из п. 4 гл. 1) «Большая часть общественных дискуссий об уровне жизни сосредоточена на показателях экономики в целом, и чаще всего на ВВП. Но конечной целью дискуссий об уровне жизни являются индивидуумы, чье экономическое положение нужно оценивать. Взгляд на эволюцию реального дохода домашних хозяйств и изменение объема ВВП подтверждает, что, в общем, эти показатели плохо заменяют друг друга. Несмотря на то что в некоторых странах реальный располагаемый доход домашних хозяйств хорошо коррелирует с ростом объемов

Польша, Словакия, Германия — вот только некоторые из них».

Итак, при построении ИИ КЖ населения страны в ситуации, когда мы можем использовать экспертные оценки  $y_i$ , КЖ для каждой из анализируемых стран в качестве обучения, мы приходим к задаче оценивания линейной регрессии  $y_i$  по:

- расходам на личное потребление на душу ( $\tilde{x}^{(3)}$ );
- ожидаемой (при рождении) продолжительности жизни ( $\tilde{x}^{(7)}$ );
- общим расходам на НИОКР ( $\tilde{x}^{(10)}$ ).

Результаты оценивания этой модели регрессии: значение оценок коэффициентов регрессии  $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  и  $\hat{\theta}_3$ , стандартных ошибок  $s_{\hat{\theta}_j}$  в оценивании этих коэффициентов, значения  $t$ -статистик ( $t_j, -j = 0, 1, 2, 3, 4$ ), вероятности  $P_j$  статистической незначимости  $j$ -го предиктора, подправленного коэффициента детерминации ( $R_{adj}^2$ ) и статистики Дарбина – Уотсона (DW), — приведены в табл. 2.6.

Таким образом, значение ИИ КЖН страны  $i$  ( $\hat{y}_i(\text{об})$ ), построенное и вычисленное с использованием обучения, имеет вид:

$$\hat{y}_i(\text{об}) = 2,418 + 0,228\tilde{x}_i^{(3)} + 0,308\tilde{x}_i^{(7)} + 0,216\tilde{x}_i^{(10)}.$$

В Приложении П1в приведены значения  $\hat{y}_i(\text{об})$  для всех анализируемых стран (т. е. для  $i = 1, 2, \dots, 56$ ), соответствующие рейтинги этих стран, определенные по значениям  $\hat{y}_i(\text{об})$ , и мера согласованности (коэффициент ранговой корреляции Спирмена  $\rho(\hat{y}(\text{об}); y_э)$ ) рейтингования стран по  $\hat{y}_i(\text{об})$  и по  $y_i$ . Отметим, что значение последней характеристики ( $\rho(\hat{y}(\text{об}); y_э) = 0,855$ ) свидетельствует о хорошей согласованности ранжировки стран по значениям  $\hat{y}_i(\text{об})$  с экспертной ранжировкой, а следовательно, о высокой информативности выбранных трех частных критериев ( $\tilde{x}^{(3)}, \tilde{x}^{(7)}$  и  $\tilde{x}^{(10)}$ ) в задаче формализации критериальных установок экспертов при ранжировании стран по КЖ!

**Таблица 2.6.** Результаты статистического оценивания регрессии  $y_i$  по ( $\tilde{x}^{(3)}, \tilde{x}^{(7)}, \tilde{x}^{(10)}$ )  $R_{adj}^2 = 0,675; DW = 2,14.$

№№ п.п. ( $j$ )	Предиктор (частный критерий)	Оценка коэффициента регрессии $\hat{\theta}_j$	Стандартная ошибка оценки $s_{\hat{\theta}_j}$	$t$ -статистика $t_j$	Значение $P_j$
0	Свободный член	2,418	0,584	4,142	0,00013
1	Личное потребление ( $\tilde{x}^{(3)}$ )	0,228	0,084	2,720	0,00886
2	Продолжит. жизни ( $\tilde{x}^{(7)}$ )	0,308	0,105	2,925	0,00510
3	Расходы на НИОКР ( $\tilde{x}^{(10)}$ )	0,216	0,074	2,911	0,00529

### Построение ИИ КЖ в условиях отсутствия обучения

Получение от экспертов, в том или ином виде, оценок анализируемых синтетических латентных категорий для каждого из рассматриваемых объектов (стран, регионов, конгломерата населения) — *дело затратное и не всегда практически реализуемое*. Это обуславливает актуальность задачи построения ИИ КЖ *только по имеющимся значениям ряда частных критериев КЖ*, т.е. **в условиях отсутствия обучения**. Ниже описан пример решения такой задачи на тех же данных, которые приведены в Приложении 1, но только без информации о значениях  $y_1, y_2, \dots, y_{56}$ . При этом мы руководствуемся методикой и рекомендациями, изложенными в п. 2.3.4.

Учитывая то обстоятельство, что априорный набор частных критериев сам по себе невелик (он содержит всего 10 показателей, о причинах сказано выше), мы не стали его редуцировать, переходя к апостериорному набору (что было сделано при построении  $\hat{y}$  (об) в рамках соответствующей модели регрессии в целях устранения мультиколлинеарности).

**Результаты анализа главных компонент** априорного набора частных критериев КЖ приведены в табл. 2.7 и 2.8.

Результаты, представленные в табл. 2.7, свидетельствуют: в задаче межстранового анализа КЖ по данным [WCY (2009)] при построении ИИ КЖ *в условиях отсутствия обучения можно ограничиться одним интегральным индикатором* (см. правило (2.15) в п. 2.3.4 при пороговом значении  $q_0 = 0,55$ ).

**Таблица 2.7.** Собственные значения ковариационной матрицы унифицированных показателей  $\tilde{x}^{(1)} \sim \tilde{x}^{(10)}$  и процент их общей вариации, объясненной первыми  $j$  главными компонентами

Номер главной компоненты ( $j$ )	Собственные значения ( $\lambda_j$ )	% вариации, объясненной $j$ -й главной компонентой	Накопленный % объясненной вариации
1	43,38	61,7	61,70
2	10,09	14,4	76,06
3	4,61	6,6	82,62
4	3,58	5,1	87,71
5	3,42	4,9	92,58
6	2,33	3,3	95,90
7	1,20	1,7	97,60
8	0,80	1,1	98,74
9	0,55	0,8	99,53
10	0,33	0,5	100,00



**Таблица 2.8.** Первый собственный вектор ковариационной матрицы унифицированных показателей  $\tilde{x}^{(1)} \sim \tilde{x}^{(10)}$  и весовые коэффициенты  $w_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 10$ ) для ИИ КЖ

Номер частного критерия ( $j$ )	Частные критерии ( $\tilde{x}^{(j)}$ )	Компоненты 1-го собственного вектора ( $c_j$ )	Нормированные компоненты 1-го собственного вектора ( $w_j$ )
1	ВВП на душу ( $\tilde{x}^{(1)}$ )	0,356	0,114
2	Производительность ( $\tilde{x}^{(2)}$ )	0,373	0,120
3	Личное потребление ( $\tilde{x}^{(3)}$ )	0,400	0,128
4	Доля неграмотных ( $\tilde{x}^{(4)}$ )	0,315	0,101
5	Коэффициент фондов ( $\tilde{x}^{(5)}$ )	0,240	0,077
6	Индекс потребительских цен ( $\tilde{x}^{(6)}$ )	0,257	0,083
7	Продолжительность жизни ( $\tilde{x}^{(7)}$ )	0,284	0,092
8	Младенческая смертность ( $\tilde{x}^{(8)}$ )	0,361	0,116
9	Выбросы CO <sub>2</sub> ( $\tilde{x}^{(9)}$ )	0,232	0,074
10	Расходы на НИОКР ( $\tilde{x}^{(10)}$ )	0,293	0,095

Поскольку все компоненты 1-го собственного вектора оказались одного знака, нормировка коэффициентов  $c_j$  произведена по формуле (2.20а), имея в виду, что в данном случае мы не разбиваем наш набор частных критериев на блоки.

Таким образом, значение ИИ КЖН страны  $i$  ( $\hat{y}_i(\text{б.о.})$ ), построенное и вычисленное в условиях отсутствия обучения, имеет вид так называемой унифицированной первой главной компоненты, а именно:

$$\hat{y}_i(\text{б.о.}) = \sum_{j=1}^{10} w_j \tilde{x}_i^{(j)},$$

где значения коэффициентов  $w_1, w_2, \dots, w_{10}$  представлены в последнем столбце табл. 2.8.

В Приложении П1в приведены значения  $\hat{y}_i(\text{б.о.})$  для всех анализируемых стран (т. е. для  $i = 1, 2, \dots, 56$ ), соответствующие рейтинги этих стран, определенные по значениям  $\hat{y}_i(\text{б.о.})$ , и мера согласованности (коэффициент ранговой корреляции Спирмена  $\rho(\hat{y}_i(\text{б.о.}); y_s)$ ) рейтингования стран по  $\hat{y}_i(\text{б.о.})$  и по  $y_s$ . Отметим, что значение последней характеристики ( $\rho(\hat{y}(\text{б.о.}); y_s) = 0,852$ ) свидетельствует: интегральный индикатор  $\hat{y}_i(\text{б.о.})$ , построенный без обучения по десяти частным критериям КЖН, дает практически столь же хорошее согласие с экспертной

ранжировкой стран, что и интегральный индикатор  $\hat{y}$  (об), построенный *при наличии обучения* по наиболее информативным трем частным критериям КЖ.

Так что анализ дееспособности построенных ИИ КЖ (с обучением и без него) базируется на сравнении и оценке согласованности ранжирований стран, полученных на основании экспертных оценок  $y_{i\alpha}$  качества жизни, с одной стороны, и на основании значений ИИ КЖ, — с другой.

#### 2.4.2. Межрегиональный сравнительный анализ латентных синтетических категорий КЖ населения субъектов РФ по данным 2003 г.

В данном примере целью эмпирического исследования является сравнительный анализ 78 субъектов Российской Федерации по четырем базисным синтетическим категориям — «Качеству населения (КН)», «Уровню благосостояния (УБ)», «Качеству социальной сферы (КСС)» и «Качеству экологической ниши (КЭН)», — а также по синтетической категории наивысшего уровня общности — «Качеству жизни» на базе официальных статистических данных 2003 г. Для достижения этой цели используется *техника построения ИИ КЖ в условиях отсутствия обучения*, описанная в п. 2.3.4.

**Информационная база исследования** формировалась из источников, перечень которых приведен в «Списке литературы» (см. соответствующие источники в разделе «Информационные материалы») <sup>5</sup>. Принятый в ней такт времени — один год. Описанному ниже эконометрическому анализу подверглись данные, датированные 2003 г.

**Априорный набор частных критериев** по каждой из четырех базисных латентных синтетических категорий КЖ формировался с учетом требований (А)-(Б)-(В) (см. п. 2.2) на базе упомянутых выше источников. Перечень и индексация частных критериев априорного набора приведены в Приложении П2.6 к монографии [Айвазян (2012)].

**Апостериорные наборы частных критериев и исходные статистические данные.** Для формирования редуцированного (апостериорного) набора частных критериев по каждой из анализируемых синтетических категорий КЖ (по КН, УБ, КСС и КЭН) была применена методика отбора наиболее существенных показателей *в условиях отсутствия обучения*, описанная в п. 2.2. Отобранные в соответствии с этой методикой переменные проиндексированы и приведены в

<sup>5</sup> Соответствующая база данных создана и поддерживается (начиная с 1997 г. по настоящее время) сотрудниками Лаборатории вероятностно-статистических методов и моделирования Центрального экономико-математического института РАН. Скопировано с сайта <http://www.cerme.ru>. Разработка электронных библиотек и моделей в экономике. Центрального экономико-математического института РАН. <http://www.cerme.ru>

табл. 2.10. Таким образом, из 40 частных критериев априорного набора синтетической категории «Качество населения» в апостериорный набор было отобрано 14, из 15 частных критериев «УБ» в апостериорном наборе осталось 10, из 33 частных критериев «КСС» в апостериорный набор попало 23 и, наконец, из 27 частных критериев «КЭН» в апостериорный набор вошло только 9.

Исходные статистические данные по всем частным критериям (по состоянию на 2003 г.) для 78 субъектов РФ приведены в Приложении П2.7 к монографии [Айвазян (2012)].

**Унификация измерительных шкал анализируемых переменных** проводится по формулам (2.4)~(2.6) при  $N = 10$ , т.е. осуществляется переход к десятибалльным шкалам измерений, в которых нулевое значение унифицированного показателя свидетельствует о наихудшем качестве, а десятибалльное — о наилучшем. Поскольку в данном случае мы не располагаем обучением (а это, к сожалению, типичная ситуация для задач межрегионального анализа), то возникают проблемы с определением оптимальных значений ( $x_{\text{опт}}^{(j)}$ ) тех показателей, которые связаны с качеством жизни *немонотонной зависимостью* (а эти оптимальные значения нам необходимы для реализации унифицирующего преобразования (2.6)). Однако, принимая во внимание современную российскую специфику, а именно тот факт, что диапазон *реальных* значений таких показателей весьма далек от соответствующих оптимальных значений, формула (2.6) без ущерба для дела может быть заменена подходящим вариантом «монотонной формулы» (т.е. либо формулой (2.4), либо формулой (2.5)). В частности, именно эти соображения были приняты во внимание при унификации измерительных шкал переменных: коэффициент естественного прироста, миграция, безработица, общий размер социальных выплат, площадь особо охраняемых природных территорий. В то же время анализ международного опыта позволил определить оптимальную (на данный момент для России) величину коэффициента фондов, равную 9,0. Номер формулы унифицирующего преобразования, примененного к каждой из переменных апостериорного набора, указан в последнем (6-м) столбце таблицы Приложения П2.6 к монографии [Айвазян (2012)].

**Результаты анализа главных компонент** апостериорного набора частных критериев каждой из четырех анализируемых синтетических категорий (КН, УБ, КСС и КЭН). Как было описано в п. 2.3.4 (см. этап 1), этот анализ нацелен на получение ответов на два вопроса:

1. *Каково число  $k(l)$  интегральных индикаторов, необходимое для характеристики анализируемой ( $l$ -й) синтетической категории?*

(т. е. если  $k(l) = 1$ ), то какова процедура его измерения на базе значений частных критериев апостериорного набора  $l$ -й синтетической категории.

Ответ на первый вопрос основан на правиле (2.15). В частности, если обозначить

$$I_m(l) = \frac{\lambda_1(l) + \dots + \lambda_m(l)}{\lambda_1(l) + \dots + \lambda_{p(l)}(l)} \cdot 100$$

накопленную долю (в %) общей вариации частных критериев апостериорного набора  $l$ -й синтетической категории, объясненную первыми  $m$  главными компонентами этих частных критериев ( $m = 1, 2, \dots, p(l)$ ), то предлагаемое *формализованное* правило определения необходимого числа интегральных индикаторов  $k(l)$  основано на требовании

$$k(l) = \min_{1 \leq m \leq p(l)-1} \{m : I_m(l) \geq q_0(l)\}, \quad (l = \text{I, II, III, IV}), \quad (2.15')$$

где  $p(l)$  — общее число частных критериев в апостериорном наборе  $l$ -й синтетической категории, а пороговое значение  $q_0(l)$  выбирается из диапазона значений (0,5; 0,9) с учетом вида корреляционной матрицы частных критериев апостериорного набора и требуемой точности восстановления значений этих частных критериев по значениям искомым ИИ КЖ.

В нашем случае для всех синтетических категорий было выбрано  $q(l) = 55\%$  ( $l = \text{I, II, III, IV}$ ).

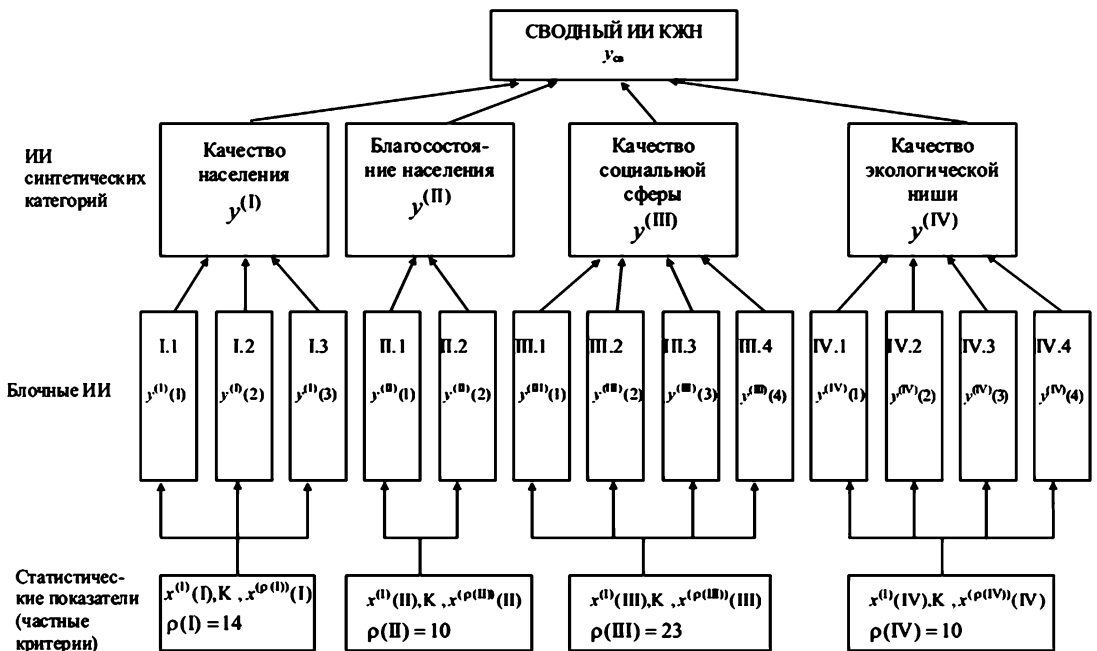
**Таблица 2.9.** Накопленная доля  $I_m(l)$  (в %) суммарной дисперсии частных критериев апостериорного набора  $l$ -й синтетической категории, объясненная первыми  $m$  главными компонентами

Номер синтетической категории ( $l$ )	Синтетическая категория КЖ	Число главных компонент ( $m$ )				Необходимое число $k(l)$ интегральных индикаторов
		1	2	3	4	
I	Качество населения (КН)	31,0	53,4	63,85		3
II	Уровень благосостояния (УБ)	38,8	57,5			2
III	Качество социальной сферы (КСС)	18,5	35,9	48,9	56,6	4
IV	Качество экологической среды (КЭС)	32,3	51,0	53,2	55,8	4

В табл. 2.9 представлены результаты расчетов значений  $I_m(l)$ . Из них, в частности, следует, что для характеристики «Качества населения» необходимо построить три ИИ КЖ, «Уровня благосостояния» — два, «Качества социальной сферы» — четыре и, наконец, «Качества экологической ниши» — четыре (соответствующая иерархическая схема «Сводный ИИ КЖН — ИИ основных синтетических категорий КЖ — блочные ИИ — базовые статистические показатели» представлена на рис. 2.4).

Ответ на второй вопрос при  $k(l) = 1$  дается формулами (2.20), в которых, соответственно,  $p_j(l) = p(l)$  — общему числу частных критериев анализируемой ( $l$ -й) синтетической категории. Однако в нашем случае все  $k(l) > 1$ , так что необходимо переходить к разбиению каждого апостериорного набора частных критериев на блоки и к построению блочных ИИ КЖ (см. этапы 2 и 3 методики, описанной в п. 2.3.4).

Разбиение апостериорных наборов частных критериев на блоки и построение блочных ИИ КЖ. Задавшись числом блоков  $k(l)$  по каждой ( $l$ -й) синтетической категории и используя результаты процедуры экстремальной группировки признаков (см. (2.16)–(2.18) в п. 2.3.4) как главную «подсказку» при выборе окончательного варианта разбиения частных критериев апостериорного набора на блоки, мы приходим к результатам, представленным в табл. 2.10а~2.10г.



**Рис. 2.4.** Иерархическая схема построения интегральных индикаторов КЖН  
 Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> в Межрегиональном анализе  
 Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

**Таблица 2.10.** Блочные частные критерии  $(\tilde{x}^{(1)}(j), \tilde{x}^{(2)}(j), \dots, \tilde{x}^{(p_j)}(j))$  и их весовые коэффициенты  $w_1(j), w_2(j), \dots, w_{p_j}(j)$  в блочных ИИ КЖ синтетических категорий ( $j$  — номер блока)

**Таблица 2.10 а.** По синтетической категории «Качество населения»

Номер блока ( $j$ )	Переменные блока (в скобках — соответствующие весовые коэф-ты $w_s(j)$ )						
	$\tilde{x}^{(1)}(j)$	$\tilde{x}^{(2)}(j)$	$\tilde{x}^{(3)}(j)$	$\tilde{x}^{(4)}(j)$	$\tilde{x}^{(5)}(j)$	$\tilde{x}^{(6)}(j)$	$\tilde{x}^{(7)}(j)$
1	Продолжительность жизни $w_1(1)=0,178$	Младенческая смертность $w_2(1)=0,130$	Смертность от туберкулеза и инфекционных заболеваний $w_3(1)=0,133$	Смертность от болезней дыхания $w_4(1)=0,155$	Смертность от болезней пищеварения $w_5(1)=0,150$	Смертность от несчастных случаев $w_6(1)=0,198$	Врожденные аномалии $w_7(1)=0,056$
2	Естественный прирост $w_1(2)=0,262$	Смертность от онкологических заболеваний $w_2(2)=0,238$	Смертность от заболеваний сердечной сосудистой системы $w_3(2)=0,289$	Инвалидность $w_4(2)=0,211$			
3	Высшее образование среди занятых $w_1(3)=0,437$	Охват молодежи обучением $w_2(3)=0,162$	ВРП на одного занятого*) $w_3(3)=0,401$				

\*) Характеризует так называемую приведенную производительность труда в регионе, т. е. вычисленную в единой (для всех регионов) стандартизированной структуре занятости.

Таблица 2.10 б. По синтетической категории «Уровень благосостояния»

Номер блока (j)	Переменные блока (в скобках — соответствующие весовые коэф-ты $w_s(j)$ )					
	$\tilde{x}^{(1)}(j)$	$\tilde{x}^{(2)}(j)$	$\tilde{x}^{(3)}(j)$	$\tilde{x}^{(4)}(j)$	$\tilde{x}^{(5)}(j)$	$\tilde{x}^{(6)}(j)$
1	ВРП на душу $w_1(1)=0,093$	Покупательная способность душевых доходов $w_2(1)=0,226$	Доля бедных $w_3(1)=0,360$	Коэффициент фондов $w_4(1)=0,074$	Обеспеченность автомобилями $w_5(1)=0,112$	Товарооборот $w_6(1)=135$
2	Обеспеченность жильем $w_1(2)=0,394$	Ввод жилья $w_2(2)=0,370$	Плотность автомобильных дорог $w_3(2)=0,128$	Ветхое и аварийное жилье $w_4(2)=0,108$		

Таблица 2.10 в. По синтетической категории «Качество социальной сферы»

Номер блока $(j)$	Переменные блока и соответствующие весовые коэффициенты $w_s(j)$									
	$\bar{x}(1)(j)$	$\bar{x}(2)(j)$	$\bar{x}(3)(j)$	$\bar{x}(4)(j)$	$\bar{x}(5)(j)$	$\bar{x}(6)(j)$	$\bar{x}(7)(j)$	$\bar{x}(8)(j)$	$\bar{x}(9)(j)$	$\bar{x}(10)(j)$
1	Социально значимые болезни $w_1(1) = 0,075$	Вредные и опасные условия труда $w_2(1) = 0,143$	Производственный травматизм $w_3(1) = 0,113$	Убийства и покушения $w_4(1) = 0,112$	Тяжкий вред здоровью $w_5(1) = 0,084$	Изнасилования и покушения $w_6(1) = 0,069$	Разбой, грабежи, кражи $w_7(1) = 1,155$	Растраты, хищения $w_8(1) = 0,064$	Алкоголизм $w_9(1) = 0,040$	Самоубийства $w_{10}(1) = 0,145$
2	Миграция $w_1(2) = 0,055$	Глубина бедности $w_2(2) = 0,220$	Безработица $w_3(2) = 0,233$	Нагрузка безработных на вакансию $w_4(2) = 0,146$	Длительная безработица $w_5(2) = 0,225$	Задолженность по зарплате $w_6(1) = 0,121$				
3	Покупательная способность пенсий $w_1(3) = 0,819$	Социальные выплаты $w_2(3) = 0,113$	Социальное обслуживание на дому $w_3(3) = 0,004$	Обслуживание в центрах социального обеспечения $w_4(3) = 0,064$						
4	Коэффициент фондов $w_1(4) = 0,064$	Наркомания и токсикомания $w_2(4) = 0,434$	ВИЧ-инфекции $w_3(4) = 0,502$							



**Таблица 2.10 г.** По синтетической категории  
 «Качество экологической ниши»

Номер блока (j)	Переменные блока и соответствующие весовые коэф-ты $w_s(j)$			
	$\tilde{x}^{(1)}(j)$	$\tilde{x}^{(2)}(j)$	$\tilde{x}^{(3)}(j)$	$\tilde{x}^{(4)}(j)$
1	Объем загрязненных сточных вод на 1 кв. км территории $w_1(1)=0,147$	Общие выбросы от стационарных источников загрязнения атмосферы $w_2(1)=0,136$	Токсичные отходы производства (ТОП), захороненные за год (на 1 кв. км территории) $w_3(1)=0,402$	ТОП, образовавшиеся за год за вычетом использованных $w_4(1)=0,315$
2	Посеянный и посаженный лес $w_1(2)=0,570$	Молодняк категории ценных пород леса $w_2(2)=0,103$	Сгоревший в пожарах лес $w_3(2)=0,327$	
3	Особо охраняемая природная территория $w_1(3) = 1,000$			
4	Рекультивированные и нарушенные земли $w_1(4)=1,000$			

Напомним (см. (2.20а) и (2.20б)), что значение блочного ИИ КЖ  $y_i(j)$  для каждой ( $i$ -й) территории (и каждой синтетической категории) вычисляется по формуле (2.20а) или (2.20б):

$$y_i(j) = \sum_{s=1}^{p_j} w_s(j) \cdot \tilde{x}_i^{(s)}(j),$$

где  $\tilde{x}_i^{(s)}(j)$  — унифицированное значение  $s$ -го частного критерия  $j$ -го блока для  $i$ -й территории, а весовые коэффициенты  $w_s(j)$  определяются по компонентам  $c_{1s}(j)$  первого собственного вектора  $C_1(j) = (c_{11}(j), c_{12}(j), \dots, c_{1p_j}(j))$  ковариационной матрицы  $\Sigma(j)$  апостериорного набора унифицированных частных критериев ( $\tilde{x}^{(1)}(j), \tilde{x}^{(2)}(j), \dots, \tilde{x}^{(p_j)}(j)$ ) по формуле:

$$w_s(j) = \begin{cases} c_{1s}(j) / \sum_{\nu=1}^{p_j} c_{1\nu}(j), & \text{если все } c_{1\nu} \text{ одного знака } \nu = 1, 2, \dots, p_j; \\ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подсчитанные по этой формуле значения *блочных* ИИ КЖ для 78 субъектов РФ по каждой из четырех анализируемых синтетических категорий (по данным 2003 г.) приведены в Приложении П2.1.

**Построение сводного интегрального индикатора для анализируемой синтетической категории КЖ.** Теперь, следуя методике, описанной в п. 2.3.4 (см. «Этап 4»), мы должны перейти от  $k(l)$  *блочных* ИИ КЖ данной ( $l$ -й) синтетической категории  $y^{(l)}_1, y^{(l)}_2, \dots, y^{(l)}_{k(l)}$  к одному *сводному* интегральному индикатору – скалярному измерителю этой синтетической категории  $\hat{y}^{(l)}$  ( $l = I, II, III, IV$ ). Из (2.22)–(2.23) следует, что

$$\hat{y}_i^{(l)} = N - \left[ \sum_{j=1}^{k(l)} q_l(j) (y_i^{(l)}(j) - N)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.23a)$$

где  $q_l(j) = \frac{p_j^{(l)} \cdot s_l^2(j)}{\sum_{\nu=1}^{k(l)} p_\nu^{(l)} \cdot s_l^2(\nu)}$ ,

$$s_l^2(j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( y_i^{(l)}(j) - \bar{y}^{(l)}(j) \right)^2 \quad \text{и} \quad \bar{y}^{(l)}(j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^{(l)}(j).$$

Подсчитанные таким образом по данным 2003 г. значения *сводных* интегральных индикаторов  $\hat{y}_i^{(l)}$  для 78 субъектов РФ ( $i = 1, 2, \dots, 78$ ) по каждой из четырех анализируемых синтетических категорий КЖ ( $l = I, \dots, IV$ ) приведены в Приложении П2.1.

**Построение единого сводного интегрального индикатора для синтетической категории КЖ высшего уровня общности  $\hat{y}^{CB}$ .** по сводным ИИ КЖ, характеризующим «Качество населения» ( $\hat{y}^{(I)}$ ), «Уровень благосостояния» ( $\hat{y}^{(II)}$ ), «Качество социальной сферы» ( $\hat{y}^{(III)}$ ) и «Качество экологической ниши» ( $\hat{y}^{(IV)}$ ), осуществляется по той же методике, что и построение  $\hat{y}^{(l)}$  по *блочным* ИИ КЖ, а именно:

$$\hat{y}_i^{CB} = N - \left[ \sum_{l=I}^{IV} \tilde{q}_l \cdot (\hat{y}_i^{(l)} - N)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.236)$$

где  $\tilde{q}_l = \frac{p^{(l)} \cdot \bar{s}_l^2}{\sum_{l=I}^{IV} p^{(l)} \cdot \bar{s}_l^2}$ ,  $p^{(l)} = \sum_{j=1}^{k(l)} p_j^{(l)}$ ,

$$\bar{s}_l^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i^{(l)} - \bar{\hat{y}}^{(l)})^2 \quad \text{и} \quad \bar{\hat{y}}^{(l)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^{(l)}$$

Вычисленные по этим формулам значения единого (сводного) ИИ КЖ, так же как и значения соответствующих рангов регионов (по данным 2003 г.), приведены в Приложении П2.2.

Итак, Приложения П2.1 и П2.2 содержат данные, необходимые для сравнительного анализа и ранжирования субъектов РФ как по каждой из четырех рассмотренных синтетических категорий КЖ («КН», «УБ», «КСС» и «КЭН»), так и по латентной синтетической категории КЖ высшего уровня общности. Это — задача описательного характера, представляющая определенный самостоятельный интерес. Однако, как показано в [Айвазян (2012)], гл. 3, подобные данные, *рассмотренные в динамике*, могут быть использованы для решения задач выявления проблемных областей в социально-экономическом развитии региона, корректировки проводимой социально-экономической политики и оценки эффективности деятельности региональных администраций.

### 2.4.3. Построение интегрального измерителя уровня мастерства спортсмена (на примере хоккея)

**Постановка задачи, цель исследования.** Исследование проводилось силами рабочей группы Центрального экономико-математического института Академии наук СССР (ЦЭМИ АН СССР) по заказу Отдела хоккея Государственного комитета по физической культуре и спорту Совета Министров СССР в рамках создания автоматизированной информационной системы «АИС-Хоккей», предназначенной для информационного обслуживания чемпионата мира по хоккею (Москва, 1973 г.). Практически на всех этапах работа проводилась при систематических контактах и консультациях с представителями «Заказчика»<sup>6</sup>. В качестве анализируемой синтетической латентной категории рассматривался *уровень мастерства хоккеиста, проявленного им в данном матче или серии матчей*.

**Цель исследования** — выявление набора поддающихся измерению показателей (*частных критериев*)  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , характеризующих уровень мастерства хоккеиста, и построение такой функции  $\hat{y}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  от этих показателей, которая может служить численной оценкой анализируемого уровня мастерства (в дальнейшем мы будем называть ее *целевой*). Прикладное назначение этой функции:

<sup>6</sup>Рабочую группу ЦЭМИ АН СССР возглавили С. Айвазян и С. Шаталин. В различных частях информационного и математического обеспечения этой большой комплексной работы участвовали М. Ильменский, С. Забаринская, В. Когутовский, Ю. Брыкин, В. Орлов. Со стороны «Заказчика» непосредственное участие в работе принимали Б. Майоров (в то время — начальник Отдела хоккея упомянутого Комитета Госкомспорта) и Ю. Королев (зав. кафедрой футбола и хоккея Государственного института физической культуры и спорта).  
Скопировано с сайта <http://учеб.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

(а) формализованная оценка уровня мастерства каждого ( $i$ -го) хоккеиста, проявленного им в данном матче или в серии матчей, по значениям показателей  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)}$ , характеризующих его действия в этом матче (или в серии матчей); (б) построение (на основе мониторинга значений целевой функции  $\hat{y}(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)})$ ) для каждого ( $i$ -го) хоккеиста индивидуализированного плана тренировочного процесса с акцентом на совершенствование тех компонентов игры, за счет которых можно добиться наибольшего приращения в значениях целевой функции  $\hat{y}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ .

**Формирование априорного набора частных критериев.** Как было сказано выше, решение этой задачи находится целиком в компетенции экспертов той области, к которой относится анализируемая СЛК. В данном случае — это хоккейные тренеры высокой квалификации. Поэтому, отправляясь от согласованного с представителями «Заказчика» предварительного списка показателей индивидуального мастерства хоккеистов, была составлена и размножена среди экспертов «Анкета № 1» следующего содержания<sup>7</sup>:

*«Оцените, пожалуйста, исходя из 100-балльной системы оценок, сравнительную значимость каждого из нижеприведенных факторов (показателей качества игры хоккеиста), так или иначе учитываемых при сравнительной характеристике степени мастерства, проявленного игроками в данном соревновании.*

*Если Вы считаете, что в указанном ниже перечне факторов не учтены какие-либо из существенных, на Ваш взгляд, числовых показателей качества игры хоккеиста, дополните его, пожалуйста, точным описанием смысла этих неучтенных величин».*

Пример заполнения такой анкеты одним из экспертов-специалистов хоккея приведен в табл. 2.11.

Здесь следует подчеркнуть, что при предварительной обработке полученных 15 анкет обнаружилось полное отсутствие согласованности в мнениях экспертов, относящихся к сравнительной оценке значимости факторов (частных критериев) в формировании интегральной оценки уровня мастерства хоккеиста (см. последние три столбца табл. 2.11).

<sup>7</sup> Среди откликнувшихся на вопросы анкеты были такие признанные авторитеты отечественного и мирового хоккея, как А. Чернышев, А. Тарасов, Б. Кулагин, Ю. Морозов, В. Карпов, В. Егоров, Б. Майоров, В. Старшинов, Ю. Баулин, И. Ромашовский, Ю. Королев и др.

**Таблица 2.11.** Пример заполнения экспертом анкеты, нацеленной на выявление основных частных критериев уровня мастерства хоккеиста

NN критериев пп.	Содержательный смысл частного критерия	Значимость фактора при сравнении игры		
		нападающих	защитников	всех участников соревнования
1	Количество очков, начисляемых по системе «полупорционная сумма забитых голов + число результативных передач» ( $x^{(1)}$ )	100	45	80
2	Общее число эффективных (т. е. окончившихся голом или парированием) бросков по воротам противника ( $x^{(2)}$ )	80	40	65
3	Общее число выигранных силовых единоборств ( $x^{(3)}$ )	80	80	80
4	Общее число отборов шайбы у противника ( $x^{(4)}$ )	40	100	65
5	Разность шайб, забитых и пропущенных командой в течение времени пребывания данного игрока на площадке ( $x^{(5)}$ )	60	60	60
6	Общее число точных передач ( $x^{(6)}$ )	40	40	40
7	Общее число удачно выполненных «длинных» (т. е. адресованных из одной зоны в другую) первых передач ( $x^{(7)}$ )	20	70	30
8	Число бросков противника, парированных данным игроком ( $x^{(8)}$ )	20	65	30
9	Суммарное время участия хоккеиста в игре в численном меньшинстве и в численном большинстве ( $x^{(9)}$ )	60	60	60
10	Общее число удачно выполненных обводок — в средней зоне и в зоне нападения ( $x^{(10)}$ )	75	20	55
11	Отношение числа обводок к числу передач, выполненных в средней зоне и в зоне нападения ( $x^{(11)}$ )	20	10	15
12	Сумма штрафного времени, «заработанного» игроком ( $x^{(12)}$ )	30	40	35
13*	Процент выигранных вбрасываний шайбы ( $x^{(13)}$ )	30	—	15
14*	Действия на «пяточке» противника (сумма добиваний шайбы и помех вратарю)~ ( $x^{(14)}$ )	40	—	20

\* Пункт дополнен экспертом, заполнявшим данную анкету.

сящимся к случаю «с обучением». Получение данных

$$(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(14)}; y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.24)$$

необходимых для реализации этих рекомендаций, потребовало периода *экспериментальной апробации методики*. Этот период включал в себя отрезок времени до чемпионата мира (а именно февраль 1973 г.), в течение которого в ходе трех контрольных матчей календаря первенства СССР (ЦСКА — Химки, Крылья Советов — Динамо и ЦСКА — Спартак) была организована регистрация по каждому ( $i$ -му) участнику матча значений всех 14 упомянутых в табл. 2.11 частных критериев  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(14)}$  и одновременно экспертная интегральная оценка (в 100-балльной системе) уровня мастерства  $y_i$  хоккеиста.

**Получение экспертной («обучающей») части исходных данных.** Обучение было получено в процессе упомянутого периода экспериментальной апробации, в ходе которого была организована (по каждому  $i$ -му участнику каждого из трех матчей) регистрация значений частных критериев  $x_i^{(1)} \sim x_i^{(14)}$  (это, по нашей терминологии, *статистическая часть исходных данных*), а также — экспертные интегральные оценки  $y_i$  уровня мастерства, проявленного этим же ( $i$ -м) участником в ходе данного матча. Для получения последней оценки экспертам-специалистам отечественного и мирового хоккея (поименно они упоминались выше) раздавались «**Анкеты № 2**» следующего содержания.

*«Оцените, пожалуйста, исходя из 100-балльной системы оценок, сравнительную степень мастерства, проявленного участниками сегодняшнего соревнования. При этом Вы можете не оценивать действия всех участников сегодняшней встречи. Однако желательно, чтобы Вы включили в число оцениваемых не менее 12 лучших, на Ваш взгляд, хоккеистов данного матча».*

Отметим, что экспертные оценки  $y_i$  уровня мастерства хоккеиста, участвующего в матче, производились *на двух стадиях*: на *стадии экспериментальной апробации методики* (см. выше), когда эти оценки используются для уточнения состава частных критериев и для построения искомых целевых функций (отдельно для форвардов и для защитников)  $\hat{y}_i = \theta_0 + \theta_1 x_i^{(1)} + \dots + \theta_p x_i^{(p)}$ ; и на *стадии рабочей эксплуатации моделей* (т. е. в ходе всех 30 матчей чемпионата мира 1973 г.), в ходе которой одновременно тестируется прикладная дееспособность моделей и уточняются их параметры. Заметим, что на стадии рабочей эксплуатации методики к упомянутым выше экспертам были подключены главные тренеры всех национальных сборных команд — участников чемпиона-

та. В табл. 2.12 представлен пример заполнения «Анкеты №2» по результатам матча второго круга «СССР — Чехословакия»

**Таблица 2.12.** Пример заполнения анкеты, связанной с интегральной оценкой уровня мастерства хоккеиста — участника матча

Номер игрока	Команда	Оценка в баллах	Место
17	СССР	88	2
13	СССР	90	1
16	СССР	85	3 ~ 5
2	СССР	85	3 ~ 5
6	СССР	85	3 ~ 5
3	СССР	75	6 ~ 10
22	СССР	70	11 ~ 14
20	ЧССР	70	11 ~ 14
8	ЧССР	70	11 ~ 14
7	ЧССР	75	6 ~ 10
14	ЧССР	75	6 ~ 10
3	ЧССР	70	11 ~ 14
9	СССР	76	6 ~ 10
4	ЧССР	75	6 ~ 10

Следует особо подчеркнуть, что степень согласованности мнений всех 12 ~ 15 экспертов, отвечавших на вопросы «Анкеты №2», оказывалась, как правило, весьма высокой: парные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена в упорядочении участников матча по степени проявленного ими мастерства (см. последний столбец в табл. 2.12) были на уровне 0,7 ~ 0,9, а коэффициент конкордации Кендалла (по всем экспертам) — порядка 0,5 ~ 0,7. Эти коэффициенты всегда «с запасом» выдерживали статистическую проверку на значимое отличие от нуля. Совсем другую картину, напомним, мы наблюдали с согласованностью оценок экспертов относительной значимости каждого из частных критериев!

**Некоторые результаты построения и рабочей эксплуатации ИИ уровня спортивного мастерства хоккеиста.** В апостериорном наборе частных критериев после проведения рекомендованных в п. 2.2 процедур осталось лишь 11 частных критериев: из 14 показателей, приведенных в табл. 2.11, в состав апостериорного набора не вышли показатели  $x^{(11)}$ ,  $x^{(13)}$  и  $x^{(14)}$ .

Описанный в п. 2.3.3 экспертно-статистический метод построения линейной целевой функции, примененный к данным в табл. 2.10, при-

чем отдельно к данным по защитникам, нападающим и к общему (объединенному) массиву, дал следующие три варианта для вычисления интегрального индикатора уровня спортивного мастерства хоккеиста:

вариант целевой функции, оценивающей индивидуальное мастерство **защитника**,

$$u_{\text{зашц}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(11)}) = 10 + 4x^{(1)} + x^{(2)} + 4x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} + 0,2x^{(6)} + 3x^{(8)} + x^{(9)} + x^{(10)}; \quad (2.25a)$$

вариант целевой функции, оценивающей индивидуальное мастерство **нападающего**,

$$u_{\text{нап}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(11)}) = 8x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + 0,5x^{(4)} + x^{(5)} + 0,2x^{(6)} + x^{(8)} + x^{(9)} + 3x^{(10)}; \quad (2.25b)$$

вариант целевой функции, оценивающей универсальное мастерство хоккеиста, т. е. позволяющей сравнивать между собой **защитников и нападающих**,

$$y(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(11)}) = 15 + 6x^{(1)} + x^{(2)} + 2x^{(3)} + x^{(4)} + 0,5x^{(5)} + 0,2x^{(6)} + x^{(8)} + 2x^{(9)} + x^{(10)}. \quad (2.25b)$$

Отметим, что последовательный пересчет весовых коэффициентов по накапливающимся итогам матчей чемпионата мира выявил факт относительной стабилизации значений весовых коэффициентов, что дает основание надеяться на содержательность и объективность полученного с помощью этих целевых функций формализованного метода оценивания мастерства хоккеистов.

*З а м е ч а н и я.* 1) *Оценки коэффициентов  $\theta_j$  в соотношениях (2.25) получались в результате усреднения и округления соответствующих МНК-оценок, получаемых последовательно по массивам данных, нарастающим по мере добавления очередных матчей чемпионата мира.*

2) *Из самого способа построения ИИ уровня спортивного мастерства хоккеиста следует, что коэффициенты при  $x^{(j)}$  в моделях (2.25) отражают неформализованные (в значительной мере интуитивные) критерийные установки привлеченных экспертов по поводу относительной важности различных характеристик игры хоккеиста в формировании интегральной оценки уровня проявленного им мастерства. Очевидно, со временем эти установки могут трансформироваться в соответствии с меняющимися тенденциями в развитии хоккея.*

*Так, сегодня признанные в начале 70-х годов прошлого столетия несущими факторы  $x^{(13)}$  (% выигранных вратарских партий) и*



$x^{(14)}$  (действия на «пяточке» противника), скорее всего, оказались бы достаточно высоко значимыми. Поэтому, говоря о практическом использовании моделей вида (2.25), например в планировании тренировочного процесса, необходимо хотя бы один раз в пять лет производить их переоценку по последним (по времени) исходным данным.

**Анализ прикладной дееспособности построенных ИИ уровня мастерства хоккеиста.** Тридцатикратное (т. е. по 30 матчам чемпионата) сопоставление экспертной и формализованной (т. е. произведенной с помощью целевых функций) оценок мастерства хоккеистов на матчах чемпионата мира, так же как и тщательный профессиональный анализ накопленного итога, показал устойчивую обоснованность и профессиональную состоятельность выводов, полученных с помощью целевых функций (2.25).

В табл. 2.13 приведен накопленный итог чемпионата по показателям индивидуальных действий 12 лучших защитников и 20 лучших нападающих, определенных с помощью целевых функций, соответственно  $y_{\text{защ}}(X)$  и  $y_{\text{нап}}(X)$ , выписанных выше.

Заметим, что выявленные с помощью построенных ИИ (см. (2.25а) и (2.25б)) кандидатуры лучшего защитника, лучшего нападающего, так же как и состав символической сборной мира, практически совпали с мнением специального жюри чемпионата и прессы. В частности, по итогам чемпионата по значениям ИИ, определенным с помощью соотношений (2.25а) и (2.25б), были выявлены следующие лучшие игроки:

лучший защитник	Васильев	№ 6	СССР
лучший нападающий	Петров	№ 16	СССР
<b>Символическая сборная мира:</b>			
вратарь	Холечек	№ 2	ЧССР
правый защитник	Васильев	№ 6	СССР
левый защитник	Гусев	№ 2	СССР
правый нападающий	Михайлов	№ 13	СССР
центральный нападающий	Петров	№ 16	СССР
левый нападающий	Харламов	№ 17	СССР

Единственное отличие этой символической сборной от той, которая была определена в результате специального опроса спортивных журналистов, заключается в том, что вместо Валерия Васильева в нее вошел Сальминг (Швеция). При этом, правда, Директоратом Международной организации хоккея В. Васильев был провозглашен лучшим защитником чемпионата.

**Таблица 2.13.** Накопленный итог чемпионата мира по хоккею (Москва, 1973 г.) по показателям индивидуальных действий хоккеистов

№ пп.	Фамилии игроков	Номер игрока	Страна	Голы	Ассистирование голов	Броски по воротам	Выигранные силовые единоборства	Прочие отборы шайбы	Разность забитых и пропущенных шайб в микро-матче игрока	Точные передачи	Прием шайбы на себя	Время игры в неравных составах	Удачные обводки	Штрафное время в минутах
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	<b>По защитникам</b>													
1	Васильев	6	СССР	0	7	39	53	179	43	222	6	48,5	34	6
2	Сальминг	5	Швеция	4	6	42	41	185	17	241	9	54,3	34	10
3	Гусев	2	СССР	7	7	46	10	164	46	228	0	37,9	30	0
4	Поспешил	7	ЧССР	1	6	17	28	149	8	226	3	58,5	18	4
5	Махач	4	ЧССР	3	1	56	16	163	8	196	8	57,0	10	11
6	Лутченко	3	СССР	1	0	25	33	105	14	151	7	33,3	21	12
7	Цыганков	7	СССР	0	0	33	24	149	20	182	6	32,1	15	6
8	Коскела	6	Финляндия	0	1	22	13	159	-4	234	1	60,9	17	8
9	Чаховский	2	Польша	0	0	6	32	143	-20	136	6	26,5	6	8
10	Шеберг	7	Швеция	1	3	30	20	135	10	156	3	31,9	17	2
11	Вохралик	19	ЧССР	0	1	8	21	127	9	177	2	28,7	14	2
12	Юханссон	9	Швеция	2	3	25	20	135	12	142	2	35,3	17	10

Таблица 2.13. (окончание)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>По нападаю-</b> <b>щим</b>													
Петров	16	СССР	18	15	49	24	101	43	258	0	52,6	45	12
Михайлов	13	СССР	16	13	44	19	83	42	193	1	50	38	4
Харламов	17	СССР	9	14	39	9	136	47	205	0	26,5	54	35
Холик	20	ЧССР	4	10	40	23	120	11	212	3	50,1	53	23
Недомански	14	ЧССР	6	2	66	10	75	12	186	0	27,7	48	2
Шлодер	15	ФРГ	1	2	27	42	137	-19	167	3	50,5	46	12
Якушев	15	СССР	9	6	33	18	85	14	197	4	25,4	31	2
Хаммарстрем	19	Швеция	6	2	44	14	112	13	190	1	22,7	35	2
Мальцев	10	СССР	7	7	41	9	117	10	140	1	11,0	36	12
Кюнхакль	14	ФРГ	2	1	49	23	114	-10	191	0	43,2	32	14
Ольберг	16	Швеция	7	8	38	25	77	12	146	0	34,7	23	6
Палечек	16	ЧССР	3	1	24	15	71	9	122	7	17,9	20	2
Анисин	22	СССН	6	6	31	10	80	17	142	0	12,5	20	4
Седерстрем	23	Швеция	7	6	28	14	86	13	160	0	27,3	2	7
Леппя	11	Финляндия	2	5	25	21	89	4	166	2	52,7	17	2
Кохта	8	ЧССР	2	3	19	15	89	8	119	1	47,7	33	2
Лундстрем	11	Швеция	3	2	32	15	95	10	162	1	29,8	10	0
Хедберг	20	Швеция	2	5	30	20	94	7	151	0	21	13	0
Викберг	10	Швеция	3	4	28	21	66	7	149	0	35,2	22	0
Шадрин	19	СССР	4	7	18	11	60	14	161	0	17,5	9	4

## Выводы

1. Интегральный индикатор синтетической латентной категории (ИИ СЛК) строится в форме определенной свертки (функции)  $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  от некоторых *измеримых* частных свойств этой категории, где в роли частных свойств  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$  в *объективистском* подходе выступают характеризующие эту категорию статистические показатели (см. п. 2.2).

2. Главным недостатком подавляющего большинства существующих в мире способов оценки этих свертки  $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  является **прямое экспертное оценивание параметров**, от которых зависит конкретный вид функции  $f(\cdot)$ . Так, если задача решается в классе *линейных* свертки  $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}) = \sum_{j=1}^p w_j x^{(j)}$ , то неизвестные *веса*  $w_j$  определяются *непосредственно экспертами* в результате той или иной формализованной процедуры получения и обработки экспертных мнений (см. п. 2.3.4).

3. Подбор значений параметров функции-свертки  $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  при наличии обучения (т.е. при наличии априорной экспертной информации о сравнении рассматриваемых объектов по анализируемой синтетической латентной категории) производится таким образом, чтобы результат сравнения этих объектов, основанный на значениях  $f(\cdot)$ , наименее (в определенном смысле) отличался бы от априорного экспертного (см. п. 2.3.3).

4. Подбор значений параметров функции-свертки  $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  в условиях отсутствия обучения основан на следующем требовании: среди всех скалярных переменных, характеризующих анализируемую синтетическую латентную категорию, именно по значениям  $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  можно наиболее точно (в определенном смысле) восстановить значения всех частных свойств  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , используя для этого соответствующие модели парной регрессии  $x^{(j)}$  по  $y$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) (см. п. 2.3.4).

5. При формировании исходного (априорного) набора частных свойств, характеризующих анализируемую синтетическую латентную категорию, необходимо руководствоваться требованиями к их *релевантности, информационной доступности и информационной достоверности* (см. п. 2.2).

6. Перед включением частных свойств в состав аргументов функции-свертки  $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$  необходимо их, во-первых, подвергнуть *процедуре редуцирования*, т.е. отобрать по определенной методике из исходного (априорного) набора более узкий по составу апостериорный набор в целях исключения эффекта мультиколлинеарности и

во-вторых, с помощью соответствующих преобразований (см. (2.4)–(2.6)) произвести унификацию их измерительных шкал так, чтобы все они измерялись в  $N$ -балльной шкале (выбор значения  $N$  — в компетенции исследователя), в которой нуль соответствует наихудшей ситуации, а  $N$  — наилучшей (см. п. 2.3.2).

## Глава 3

# Байесовский подход в эконометрическом анализе

Данная глава посвящена так называемому *байесовскому подходу* в эконометрическом анализе, основанному на субъективно-вероятностном способе операционализации принципа максимального использования (наряду с исходными статистическими данными) априорной информации об исследуемом процессе.

Байесовские методы широко распространены в теории и практике эконометрического анализа и являются обязательной составной частью современных учебных программ магистерского уровня по эконометрике в ведущих университетах мира. Особенно заметные преимущества (по сравнению с классическими методами) с точки зрения точности получаемых статистических выводов они имеют в условиях относительно малых выборок, что весьма характерно для эконометрического моделирования.

### 3.1. Философия и общая логическая схема байесовского подхода

Пусть в описании рассматриваемой эконометрической модели (закон распределения анализируемой случайной величины, функции регрессии, временного ряда, системы одновременных уравнений и т. п.) участвует  $s$ -мерный параметр  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)'$  и нашей задачей является построение наилучшей, в определенном смысле, статистической оценки  $\hat{\Theta}$  этого параметра по имеющимся  $k$ -мерным наблюдениям  $X_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(k)})'$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Как и ранее, верхний индекс «штрых» здесь и в дальнейшем означает операцию транспонирования

вектора или матрицы, прописными буквами будут обозначаться векторные величины, а строчные буквы будут использоваться для обозначения одномерных (возможных или наблюдаемых) значений анализируемых случайных величин.

Байесовский подход является одним из возможных способов формализации и операционализации тезиса, в справедливости которого нет видимых причин сомневаться: *степень нашей разумной уверенности в некотором утверждении (касающемся, например, оценки неизвестного численного значения интересующего нас параметра) возрастает и корректируется по мере пополнения имеющейся у нас информации относительно исследуемого явления.* Могут быть различные формы интерпретации и подтверждения этого тезиса, в том числе не имеющие отношения к байесовскому подходу. Одна из них выражена, например, в свойстве состоятельности оценки  $\hat{\Theta}_n$  неизвестного параметра  $\Theta$ : чем больше объем выборки  $n$ , на основании которой мы строим свою оценку  $\hat{\Theta}_n$ , тем большей информацией об этом параметре мы располагаем и тем ближе (в смысле сходимости  $\hat{\Theta}_n$  к  $\Theta$  по вероятности) к истине наше заключение.

Специфика именно байесовского способа операционализации этого тезиса основана на двух положениях.

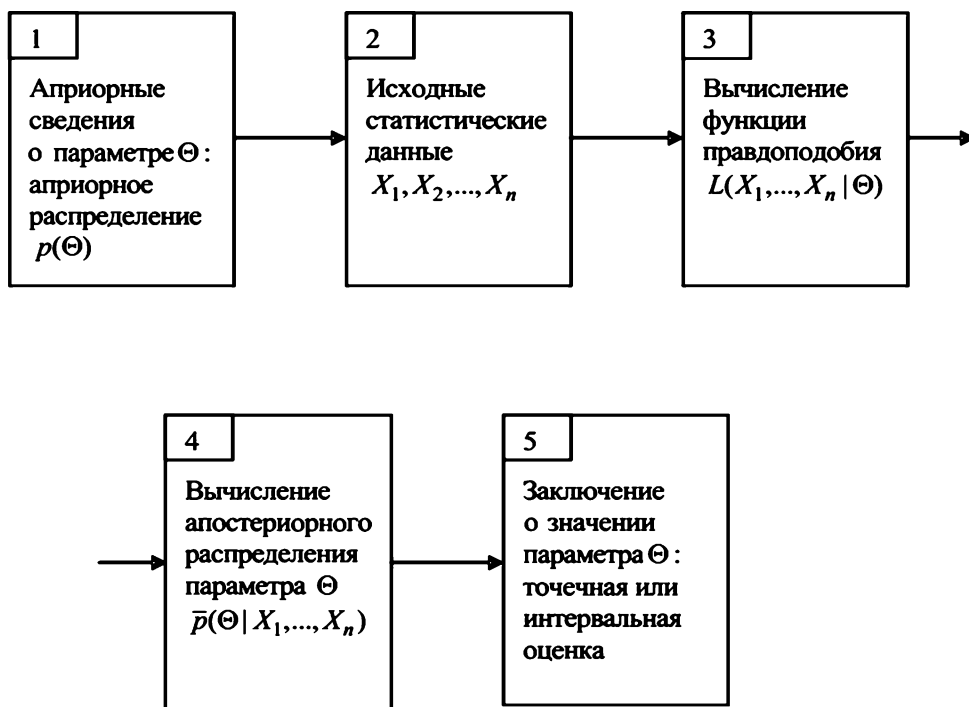
1) Во-первых, «степень нашей разумной уверенности» в справедливости некоторого утверждения численно выражается в виде вероятности. Это означает, что вероятность в байесовском подходе выходит за рамки ее интерпретации в терминах условий статистического ансамбля (см. п. В.2.1 в [Айвазян, Мхитарян (2001)]), но относится к одной из категорий субъективной школы теории вероятностей.

2) Во-вторых, статистик при принятии решения использует в качестве исходной информации одновременно информацию двух типов: *априорную и содержащуюся в исходных статистических данных* (см. п. В.3.2 в [Айвазян, Мхитарян (2001)]). При этом априорная информация предоставлена ему в виде некоторого *априорного распределения вероятностей* анализируемого неизвестного параметра, которое описывает степень его уверенности в том, что этот параметр примет то или иное значение, *еще до начала сбора исходных статистических данных.* По мере же поступления исходных статистических данных статистик или эконометрист уточняет (пересчитывает) это распределение, *переходя от априорного распределения к апостериорному,* используя для этого известную формулу Байеса

$$P\{A_i|B\} = \frac{P\{A_i\} \cdot P\{B|A_i\}}{\sum_{j=1}^N P\{B|A_j\} \cdot P\{A_j\}}, \quad (3.1)$$

которая определяет правило вычисления условной вероятности события  $A_i$  (при условии, что событие  $B$  уже имело место) по безусловной вероятности события  $A_i$  и условным вероятностям  $P\{B|A_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . При этом предполагается, что  $A_1, A_2, \dots, A_N$  образуют полную систему событий, а событие  $B$  — ненулевой вероятности (т.е.  $P\{B\} > 0$ ).

**Общая логическая схема байесовского метода оценивания значений параметров** представлена на рис. 3.1.



**Рис. 3.1.** Общая логическая схема байесовского подхода в статистическом оценивании

Рассмотрим реализацию схемы байесовского оценивания неизвестного параметра.

**Априорные сведения о параметре  $\Theta$**  основаны на предыстории функционирования анализируемого процесса (если таковая имеется) и на профессиональных теоретических соображениях о его сущности, специфике, особенностях и т. п. В конечном итоге эти априорные сведения должны быть представлены в виде функции  $p(\Theta)$ , задающей *априорное распределение параметра* и интерпретируемой как вероятность того, что параметр примет значение, равное  $\Theta$ , если параметр дискретен, и как функция плотности распределения в точке  $\Theta$ , если параметр непрерывен по своей природе.

**Исходные статистические данные  $X_1, X_2, \dots, X_n$**  порождаются в соответствии с законом распределения вероятностей  $L(X|\Theta)$ , где под



$f(X|\Theta)$  понимается значение функции плотности наблюдаемой случайной величины  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)})'$  в точке  $X$ , если  $\xi$  непрерывна, или вероятность  $P\{\xi = X|\Theta\}$ , если  $\xi$  дискретна (при условии, что значение неизвестного параметра равно  $\Theta$ ). По умолчанию предполагается, что наблюдения

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (3.2)$$

при фиксированном  $\Theta$  являются статистически взаимонезависимыми, т.е. образуют *случайную выборку* из анализируемой генеральной совокупности. Так что, получая исходные статистические данные (3.2), мы к имеющейся априорной информации о параметре (в виде функции  $p(\Theta)$ ) присоединяем соответствующую выборочную (*эмпирическую*) информацию.

Соответственно **функция правдоподобия**  $L(X_1, \dots, X_n|\Theta)$  (условная, при данном  $\Theta$ ) имеющихся наблюдений (3.2) определится (с учетом их взаимонезависимости) соотношением

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n|\Theta) = f(X_1|\Theta) \cdot f(X_2|\Theta) \cdot \dots \cdot f(X_n|\Theta). \quad (3.3)$$

**Вычисление апостериорного распределения**  $\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n)$  осуществляется с помощью формулы Байеса (3.1) (или ее непрерывного аналога), в которой роль события  $A_i$  играет событие, заключающееся в том, что значение оцениваемого параметра равно  $\Theta$ , а роль условия  $B$  — событие, заключающееся в том, что значения  $n$  наблюдений, произведенных в анализируемой генеральной совокупности, зафиксированы на уровнях  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Соответственно имеем:

$$\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n) = \frac{p(\Theta)L(X_1, \dots, X_n|\Theta)}{\int L(X_1, \dots, X_n|\Theta) \cdot p(\Theta)d\Theta}. \quad (3.4)$$

**Построение байесовских точечных и интервальных оценок** основано на использовании знания апостериорного распределения  $\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n)$ , задаваемого соотношением (3.4). В частности, в качестве байесовских точечных оценок  $\hat{\Theta}^{(6)}$  используют среднее или модальное значение этого распределения, т.е.:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{(cp)}^{(6)} &= \mathbf{E}(\Theta|X_1, \dots, X_n) = \int \Theta \bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n) d\Theta, \\ \hat{\Theta}_{(мод)}^{(6)} &= \arg \max_{\Theta} \bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отметим, что для определения общего вида апостериорной плотности  $\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n)$  нам достаточно знать только числитель правой части (3.4), так как знаменатель этого выражения играет роль нормирующего множителя и от  $\Theta$  не зависит (это существенно упрощает

Отметим также одно важное оптимальное свойство оценки  $\hat{\Theta}_{\text{ср}}^{(6)}$ . Пусть  $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$  — любая оценка параметра  $\Theta$ . Оказывается, если качество любой оценки  $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$  измерять так называемым *апостериорным байесовским риском*

$$R^{(6)}(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{E}\{(\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n) - \Theta)^2 | X_1, \dots, X_n\} = \\ = \int (\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n) - \Theta)^2 \bar{p}(\Theta | X_1, \dots, X_n) d\Theta$$

или его средним (усреднение — по всем возможным выборкам (3.2)) значением  $R_{\text{ср}}^{(6)}$ , то байесовская оценка (3.5) является наилучшей и в том и в другом смысле.

Для построения *байесовского доверительного интервала* для параметра  $\Theta$  необходимо вычислить по формуле (3.4) функцию  $\bar{p}(\Theta | X_1, \dots, X_n)$  апостериорного закона распределения параметра  $\Theta$ , а затем по заданной доверительной вероятности  $P_0$  определить  $100 \frac{1+P_0}{2}$  и  $100 \frac{1-P_0}{2}$  %-ные точки этого закона, которые и дают соответственно левый и правый концы искомой интервальной оценки.

Заметим, что байесовский способ оценивания может давать весьма ощутимый выигрыш в точности при *ограниченных* объемах выборок. В процессе же неограниченного роста объема выборки  $n$  оба подхода будут давать, в силу их состоятельности, все более похожие результаты.

«Узкие места» или три главных вопроса, возникающих при практической реализации байесовского подхода:

- i) как выбрать общий вид (т. е. параметрическое семейство  $\{p(\Theta; D)\}$ ) апостериорного распределения оцениваемого параметра?
- ii) как подобрать численные значения  $D_0$  параметров  $D$ , определяющие конкретный вид апостериорного распределения при уже сделанном выборе общего вида  $p(\Theta; D)$ ?
- iii) как преодолеваются трудности реализации формулы (3.4) при вычислении апостериорного распределения  $\bar{p}(\Theta | X_1, \dots, X_n)$ ?

### 3.2. Априорные распределения, сопряженные с наблюдаемой генеральной совокупностью (определение и условие существования)

В решении сформулированных выше трех главных вопросов практической реализации байесовского подхода существенную роль играют *распределения, сопряженные с наблюдаемой генеральной совокупностью*

(или, что то же, распределения, сопряженные с функцией правдоподобия  $L(X_1, \dots, X_n | \Theta)$ ).

**Определение 3.1.** Семейство априорных распределений  $G = \{p(\Theta; D)\}$  называется **сопряженным** по отношению к наблюдаемой генеральной совокупности  $f(X|\Theta)$  (или по отношению к функции правдоподобия  $L(X_1, \dots, X_n | \Theta)$ ), если и апостериорное распределение  $\bar{p}(\Theta | X_1, \dots, X_n)$ , вычисленное по формуле (3.4), снова принадлежит этому же семейству  $G$ .

Другими словами, семейство распределений  $G$  сопряжено с  $L(X_1, \dots, X_n | \Theta)$ , если оно замкнуто относительно операции (3.4) пересчета априорного распределения в апостериорное.

Таким образом, использование в качестве априорных законов распределения вероятностей (з.р.в.) сопряженных по отношению к  $L$  плотностей «расширяет» узкое место (iii): поскольку общий вид апостериорного з.р.в. в этом случае известен, остается лишь уметь пересчитывать значения его параметров  $D$  при переходе от априорного распределения к апостериорному.

Как мы увидим позже (см. ниже, п. 3.3), использование сопряженных з.р.в. в качестве априорных оказывается в широком классе случаев вполне естественным и оправданным, что позволяет получить ответ и на вопрос (i).

*Но всегда ли существует сопряженное по отношению к заданной функции  $L(X_1, X_2, \dots, X_n | \Theta)$  распределение, и если оно существует, то как его найти?*

**Условие существования сопряженного семейства априорных распределений:** если функция правдоподобия  $L(X_1, \dots, X_n | \Theta)$  представима в форме

$$L(X_1, \dots, X_n | \Theta) = v(T_1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_m(X_1, \dots, X_n); \Theta) \times \psi(X_1, \dots, X_n), \quad (3.6)$$

где  $T_j(X_1, \dots, X_n)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и  $\psi(X_1, \dots, X_n)$  — некоторые функции от наблюдений  $X_1, \dots, X_n$ , не зависящие от параметров  $\Theta$ , то существует семейство  $G = \{p(\Theta; D)\}$  априорных распределений, сопряженное с  $L(X_1, \dots, X_n | \Theta)$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Функции  $T_j(X_1, \dots, X_n)$ , участвующие в представлении (3.6) (если таковое существует), называются *достаточными статистиками* в задаче статистического оценивания параметров  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)'$ . Размерность  $m$  векторной достаточной статистики  $T(X_1, \dots, X_n) = (T_1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_m(X_1, \dots, X_n))$  конечна при  $n \rightarrow \infty$  и зависит от специфики функции  $L$  и размерности  $s$  оцениваемого параметра  $\Theta$ . Достаточные статистики играют важную роль в теории и приложениях математической статистики. В частности, Скопировано с сайта <http://www.infocentre.ru> разработка электронных библиотек для учебных и научных учреждений высшей школы. <http://www.infocentre.ru>

Проверка условия существования сопряженного априорного распределения на ряде примеров.

**Пример 3.1.** Анализируемая (наблюдаемая) генеральная совокупность нормальна с неизвестным значением среднего  $E\xi = \theta$  и известной дисперсией  $D\xi = \sigma_0^2$  (будем обозначать в дальнейшем подобный факт в форме  $\xi \in N_q(\theta; \sigma_0^2)$ , где  $\xi$  — наблюдаемая случайная величина, а нижний индекс при  $q$  определяет ее размерность; так что, если  $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)})'$  — вектор, то  $\xi \in N_k(\Theta; \Sigma_\xi)$  означает, что многомерная случайная величина размерности  $k$  распределена нормально с вектором средних значений  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)'$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_\xi$ ). В данном примере

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2} =$$

$$= e^{-\frac{n}{2\sigma_0^2} (\bar{x} - \theta)^2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.7)$$

Мы видим, что роль функции  $v(T(x_1 \dots x_n); \theta)$  из правой части (3.6) играет первый множитель из правой части (3.7), причем  $m = 1$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  (достаточная статистика), а следующие за  $v(\bar{x}; \theta)$  множители правой части (3.7) от  $\theta$  не зависят. Следовательно, семейство априорных, сопряженных с  $L$  распределений существует.

**Пример 3.2.**  $\xi \in N_1\left(\theta_1; \frac{1}{\theta_2}\right)$ , где и среднее значение  $\theta_1 = E\xi$ , и  $\theta_2$  — параметр точности ( $\theta_2 = \frac{1}{D\xi}$ ) являются неизвестными (т. е.  $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ ). Воспользовавшись тем же представлением (3.7) для функции правдоподобия  $L$ , убеждаемся, что  $T_1(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}$ ,  $T_2(x_1, \dots, x_n) = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  (достаточные статистики), так что в данном случае  $m = 2$  и семейство априорных, сопряженных (по отношению к  $L$ ) распределений существует.

**Пример 3.3.** Анализируется биномиально распределенная случайная величина  $\xi_\theta(M)$  — число «успехов» в серии из  $M$  испытаний Бернулли, где  $\theta$  — неизвестная вероятность «успеха» в одном таком

пусть  $\hat{\Theta}$  — некоторая несмещенная оценка параметров  $\Theta$  и  $\text{tr } \Sigma_{\hat{\Theta}} < \infty$ ; тогда  $\hat{\Theta}_1 = E(\hat{\Theta} | T)$  будет снова несмещенной оценкой параметров  $\Theta$ , причем  $\text{tr } \Sigma_{\hat{\Theta}_1} \leq \text{tr } \Sigma_{\hat{\Theta}}$  (под  $\Sigma_{\hat{\Theta}}$  понимаем ковариационную матрицу вектора  $\hat{\Theta}$ , а под  $\text{tr } \Sigma$  — след матрицы  $\Sigma$ ).  
 Скопировано с сайта [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru) Разработка электронных библиотек [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru)  
 http://учебники.рф/2000/преподавания.shtml

испытании, а  $M$  — общее число (известное) испытаний Бернулли в рассматриваемой серии, так что

$$f(x|\theta) = P\{\xi_0(M) = x|\theta\} = C_M^x \theta^x (1-\theta)^{M-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, M,$$

где  $C_M^x$  — число сочетаний из  $M$  элементов по  $x$ .

Наблюдаются  $n$  таких серий. Тогда

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n C_M^{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{M-x_i} = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n C_M^{x_i}.$$

где  $x_i$  — число «успехов» в  $i$ -й серии.

Поэтому в рамках общего представления (3.6) в данном случае имеем:  $m = 1$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$  — достаточная статистика, что подтверждает существование априорного, сопряженного с  $L$  распределения параметра  $\theta$ .

**Пример 3.4.** Анализируется отрицательно биномиально распределенная случайная величина  $\xi(\theta; K)$  — число испытаний в схеме Бернулли до  $K$ -го появления интересующего нас события, где  $\theta$  — неизвестная вероятность появления этого события при одном испытании, а  $K$  — некоторое заданное целое положительное число. Тогда

$$f(x|\theta) = P\{\xi(\theta; K) = x|\theta\} = C_{x-1}^{K-1} \theta^K (1-\theta)^{x-K}, \quad x = K, K+1, \dots,$$

так что

$$L(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n C_{x_i-1}^{K-1} \theta^K (1-\theta)^{x_i-K} = \theta^{Kn} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - Kn} \cdot \prod_{i=1}^n C_{x_i-1}^{K-1}.$$

Поэтому в рамках общего представления (3.6) в данном случае имеем:  $m = 1$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$  — достаточная статистика, что подтверждает существование априорного, сопряженного с  $L$  распределения параметра  $\theta$ .

**Пример 3.5.** В данном примере речь идет об оценивании параметра  $\theta$  пуассоновского з.р.в., т. е.

$$f(x|\theta) = P\{\xi = x|\theta\} = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

так что

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta} = e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i!} \right)$$

Сравнивая с общим представлением (3.6), в данном случае имеем:  $m = 1$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$  — достаточная статистика, что подтверждает существование априорного, сопряженного с  $L$  распределения параметра  $\theta$ .

**Пример 3.6.** Анализируется экспоненциально распределенная (без сдвига) случайная величина с неизвестным значением параметра масштаба  $\theta$ , т. е.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Соответственно:

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \begin{cases} \theta^n e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \theta} & \text{при } x_i \geq 0 \\ 0 & \text{при } x_i < 0. \end{cases}$$

В рамках общего представления (3.6) в данном случае имеем:  $m = 1$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$  — достаточная статистика, что подтверждает существование априорного, сопряженного с  $L$  распределения параметра  $\theta$ .

**Пример 3.7.** Анализируется случайная величина, распределенная равномерно на отрезке  $[0; \theta]$  при неизвестном значении параметра  $\theta$ , т. е.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{при } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta]. \end{cases}$$

Соответственно:

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \text{ при } \theta \geq x_{\max}(n) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}.$$

Следовательно, в рамках общего представления (3.6) имеем:  $m = 1$ ;  $T(x_1, \dots, x_n) = x_{\max}(n)$  — достаточная статистика, что подтверждает существование априорного, сопряженного с  $L$  распределения параметра  $\theta$ .

**Пример 3.8.** Анализируется модель распределения Парето с неизвестным значением параметра формы  $\theta$ , т. е.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}} & \text{при } x \geq x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases}$$

Соответственно:

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta^n x_0^{n\theta} \cdot \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{-(\theta+1)} = \theta^n \left( \frac{g_n}{x_0} \right)^{-n\theta} \cdot g_n^{-n},$$

где  $g_n = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$  — среднее геометрическое значение наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  анализируемой случайной величины. Следовательно, обращаясь к (3.6), имеем  $m = 1$ ,  $T(x_1 \dots x_n) = g_n$  — достаточная статистика, что подтверждает существование априорного, сопряженного с  $L$  распределения параметра  $\theta$ .

**Пример 3.9.** Рассмотрим классическую линейную модель множественной регрессии (КЛММР, см., например, [Айвазян (2010)], п. 4.1, 4.2) с нормальными, в среднем нулевыми, взаимонезависимыми и гомоскедастичными остатками  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ :

$$Y = X\Theta + \varepsilon, \quad (3.8)$$

где

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)' \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k)} \\ 1 & x_2^{(1)} & \dots & x_2^{(k)} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

— наблюдаемые значения, соответственно, зависимой ( $y$ ) и объясняющих ( $X = (1, x^{(1)}, \dots, x^{(k)})'$ ) переменных,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$  — случайные регрессионные остатки, а  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)'$  и  $h = (D\varepsilon_i)^{-1}$  — неизвестные значения параметров модели. Напомним, что значения  $X$  в соответствии с требованиями КЛММР являются неслучайными и что упомянутые выше свойства регрессионных остатков формулируются в форме условий

$$\varepsilon \in N_n \left( \mathbf{0}; \frac{1}{h} \mathbf{I}_n \right), \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица размерности  $n$ , ковариационная матрица остатков  $\Sigma_\varepsilon = \frac{1}{h} \mathbf{I}_n$ , а параметр  $h = (D\varepsilon_i)^{-1}$  обычно называют *параметром точности*.

С учетом (3.8)~(3.9) функция правдоподобия наблюдений  $(X, Y)$  может быть представлена в форме:

$$L(X, Y | \Theta; h) = \frac{h^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{h}{2}(Y - X\Theta)'(Y - X\Theta)} \quad (3.10)$$

Но  $(Y - X\Theta)'(Y - X\Theta) = (Y - X\hat{\Theta} + X\hat{\Theta} - X\Theta)'(Y - X\hat{\Theta} + X\hat{\Theta} - X\Theta) = [(Y - X\hat{\Theta}) + X(\hat{\Theta} - \Theta)]'[(Y - X\hat{\Theta}) + X(\hat{\Theta} - \Theta)]$ , где  $\hat{\Theta} = (X'X)^{-1}X'Y$  — оценка метода наименьших квадратов параметров регрессии  $\Theta$ .

Поэтому

$$(Y - X\Theta)'(Y - X\Theta) = (Y - X\hat{\Theta})'(Y - X\hat{\Theta}) + (\hat{\Theta} - \Theta)'X'X(\hat{\Theta} - \Theta), \quad (3.11)$$

так как  $(Y - X\hat{\Theta})'X(\hat{\Theta} - \Theta) = [X(\hat{\Theta} - \Theta)]'(Y - X\hat{\Theta}) = (Y'X - \hat{\Theta}'X'X)(\hat{\Theta} - \Theta) = [Y'X - ((X'X)^{-1}X'Y)' \cdot (X'X)](\hat{\Theta} - \Theta) = [Y'X - Y'X(X'X)^{-1}(X'X)](\hat{\Theta} - \Theta) = 0$ .

Возвращаясь к (3.10) и выражая в (3.11) сумму квадратов МНК-оцененных остатков  $(Y - X\hat{\Theta})'(Y - X\hat{\Theta})$  через оценку остаточной дисперсии  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1}(Y - X\hat{\Theta})'(Y - X\hat{\Theta})$ , имеем:

$$L(X; Y|\Theta; h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot h^{\frac{n}{2}} e^{-\left(\frac{n-k-1}{2}\hat{\sigma}^2\right)h - \frac{h}{2}(\hat{\Theta} - \Theta)'X'X(\hat{\Theta} - \Theta)}. \quad (3.12)$$

Отметим, что  $\sigma^2$  и  $\hat{\Theta}$  в конечном счете определяются по  $Y'Y$ ,  $X'Y$  и  $X'X$ , так что и в данном случае функция правдоподобия  $L$  представима в форме (3.6), в которой набор достаточных статистик  $T(X; Y)$  конечен (при  $n \rightarrow \infty$ ) и определяется статистиками  $Y'Y$  и  $X'Y$ . Следовательно, существует априорное распределение параметров  $\Theta$  и  $h$ , сопряженное с  $L$ .

### 3.3. Генезис априорных сопряженных распределений

Оказывается, для широкого класса наблюдаемых генеральных совокупностей, функции правдоподобия которых допускают представление (3.6) (т.е. эти генеральные совокупности располагают сопряженным с  $L$  априорным распределением своих параметров), справедливо следующее утверждение о генезисе сопряженных априорных распределений:

*если в байесовском подходе стартовать с априорного распределения, не несущего никакой дополнительной по отношению к имеющимся статистическим данным полезной информации об оцениваемых параметрах (такие распределения мы будем называть «распределениями, отражающими скудость априорных знаний», см. ниже п. 3.3.1), то первый же переход от нее по формуле*



*распределений, сопряженному с наблюдаемой генеральной совокупностью<sup>2</sup>.*

Именно этот прием поиска априорного распределения, сопряженного с анализируемой функцией правдоподобия, представимой в формуле (3.6), и предлагается использовать в байесовском подходе.

### 3.3.1. Априорные распределения, отражающие «скудость априорных знаний» (САЗ-априорные распределения)

Для математической формализации ситуаций, в которых исследователь не располагает никакой полезной **априорной** информацией о значениях оцениваемого параметра, Джеффрис (см. [Jeffreys (1957)]) предложил следующие два правила выбора соответствующего априорного распределения:

- (а) *если оцениваемый скалярный параметр  $\theta$  может (теоретически) принимать значения на конечном интервале  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$  или на бесконечном интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то априорную функцию плотности  $p(\theta)$  следует считать постоянной на соответствующем интервале;*
- (б) *если же из смысла оцениваемого параметра вытекает, что он может принимать любые положительные значения, то следует считать постоянной на всей числовой прямой  $(-\infty; +\infty)$  функцию плотности распределения логарифма от значения параметра, т. е.  $p(\ln \theta) = \text{const}$  при  $\theta \in (0; +\infty)$ .*

Будем называть такие априорные распределения «*распределениями, отражающими скудость априорных знаний*», или коротко — «**САЗ-априорными распределениями**». Соответственно их одномерные функции плотности будем обозначать  $p_{\text{САЗ}}(\theta)$ , а многомерные —  $p_{\text{САЗ}}(\Theta)$ .

Тот факт, что для определенных таким образом на бесконечной прямой (полупрямой) априорных распределений *нарушается известное правило нормировки* функции плотности вероятности (поскольку при этом  $\int p_{\text{САЗ}}(\theta) d\theta \neq 1$ , но  $\int p_{\text{САЗ}}(\theta) d\theta = \infty$ , где интегрирование

<sup>2</sup>Строгое доказательство этого утверждения для однопараметрического экспоненциального семейства наблюдаемых генеральных совокупностей см. в [Ghosh et all (2006), п. 5.1.5]. Однако справедливость этого утверждения подтверждается (непосредственной проверкой) и для весьма широкого класса наблюдаемых генеральных совокупностей, принадлежащих экспоненциальному семейству.

проводится по всем возможным значениям  $\theta$ ), не доставляет «технических неудобств»: во-первых, пересчет такой «несобственной» априорной функции плотности  $p_{\text{САЗ}}(\theta)$  в апостериорную по формуле (3.4) дает уже обычную (собственную) функцию плотности  $\bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta|X_1, \dots, X_n)$ , а во-вторых, при любых сколь угодно больших значениях  $C$  плотность

$$p_{\text{САЗ}}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2C} & \text{при } \theta \in [-C; +C], \\ 0 & \text{при } \theta \notin [-C; +C] \end{cases}$$

минимизирует энтропийную меру  $H = \int_{-C}^C p(\theta) \ln p(\theta) d\theta$  информации, содержащейся в плотности  $p(\theta)$  относительно параметра  $\theta$  (см., например, [Зельнер (1980), с. 59]). Последнее обстоятельство подтверждает обоснованность использования равномерных распределений  $p_{\text{САЗ}}(\theta) = \text{const}$  или  $p_{\text{САЗ}}(\ln \theta) = \text{const}$  в качестве априорных распределений, отражающих скудость априорных знаний (или — САЗ-априорных распределений).

**З а м е ч а н и е 1.** Общий вид апостериорного распределения  $\bar{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)$ , вычисляемого по формуле (3.4), определяется с точностью до нормирующей константы лишь числителем правой части этой формулы. Поэтому в дальнейшем при анализе равенств, справедливых с точностью до нормирующей константы, мы будем использовать знак  $\sim$ . Следуя этому правилу, сама формула (3.4) может быть представлена в виде:

$$\bar{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) \sim p(\theta) \cdot L(X_1, \dots, X_n|\theta) \tag{3.4'}$$

**З а м е ч а н и е 2.** При анализе *многомерных* параметров  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)'$  априорные, в том числе САЗ-априорные, распределения обычно предполагают статистическую независимость компонент  $\theta_1, \dots, \theta_s$ , т. е.

$$p(\Theta) = p(\theta_1) \cdot p(\theta_2) \cdot \dots \cdot p(\theta_s). \tag{3.13}$$

И, наконец, в заключение этого пункта определим вид априорной плотности  $p(\theta)$  для случая  $p(\ln \theta) = \text{const}$ , т. е. в ситуации, когда параметр  $\theta$  может принимать любые, но только положительные значения.

Пусть  $F_{\theta}(y) = P\{\theta < y\}$  — функция распределения параметра  $\theta$ . Тогда

$$F_{\theta}(y) = P\{\theta < y\} = P\{\ln \theta < \ln y\} = F_{\ln \theta}(\ln y).$$

Соответственно, функция плотности распределения  $\theta$  будет

так как по условию  $f_{\ln \theta}(\ln y) = p(\ln \theta) = \text{const}$ . Так что в сокращенной записи имеем для положительнозначных параметров  $\theta$

$$p_{\text{САЗ}}(\theta) \sim \frac{1}{\theta}, \quad (3.14a)$$

а для параметров  $\theta$  с возможными значениями, заполняющими всю числовую прямую,

$$p_{\text{САЗ}}(\theta) = \text{const}. \quad (3.14б)$$

### 3.3.2. Общий подход к выводу семейства априорных распределений, сопряженных с наблюдаемой генеральной совокупностью

Общий подход к выводу семейства априорных распределений, сопряженных с наблюдаемой генеральной совокупностью, основан на утверждении об их генезисе, сформулированном в начале п. 3.3. Из этого утверждения вытекает, в частности, следующая общая схема определения такого семейства.

Шаг 1: проверка условия (3.6) существования семейства априорных распределений, сопряженных с функцией правдоподобия  $L$  для наблюдаемой генеральной совокупности.

Шаг 2: если функция правдоподобия  $L$  допускает представление (3.6) (т. е. если существует семейство сопряженных априорных распределений  $p(\Theta; D)$ ), то осуществляется вывод САЗ-апостериорного распределения  $\bar{p}_{\text{САЗ}}(\Theta|X_1, \dots, X_n)$  по формуле (3.4'), т. е.

$$\bar{p}_{\text{САЗ}}(\Theta|X_1, \dots, X_n) \sim p_{\text{САЗ}}(\Theta) \cdot L(X_1, \dots, X_n|\Theta). \quad (3.15)$$

Правая часть соотношения (3.15) и будет определять общий вид семейства априорных распределений, сопряженных с наблюдаемой генеральной совокупностью, характеризуемой функцией правдоподобия  $L(X_1, X_2, \dots, X_n|\Theta)$ .

Продемонстрируем реализацию этой общей схемы на рассмотренных выше примерах 3.1~3.9. Очевидно нам остается реализовать лишь шаг 2 из этой схемы, так как шаг 1 уже был реализован выше (см. п. 3.2).

**Пример 3.1 (продолжение).**  $\xi \in N_1(\theta; \sigma_0^2)$ , где  $\theta = \mathbf{E}\xi$  — оцениваемый (неизвестный) параметр, а  $\sigma_0^2 = \mathbf{D}\xi$  — известное (заданное) значение дисперсии наблюдаемой случайной величины. Ранее было установлено (см. выше, пример 3.1, формулу (3.7)), что в этом случае существует семейство сопряженных априорных распределений параметра  $\theta$ .

Определим  $p_{\text{САЗ}}(\theta) = \text{const}$  и с учетом того, что  $L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim e^{-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x}-\theta)^2}$  (см. выше, формулу (3.7)), имеем:

$$\bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim e^{-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x}-\theta)^2}.$$

Но правая часть этого соотношения представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$ ) плотность нормального распределения со средним значением  $\bar{x}$  и дисперсией  $\sigma_0^2/n$ . Следовательно, семейство сопряженных априорных распределений неизвестного среднего значения  $\theta$  нормально распределенной генеральной совокупности (при известной дисперсии  $\sigma_0^2 = D\xi$ ) *само принадлежит классу нормальных законов распределения*.

**Пример 3.2** (продолжение).  $\xi \in N_1(\theta; \frac{1}{h})$ , где и среднее значение  $\theta$  и параметр точности  $h = 1/D\xi$  являются неизвестными (т.е.  $\Theta = (\theta, h)$ ). Ранее было установлено (см. выше, пример 3.2), что в этом случае существует семейство двумерных сопряженных априорных распределений параметра  $\Theta = (\theta, h)$ . Определим  $p_{\text{САЗ}}(\theta) = \text{const}$  и  $p_{\text{САЗ}}(h) \sim \frac{1}{h}$  и с учетом (3.13) и того, что

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n | \theta, h) &\sim h^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2} = \\ &= h^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{h}{2} \left[ n(\theta - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]} \sim (nh)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{nh}{2}(\theta - \bar{x})^2} \times \\ &\times h^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) h}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

имеем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta, h | x_1, \dots, x_n) &\sim p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot p_{\text{САЗ}}(h) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta, h) \sim \\ &\sim (nh)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{nh}{2}(\theta - \bar{x})^2} \cdot h^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) h}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Но правая часть (3.17) представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$  и  $h$ ) *плотность двумерного гамма-нормального распределения* (см. Приложение П2.2а)

$$p(\theta, h) \sim (\lambda_0 h)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_0 h}{2}(\theta - \theta^0)^2} \cdot h^{\alpha-1} e^{-\beta h} \tag{3.18}$$

с параметрами  $\lambda_0 = n$ ,  $\theta^0 = \bar{x}$ ,  $\alpha = \frac{n-1}{2}$  и  $\beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

Следовательно, семейство сопряженных априорных распределений двумерного параметра  $\Theta = (\theta, h)$ , где  $\theta$  и  $h$ , соответственно, среднее значение и параметр точности наблюдаемой нормально распределенной генеральной совокупности, само принадлежит классу нормальных законов распределения.

совокупности, *принадлежит классу двумерных гамма-нормальных распределений* (3.18).

**Пример 3.3** (продолжение). Наблюдаемая случайная величина  $\xi_\theta(M)$  подчиняется биномиальному з.р.в. с неизвестным значением вероятности «успеха»  $\theta$  и заданным числом  $M$  испытаний Бернулли.

Ранее было установлено (см. выше, пример 3.3), что существует семейство сопряженных априорных распределений параметра  $\theta$ .

Определим  $p_{\text{САЗ}}(\theta) = 1$  для  $\theta \in (0; 1)$  и с учетом того, что  $L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1 - \theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) &\sim p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \\ &\sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1 - \theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Но правая часть соотношения (3.19) представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$ ) *плотность бета-распределения*

$$p(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \quad (3.20)$$

с параметрами  $a = \sum_{i=1}^n x_i + 1$  и  $b = nM - \sum_{i=1}^n x_i + 1$  (участвующая в правой части (3.20) в выражении нормирующего множителя функция  $\Gamma(z)$  это известная гамма-функция Эйлера, т. е.  $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ ).

Следовательно, семейство сопряженных априорных распределений параметра  $\theta$  (вероятности «успеха») наблюдаемой биномиально распределенной генеральной совокупности *принадлежит классу бета-распределений* (3.20).

**Пример 3.4** (продолжение). Ранее было установлено (см. выше, пример 3.4), что *отрицательно биномиально распределенная* случайная величина  $\xi(\theta; K)$  имеет сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$  — вероятности «успеха» в одном испытании Бернулли. Как и в предыдущем примере, определяем  $p_{\text{САЗ}}(\theta) = 1$  (для  $\theta \in (0; 1)$ ). Тогда с учетом того, что  $L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{K^n} (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - K^n}$  (см. выше, пример 3.4), имеем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) &\sim p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \\ &\sim \theta^{K^n} (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - K^n} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Правая часть (3.21) представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$ ) *плотность бета-распределения* (3.20) с параметрами  $a = Kn + 1$  и  $b = \sum_{i=1}^n x_i - Kn + 1$ .

Так что семейство сопряженных априорных распределений параметра  $\theta$  (вероятности «успеха») наблюдаемой отрицательно биномиально распределенной случайной величины  $\xi(\theta; K)$  *принадлежит классу бета-распределений* (3.20).

**Пример 3.5** (продолжение). Ранее было установлено (см. выше, пример 3.5), что параметр  $\theta$  пуассоновского з.р.в. имеет сопряженное априорное распределение. Из смысла параметра  $\theta$  следует, что он может принимать только положительные значения, поэтому определяем  $p_{\text{САЗ}}(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$ . Тогда с учетом того, что  $L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-n\theta}$  (см. выше, пример 3.5), имеем:

$$\bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim p(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} \cdot e^{-n\theta}. \quad (3.22)$$

Правая часть (3.22) представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$ ) *плотность гамма-распределения*

$$p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0 \quad (3.23)$$

с параметрами  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i$  и  $\beta = n$ .

Следовательно, семейство сопряженных априорных распределений параметра  $\theta$  наблюдаемой генеральной совокупности *принадлежит классу гамма-распределений* (3.23).

**Пример 3.6** (продолжение). Ранее было установлено (см. выше, пример 3.6), что параметр масштаба  $\theta$  экспоненциального распределения имеет сопряженное априорное распределение. Поскольку  $\theta > 0$ , определяем  $p_{\text{САЗ}}(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$ . Тогда с учетом того, что  $L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta^n \cdot e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\theta}$  (см. выше, пример 3.6), имеем:

$$\bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{n-1} \cdot e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\theta}. \quad (3.24)$$

Правая часть (3.24) определяет (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$ ) *плотность гамма-распределения* (3.23)

с параметрами  $\alpha = n$  и  $\beta = \sum_{i=1}^n x_i$ . Так что семейство сопряженных

априорных распределений параметра масштаба  $\theta$  экспоненциально распределенной генеральной совокупности *принадлежит классу гамма-распределений* (3.23).

**Пример 3.7** (продолжение). Как мы видели (см. выше, пример 3.7), и при равномерно распределенной на отрезке  $[0; \theta]$  случайной величине неизвестный параметр  $\theta$  имеет сопряженное априорное распределение. Поскольку параметр  $\theta$  может принимать любые *положительные* значения, определяем  $p_{\text{САЗ}}(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$ . Тогда с учетом того, что  $L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n$  (и  $x_{\max}(n) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} < \theta$ ), имеем

$$\bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim \begin{cases} p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+1} & \text{при } \theta \geq x_{\max}(n), \\ 0 & \text{при } \theta < x_{\max}(n). \end{cases} \quad (3.25)$$

Но правая часть соотношения (3.25) представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\theta$ ) *плотность распределения Парето* вида

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & \text{при } \theta \geq \theta_{\min} \\ 0 & \text{при } \theta < \theta_{\min} \end{cases} \quad (3.26)$$

с параметром формы  $\alpha = n$  и некоторым параметром сдвига  $\theta_{\min} \geq x_{\max}(n)$ . Следовательно, семейство сопряженных априорных распределений параметра  $\theta$  равномерно (на  $[0; \theta]$ ) распределенной случайной величины *принадлежит классу распределений Парето* вида (3.26).

**Пример 3.8** (продолжение). В данном примере речь идет о *наблюдаемой* генеральной совокупности, подчиняющейся распределению Парето с неизвестным значением параметра формы  $\theta$  и некоторым заданным значением параметра сдвига  $x_0$  (см. выше, пример 3.8), так что

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta^n \left(\frac{g_n}{x_0}\right)^{-n\theta} \cdot g_n^{-n} \sim \theta^n \cdot e^{-[n \ln\left(\frac{g_n}{x_0}\right)] \cdot \theta},$$

где  $g_n = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$ . Но тогда САЗ-апостериорная функция плотности распределения параметра  $\theta$  будет иметь вид (с учетом того, что  $p_{\text{САЗ}}(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$ )

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{САЗ}}(\theta | x_1, \dots, x_n) &\sim p_{\text{САЗ}}(\theta) \cdot L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \\ &\sim \theta^{n-1} \cdot e^{-[n \ln\left(\frac{g_n}{x_0}\right)] \cdot \theta} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Мы видим, что правая часть соотношения (3.27) определяет (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от параметра  $\theta$ ) плотность гамма-распределения (3.23) с параметром  $\alpha = n$  и параметром  $\beta = n \ln \left( \frac{g_n}{x_0} \right)$ , так что сопряженные априорные распределения параметра формы  $\theta$  наблюдаемой Парето-распределенной генеральной совокупности принадлежат семейству гамма-распределений.

**Пример 3.9** (продолжение). Выше при рассмотрении нормальной классической линейной модели множественной регрессии с неизвестными значениями коэффициентов регрессии  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)'$  и параметра точности  $h = \frac{1}{\sigma^2}$  (где  $\sigma^2 = \mathbf{D}\varepsilon_i$ ) мы убедились в том, что у параметров  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, h$  существуют сопряженные априорные распределения. Определим теперь общий вид сопряженного априорного распределения  $p(\Theta; h)$  параметров  $\Theta$  и  $h$ . С учетом «Замечания 2» (см. выше) и положительных значений параметра  $h$  имеем:

$$p_{\text{саз}}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k; h) = p_{\text{саз}}(\theta_0) \cdot p_{\text{саз}}(\theta_1) \cdot \dots \cdot p_{\text{саз}}(\theta_k) \cdot p_{\text{саз}}(h) \sim \frac{1}{h}.$$

Используя полученное ранее выражение (3.12) для функции правдоподобия  $L(\mathbf{X}; Y|\Theta; h)$ , имеем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{саз}}(\Theta; h|\mathbf{X}; Y) &\sim p_{\text{саз}}(\Theta; h) \cdot L(\mathbf{X}; Y|\Theta; h) \sim \frac{1}{h} \cdot h^{\frac{n}{2}} \times \\ &\times e^{-\left(\frac{n-k-1}{2}\hat{\sigma}^2\right)h} \times e^{-\frac{h}{2}(\hat{\Theta}-\Theta)'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\hat{\Theta}-\Theta)} = h^{\frac{n-k-1}{2}-1} \times \\ &\times e^{-\left(\frac{n-k-1}{2}\hat{\sigma}^2\right)h} \times h^{\frac{k+1}{2}} \times e^{-\frac{h}{2}(\hat{\Theta}-\Theta)'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\hat{\Theta}-\Theta)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Но правая часть соотношения (3.28) определяет (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от  $\Theta$  и  $h$ ) так называемое *многомерное гамма-нормальное распределение* с параметром сдвига  $\hat{\Theta}$ , матрицей точности  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$  и параметрами  $\alpha = \frac{n-k-1}{2}$  и  $\beta = \frac{n-k-1}{2}\hat{\sigma}^2$  (подробнее о многомерном гамма-нормальном распределении и его свойствах см. в Приложении П2.26). Напомним, что  $\hat{\Theta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'Y$  — это МНК-оценка параметров регрессии  $\Theta$ , а  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1}(Y - \mathbf{X}\hat{\Theta})' \times (Y - \mathbf{X}\hat{\Theta})$  — оценка остаточной дисперсии  $\sigma^2$ .

Таким образом, сопряженные априорные распределения параметров  $(\Theta; h)$  нормальной классической линейной множественной регрессии имеют общий вид

$$p(\Theta; h) \sim h^{\frac{k+1}{2}} |\Lambda_0|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{h}{2}(\Theta-\Theta_0)'\Lambda_0(\Theta-\Theta_0)} \cdot h^{\alpha-1} e^{-\beta h}, \quad (3.29)$$

в котором конкретное задание векторного параметра сдвига  $\Theta_0$ ,  $(k+1) \times (k+1)$  матрицы точности  $\Lambda_0$  и скалярных параметров  $\alpha$  и  $\beta$



однозначно определяет априорный закон распределения параметров  $\Theta$  и  $h$  (напомним, что  $k + 1$  — это общее число объясняющих переменных, включая свободный член, в анализируемой модели регрессии).

Очевидно, семейство многомерных гамма-нормальных распределений (3.29) является многомерным обобщением двумерного гамма-нормального распределения (3.18).

### 3.3.3. Рекомендации по подбору конкретных значений параметров в сопряженных априорных распределениях

Использование, в качестве априорных, законов распределения вероятностей (з.р.в.), *сопряженных* с наблюдаемой генеральной совокупностью (в ситуациях, когда они существуют), позволяет нам определить их *общий вид*, т. е. задает целое *семейство* априорных распределений  $\{p(\Theta; D)\}$ . Однако при реализации байесовского подхода мы должны оперировать *конкретным* априорным распределением, что требует знания числовых значений  $D_0$  параметров  $D$ , от которых наш априорный з.р.в. зависит. *Как же подбирать эти значения  $D_0$  в каждом конкретном случае?* Ниже описывается один из возможных подходов к решению данной задачи.

В широком классе ситуаций можно исходить из того, что нам известны априорные средние значения оцениваемого параметра  $\Theta_0 = \mathbf{E}\Theta = (\mathbf{E}\theta_1, \mathbf{E}\theta_2, \dots, \mathbf{E}\theta_s)'$  и их среднеквадратические ошибки  $\Delta_1 = \sqrt{\mathbf{D}\theta_1}, \Delta_2 = \sqrt{\mathbf{D}\theta_2}, \dots, \Delta_s = \sqrt{\mathbf{D}\theta_s}$ . Тогда параметры априорного распределения, как правило, могут быть определены *методом моментов* (в случае многомерного параметра  $\Theta$  — с учетом «Замечания 2» о статистической независимости компонент вектора  $\Theta$  в априорном распределении, см. (3.13)).

Продемонстрируем реализацию этого подхода на рассмотренных выше примерах.

**1) Определение параметров априорного гамма-распределения** (см. формулу (3.23) и примеры 3.5, 3.6, 3.8). Как известно (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 3.2.4) среднее значение ( $\mathbf{E}\theta$ ) и дисперсия ( $\mathbf{D}\theta$ ) гамма-распределения выражаются через параметры  $\alpha$  и  $\beta$  этого распределения по формулам:

$$\mathbf{E}\theta = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \mathbf{D}\theta = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Подставляя в эти соотношения вместо  $\mathbf{E}\theta$  и  $\mathbf{D}\theta$ , соответственно, заданные значения  $\theta_0$  и  $\Delta^2$ , получаем в качестве решений системы из

двух уравнений (относительно  $\alpha$  и  $\beta$ ):

$$\alpha = \frac{\theta_0^2}{\Delta^2}, \quad \beta = \frac{\theta_0}{\Delta^2}. \tag{3.30}$$

2) **Определение параметров априорного бета-распределения** (см. формулу (3.20) и примеры 3.3 и 3.4). Используя выражения для среднего и дисперсии бета-распределения (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 3.2.5) и решая систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{E}\theta = \frac{a}{a+b} = \theta_0 \\ \mathbf{D}\theta = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = \Delta^2 \end{cases}$$

относительно  $a$  и  $b$ , получаем:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\theta_0^2(1 - \theta_0)}{\Delta^2} - \theta_0 \\ b &= \left( \frac{\theta_0^2(1 - \theta_0)}{\Delta^2} - \theta_0 \right) \frac{1 - \theta_0}{\theta_0}. \end{aligned}$$

3) **Определение параметров априорного распределения Парето** (см. формулу (3.26) и пример 3.7). В данном случае параметр формы  $\alpha$  и параметр сдвига  $\theta_{\min}$  определяются по заданным значениям  $\theta_0 = \mathbf{E}\theta$  и  $\Delta^2 = \mathbf{D}\theta$  из системы уравнений (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 3.1.9)

$$\begin{cases} \mathbf{E}\theta = \frac{\alpha\theta_{\min}}{\alpha-1} = \theta_0, \\ \mathbf{D}\theta = \frac{\alpha\theta_{\min}^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \Delta^2. \end{cases} \tag{3.32}$$

Решение этой системы относительно  $\alpha$  и  $\theta_{\min}$  дает:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{1 + \frac{\theta_0^2}{\Delta^2}}, \\ \theta_{\min} &= \frac{1}{\alpha} \theta_0 \cdot (\alpha - 1). \end{aligned} \tag{3.32'}$$

4) **Определение параметров двумерного гамма-нормального распределения** (см. формулу (3.18) в примере 3.2). Из свойств двумерного гамма-нормального распределения следует (см. Приложение П2.2а), что частное априорное распределение параметра  $h$  есть гамма-распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому, воспользовавшись заданными значениями  $h_0 = \mathbf{E}h$  и  $\Delta_h^2 = \mathbf{D}h$ , составляем систему из двух уравнений относительно  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} \mathbf{E}h = \frac{\alpha}{\beta} = h_0 \\ \mathbf{D}h = \frac{\alpha}{\beta^2} = \Delta_h^2. \end{cases}$$

Получаем решение:

$$\alpha = \frac{h_0^2}{\Delta_h^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{h_0}{\Delta_h^2}. \quad (3.33)$$

Для определения параметра  $\lambda_0$  и параметра сдвига  $\theta^0$  воспользуемся тем, что частное априорное распределение параметра сдвига  $\theta$  есть обобщенное распределение Стьюдента с  $2\alpha$  степенями свободы, параметром сдвига  $\theta$  и параметром точности, равным  $\lambda_0 \frac{\alpha}{\beta}$  (сведения о  $t(2\alpha|\theta_0; \lambda_0 \frac{\alpha}{\beta})$ -распределении см. в Приложении П2.1а). Из свойств этого распределения следует, что  $\mathbf{E}t(2\alpha|\theta_0; \lambda_0 \frac{\alpha}{\beta}) = \theta_0$  и  $\mathbf{D}t(2\alpha|\theta_0; \lambda_0 \frac{\alpha}{\beta}) = \frac{\beta}{\lambda_0 \cdot \alpha} \cdot \frac{2\alpha}{2\alpha-2}$ , так что при заданных значениях  $\theta_0 = \mathbf{E}\theta$  и  $\Delta_\theta^2 = \mathbf{D}\theta$  имеем:

- значение параметра сдвига  $\theta^0$  в распределении (3.18) равно  $\theta_0$ ;
- $\Delta_\theta^2 = \frac{\beta}{\lambda_0 \cdot \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}$ , откуда  $\lambda_0 = \frac{1}{\Delta_\theta^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha-1}$  (3.34)

(напомним, что  $\alpha$  и  $\beta$  уже определены соотношениями (3.33)).

**5) Определение параметров многомерного гамма-нормального распределения** (см. формулу (3.29) в примере 3.9). Воспользуемся свойствами многомерного гамма-нормального распределения (см. Приложение П2.26). В соответствии с ними:

- (i) частное распределение числового сомножителя  $h$  матрицы точности  $h\Lambda_0$  нормальной части распределения (3.29) является гамма-распределением с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ ;
- (ii) частное распределение параметра  $\Theta$  есть обобщенное  $(k+1)$ -мерное распределение Стьюдента с  $2\alpha$  числом степеней свободы, параметром сдвига  $\Theta_0$  и матрицей точности  $B = \frac{\alpha}{\beta} \Lambda_0$  (мы обозначаем его как  $t(2\alpha|\Theta_0; B)$ -распределение).

Свойство (i) позволяет (при заданных значениях  $h_0 = \mathbf{E}h$  и  $\Delta_h^2 = \mathbf{D}h$ ) определить значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  по той же формуле (3.33).

Свойство (ii), дополненное «Замечанием 2» и правилами вычисления вектора средних значений и ковариационной матрицы  $(k+1)$ -мерной случайной величины  $t(2\alpha|\Theta_0; \frac{\alpha}{\beta} \Lambda_0)$  (см. Приложение П2.16), позволяет определить остальные параметры распределения (3.29) — параметр сдвига  $\Theta_0$  и элементы матрицы  $\Lambda_0$ . Действительно:

$$\mathbf{E}\Theta = \mathbf{E}t\left(2\alpha|\Theta_0; \frac{\alpha}{\beta} \Lambda_0\right) = \Theta_0$$

$$\Sigma_{\theta} = \Sigma_{t(2\alpha|\Theta_0; \frac{\alpha}{\Theta_0} \Lambda_0)} = \frac{2\alpha}{2\alpha - 2} \left( \frac{\alpha}{\beta} \Lambda_0 \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_0^2 & & & \mathbf{0} \\ & \Delta_1^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \Delta_k^2 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

где  $\Delta_j^2$  — заданные значения априорных дисперсий компонент вектора  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Таким образом, векторный параметр сдвига в распределении (3.29) определяется заданным вектором априорных средних значений  $\Theta_0$ , а диагональные элементы  $\lambda_0^{(j)}$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) матрицы  $\Lambda_0$  определяются из уравнений (3.35) по формулам:

$$\lambda_0^{(j)} = \frac{1}{\Delta_j^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad (3.36)$$

где значения  $\alpha$  и  $\beta$  определены соотношениями (3.33).

### 3.4. Пересчет значений параметров при переходе от априорного сопряженного распределения к апостериорному

Поскольку по определению семейство сопряженных априорных распределений  $\{p(\Theta; D)\}$  замкнуто относительно операции (3.4) пересчета априорного распределения в апостериорное, то общий вид апостериорного распределения  $\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n)$  при использовании сопряженных априорных распределений нам известен, и нам лишь надо уметь пересчитывать параметры  $\tilde{D}(X_1, \dots, X_n)$  этого апостериорного распределения по заданным параметрам  $D_0$  априорного распределения и имеющимся наблюдениям  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

*Общая схема такого пересчета следующая.* Пусть  $\{p(\Theta; D)\}$  — семейство априорных распределений, сопряженных с функцией правдоподобия  $L(x_1, \dots, x_n|\Theta)$  имеющихся у нас наблюдений ( $D = (d_1, \dots, d_q)$  — вектор параметров, от которых зависит сопряженное априорное распределение  $p(\Theta; D)$ ), и пусть  $D_0$  — заданные (известные) значения параметров  $D$  в анализируемом случае. Тогда с помощью ряда тождественных преобразований правая часть соотношения

приводится с точностью до множителей, не зависящих от  $\Theta$ , к виду  $p(\Theta; D(X_1, \dots, X_n))$ , где последняя функция принадлежит семейству  $\{p(\Theta; D)\}$ , а каждая из компонент  $d_j(X_1, \dots, X_n)$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) вектора параметров  $D(X_1, \dots, X_n)$  является функцией от  $D_0$  и  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

Продемонстрируем реализацию этой общей схемы на наших примерах (с разной степенью подробности).

**Пример 3.1** (продолжение). В данном примере  $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \sim e^{-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\bar{x} - \theta)^2}$  (см. (3.7)),  $p(\theta; D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_0} e^{-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\Delta_0^2}}$  (т.е.  $d_1 = \theta_0, d_2 = \Delta_0^2$ ), так что

$$\bar{p}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim e^{-\frac{(\theta - d_1)^2}{2d_2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2/n}(\bar{x} - \theta)^2} \sim e^{-\frac{1}{2\tilde{d}_2}(\theta - \tilde{d}_1)^2},$$

где

$$\tilde{d}_1(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{E}(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2/n} \cdot \bar{x} + \frac{1}{\Delta_0^2} \cdot \theta_0}{\frac{1}{\sigma_0^2/n} + \frac{1}{\Delta_0^2}} \quad (3.38)$$

и

$$\tilde{d}_2(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{D}(\theta | x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{\sigma_0^2/n} + \frac{1}{\Delta_0^2} \right)^{-1}.$$

Необходимые промежуточные выкладки нацелены на выделение полного квадрата разности  $(\theta - \tilde{d}_1)^2$  из выражения  $\frac{1}{\sigma_0^2/n}(\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2\sigma_0^2/n}(\theta - \bar{x})^2$  и не представляют принципиальных трудностей.

Мы видим, что среднее ( $\tilde{d}_1$ ) и дисперсия ( $\tilde{d}_2$ ) апостериорного нормального распределения являются определенным образом средневзвешенными значениями априорных и выборочных, соответственно, средних и дисперсий.

**Пример 3.2** (продолжение). При реализации общей схемы пересчета априорных параметров в апостериорные в данном случае следует учесть представление функции правдоподобия  $L$  в форме (3.16) (см. выше, пример 3.2), вид (3.18) априорной плотности двумерного гамма-нормального распределения (в котором вектор параметров  $D_0 = (\lambda_0; \theta_0; \alpha; \beta)$ ), а также справедливость тождества

$$n(\theta - \bar{x})^2 + \lambda_0(\theta - \theta_0)^2 = (\lambda_0 + n) \left( \theta - \frac{\lambda_0\theta_0 + n\bar{x}}{\lambda_0 + n} \right)^2 + \frac{\lambda_0 n}{\lambda_0 + n} (\theta_0 - \bar{x})^2.$$

Тогда вычисление  $\bar{p}(\theta; h)$  по схеме (3.37) приводит нас снова к двумерному гамма-нормальному распределению вида (3.18), но с параметрами

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0 &= \lambda_0 + n; \\ \tilde{\theta}_0 &= \frac{n\bar{x} + \lambda_0\theta_0}{n + \lambda_0}; \\ \tilde{\alpha} &= \alpha + \frac{n}{2}; \\ \tilde{\beta} &= \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\bar{x} - \theta_0)^2}{2 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_0} \right)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

**Пример 3.3 (продолжение).** Непосредственная реализация соотношения (3.37) в данном случае дает:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\theta|x_1, \dots, x_n) &\sim \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i} = \\ &= \theta^{a + \sum_{i=1}^n x_i - 1} (1-\theta)^{b + nM - \sum_{i=1}^n x_i - 1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Но правая часть (3.40) определяет (с точностью до нормирующего множителя) снова бета-распределение с параметрами:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a + \sum_{i=1}^n x_i; \\ \tilde{b} &= b + nM - \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned} \quad (3.41)$$

**Пример 3.4 (продолжение).** Подставляя в правую часть соотношения (3.37)

$$\begin{aligned} p(\theta; D_0) &= p(\theta; a, b) \sim \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}, \\ L(x_1, \dots, x_n|\theta) &\sim \theta^{Kn}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - Kn}, \end{aligned}$$

имеем:

$$\bar{p}(\theta|x_1, \dots, x_n) \sim \theta^{a+Kn-1}(1-\theta)^{b + \sum_{i=1}^n x_i - Kn - 1}.$$

Мы видим, что апостериорное распределение параметра (вероятности «успеха») отрицательно-биномиального закона, так же как и априорное, является бета-распределением и что его параметры  $\tilde{D} = (\tilde{a}, \tilde{b})$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a + Kn, \\ \tilde{b} &= b + \sum_{i=1}^n x_i - Kn. \end{aligned} \quad (3.42)$$

**Пример 3.5** (продолжение). Как мы видели ранее, функция правдоподобия наблюдений пуассоновской генеральной совокупности имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta}.$$

Так что, используя в качестве априорного распределения  $p(\theta; D) = p(\theta; \alpha, \beta)$  параметра  $\theta$  гамма-распределение (3.23), имеем:

$$\bar{p}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta} = \theta^{\alpha + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-(\beta+n)\theta}.$$

Тем самым подтверждается сопряженность априорного гамма-распределения, причем, *апостериорное* гамма-распределение определяется параметрами  $\tilde{D} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha + \sum_{i=1}^n x_i; \\ \tilde{\beta} &= \beta + n. \end{aligned} \quad (3.43)$$

**Пример 3.6** (продолжение). Функция правдоподобия экспоненциально распределенных наблюдений (с параметром масштаба  $\theta$ ) имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta^n e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\theta}.$$

Так что при априорном гамма-распределении параметра  $\theta$  имеем:

$$\bar{p}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \cdot \theta^n e^{-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\theta} = \theta^{\alpha+n-1} e^{-\left(\beta + \sum_{i=1}^n x_i\right)\theta}.$$

Мы видим, что апостериорное распределение параметра  $\theta$  снова подчиняется закону гамма-распределения (3.23), но с параметрами

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha + n; \\ \tilde{\beta} &= \beta + \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned} \quad (3.44)$$

**Пример 3.7** (продолжение). Подставляя в правую часть соотношения (3.37) функцию правдоподобия *равномерно* распределенных (на отрезке  $[0; \theta]$ ) наблюдений и функцию плотности распределения Парето (3.26) в качестве априорного распределения  $p(\theta; D) = p(\theta; \alpha; \theta_{\min})$ , имеем:

$$\bar{p}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim \frac{\alpha \theta_{\min}^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\theta^n} \quad (\text{при } \theta \geq \max\{\theta_{\min}, x_1, x_2, \dots, x_n\}).$$

Отсюда следует, что апостериорное распределение параметра  $\theta$  описывается, так же как и априорное, законом Парето (3.26), но с параметрами:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha + n \\ \tilde{\theta}_{\min} &= \max\{\theta_{\min}; x_1, x_2, \dots, x_n\}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

**Пример 3.8** (продолжение). Как мы видели (см. выше, пример 3.8), функция правдоподобия Парето-распределенных наблюдений имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^n \cdot e^{-[n \ln(\frac{g_n}{x_0})] \cdot \theta}.$$

Подставляя ее в правую часть соотношения (3.37), а также, в качестве априорного распределения  $p(\theta; D_0)$ , плотность гамма-распределения (3.23), имеем:

$$\bar{p}(\theta | x_1, \dots, x_n) \sim \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \cdot \theta^n e^{-[n \ln(\frac{g_n}{x_0})] \theta} = \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta+n \ln(\frac{g_n}{x_0}))\theta},$$

что определяет гамма-распределение с параметрами

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha + n, \\ \tilde{\beta} &= \beta + n \ln\left(\frac{g_n}{x_0}\right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

где  $g_n = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$  — среднее геометрическое наблюдений  $x_1, \dots, x_n$ , а  $x_0$  — параметр сдвига в анализируемом распределении Парето (его значение считается заданным).

**Пример 3.9** (продолжение). Байесовское оценивание коэффициентов регрессии  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)'$  и параметра  $h$  в нормальной классической модели множественной регрессии (3.8)~(3.9) предполагает использование апостериорного распределения  $\tilde{p}(\Theta; h | \mathbf{X}, Y)$  этих параметров, определяемого по схеме (3.37). Подставляя в правую часть соотношения (3.37) в качестве априорного многомерное гамма-нормальное распределение (3.29), а также функцию правдоподобия  $L(\mathbf{X}, Y | \Theta, h)$  (см. (3.12)), преобразованную к виду

$$L(\mathbf{X}, Y | \Theta; h) \sim h^{\frac{n-k-1}{2}} e^{-\left(\frac{n-k-1}{2}\hat{\sigma}^2\right)h} \cdot h^{\frac{k+1}{2}} e^{-\frac{h}{2}(\hat{\Theta}-\Theta)'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\hat{\Theta}-\Theta)},$$

получаем после ряда тождественных преобразований (см., [Де Грот (1974)], апостериорную плотность  $\bar{p}(\Theta; h | \mathbf{X}, Y)$  в форме многомерного



гамма-нормального распределения (3.29), параметры которого определяются по параметрам  $\Theta_0, \Lambda_0, \alpha$  и  $\beta$  априорного распределения и наблюдениям  $(X, Y)$  следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Theta}_0 = (\lambda_0 + X'X)^{-1}(\Lambda_0\Theta_0 + X'Y) - \text{параметр сдвига;} \\ \tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 + X'X - \text{матрица точности;} \\ \hat{\alpha} = \alpha + \frac{n}{2}; \\ \tilde{\beta} = \beta + \frac{1}{2}[(Y - X\tilde{\Theta}_0)'Y + \\ + (\Theta_0 - \tilde{\Theta}_0)'\Lambda_0\Theta_0] + \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{параметры частного} \\ \text{апостериорного гамма-} \\ \text{распределения параметра} \\ \text{точности } h. \end{array} \right. \quad (3.47)$$

### 3.5. Примеры задач на точечное и интервальное байесовское оценивание параметров модели

**Задача 1.** Анализ закона распределения домашних хозяйств определенной социально-экономической страты в заданном регионе страны по величине среднедушевого дохода  $\eta$ .

Мы располагаем следующей информацией об анализируемой генеральной совокупности:

(а) логарифм (натуральный) от величины среднедушевого дохода (т.е.  $\xi = \ln \eta$ ) домашних хозяйств рассматриваемой страты данного региона распределен нормально с *неизвестным* средним значением  $\theta$  и *известной* дисперсией  $\sigma_0^2 = 0,28$ ;

(б) имеются результаты обследования  $n = 10$  случайно отобранных от анализируемой страты домашних хозяйств по среднедушевому доходу  $y_i$  (в нижеследующей таблице даны значения  $x_i = \ln y_i$ ):

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	0,54	1,20	0,36	0,80	0,42	2,10	0,70	0,25	0,90	0,48

(в) из предыстории и опыта обследования домашних хозяйств той же страты в других регионах страны получены априорные значения среднего  $E\theta = \theta_0 = 0,60$  и дисперсии  $D\theta = \Delta_0^2 = 0,03$ .

Требуется:

используя сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$ , получить байесовские точечную и интервальную (с уровнем доверия  $P_0 = 0,95$ ) оценки средней величины логарифма среднедушевого дохода и сравнить их с соответствующими оценками метода максимального

**Решение.** Мы уже знаем (см. выше, пример 3.1), что сопряженное априорное распределение в данном случае существует и является нормальным, причем параметры этого распределения непосредственно заданы ( $\mathbf{E}\theta = \theta_0 = 0,60$  и  $\mathbf{D}\theta = \sigma_0^2 = 0,03$ ). В соответствии с выведенными выше формулами пересчета (см. п. 3.4, формулы (3.38)) имеем:

$$\tilde{\theta}_0 = \mathbf{E}(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2/n} \cdot \bar{x} + \frac{1}{\Delta_0^2} \cdot \theta_0}{\frac{1}{\sigma_0^2/n} + \frac{1}{\Delta_0^2}} = 0,691$$

$$\tilde{\Delta}_0^2 = \mathbf{D}(\theta|x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{\sigma_0^2/n} + \frac{1}{\Delta_0^2} \right)^{-1} = 0,015.$$

Соответственно:

$$\hat{\theta}^{(B)} = b\mathbf{E}(\theta|x_1, \dots, x_n) = 0,691$$

и с вероятностью  $P_0 = 0,95$  можем утверждать, что  $\hat{\theta}^{(B)} - u_{0,025} \cdot \tilde{\Delta}_0 < \theta < \hat{\theta}^{(B)} + u_{0,025} \cdot \tilde{\Delta}_0$ .

С учетом того, что 2,5%-ная точка стандартного нормального распределения  $u_{0,025} = 1,96$  и  $\tilde{\Delta}_0 = \sqrt{\tilde{\Delta}_0^2} = 0,120$ , имеем:

$$\theta \in [0,451; 0,931] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,95.$$

Решение этих же задач, основанное на *методе максимального правдоподобия*, дает:

$$\hat{\theta}_{\text{МП}} = \bar{x} = 0,775 \text{ и } \theta \in [0,447; 1,103] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,95$$

(концы последнего доверительного интервала вычислены по формулам  $\hat{\theta}_{\text{МП}} \pm u_{0,025} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ ).

Мы видим, что использование априорной информации о неизвестном значении параметра  $\theta = \mathbf{E}(\ln \eta)$  и применение, соответственно, байесовского подхода в данной задаче позволили уточнить оценку и, в частности, сузить интервальную оценку по сравнению с классическим подходом почти в полтора раза.

**Задача 2.** Оценка интенсивности вызовов, поступающих на пункт «Скорой помощи» в час.

Число вызовов  $\xi$  поступающих на пункт «Скорой помощи» в час, описывается распределением Пуассона с неизвестным значением параметра  $\theta = \mathbf{E}\xi$  (см. выше, пример 3.5). Результаты регистрации числа вызовов  $x_i$  (в час), зафиксированные в течение одной смены (длящейся 8 часов), приведены в следующей таблице:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	3	1	4	2	6	3	3	2

Из опыта работы аналогичных пунктов определено априорное среднее значение  $\theta_0 = \mathbf{E}\theta = 3,6$ , причем случайный разброс значений этого параметра характеризуется дисперсией  $\Delta_0^2 = \mathbf{D}\theta = 0,09$ .

Требуется:

используя сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$ , получить байесовские точечную и интервальную (с уровнем доверия  $P_0 = 0,95$ ) оценки средней интенсивности  $\theta = \mathbf{E}\xi$  вызовов, поступающих на пункт «Скорой помощи», и сравнить их с соответствующими оценками метода максимального правдоподобия.

**Решение.** Как было установлено выше (см. пример 3.5), сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$  в этом случае существует и описывается гамма-законом, параметры  $\alpha$  и  $\beta$  которого определяются (в соответствии с рекомендациями п. 3.3.3) из системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{E}\theta = \frac{\alpha}{\beta} = 3,60, \\ \mathbf{D}\theta = \frac{\alpha}{\beta^2} = 0,09. \end{cases}$$

Отсюда  $\alpha = 144$  и  $\beta = 40$ .

В соответствии с выведенными выше (см. п. 3.4) формулами пересчета (3.43) параметров апостериорного гамма-распределения имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha + \sum_{i=1}^8 x_i = 144 + 24 = 168, \\ \tilde{\beta} &= \beta + n = 40 + 8 = 48. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\hat{\theta}^{(B)} = \mathbf{E}(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} = 3,5,$$

и можно утверждать, что с вероятностью  $P_0 = 0,95$  справедливы неравенства

$$\gamma_{0,975}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < \theta < \gamma_{0,025}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$$

где  $\gamma_q(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  — 100q%-ная точка гамма-распределения с параметрами  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$ . Воспользовавшись известными формулами (см. приложение П2.2а):

$$\gamma_q(\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}) = \frac{1}{2\tilde{\beta}} \chi_q^2(2\tilde{\alpha})$$

и при  $m > 100$ :

$$\chi_q^2(m) \approx m + u_q \cdot \sqrt{2m},$$

где  $\chi_q^2(m)$  и  $u_q$  — 100q%-ные точки хи-квадрат и стандартного нормального распределения соответственно, имеем:

Решение этих же задач, основанное на методе максимального правдоподобия, дает:

$$\hat{\theta}_{\text{мп}} = \bar{x} = 3,0;$$

$$\theta \in [1,80; 4,20]; \text{ с вероятностью } P_0 = 0,95^3.$$

Мы видим, что в данном случае использование априорной информации о параметре  $\theta$  в рамках байесовского подхода позволило сузить размах интервальной оценки более чем в два раза!

**Задача 3.** Оценка необходимой доли брака  $\theta$  в продукции, производимой автоматической линией.

Предприятие приобрело новую автоматическую линию (АЛ). Для оценки так называемой необходимой доли брака  $\theta$ , — вероятности того, что произведенное этой АЛ в режиме стационарного функционирования изделие окажется некондиционным, — было проконтролировано  $n = 5$  партий по  $M = 80$  изделий в каждой партии. Число дефектных изделий  $\xi$ , обнаруженных в партии изделий объема  $M$ , адекватно описывается биномиальным з.р.в. с параметрами  $\theta$  и  $M$ . Результаты контроля представлены в таблице ( $x_i$  — это число дефектных изделий, обнаруженных в  $i$ -й проконтролированной партии):

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	2	0	3	1	2

Кроме того, проведенный анализ работы аналогичных АЛ, установленных на других предприятиях, показал, что «необходимая доля брака» в среднем равна 0,01 и имеет разброс, характеризуемый среднеквадратическим отклонением 0,003.

**Т р е б у е т с я:**

*используя сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$ , получить байесовские точечную и интервальную (с уровнем доверия  $P_0 = 0,90$ ) оценки «необходимой доли брака»  $\theta$  и сравнить их с соответствующими оценками метода максимального правдоподобия.*

**Решение.** Выше (см. п. 3.3) было установлено, что сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$  в данном случае существует и описывается бета-распределением, параметры  $a$  и  $b$  которого определяются из системы (см. п. 3.3):

$$\begin{cases} \frac{a}{a+b} = 0,01 \\ \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = (0,003)^2. \end{cases}$$

<sup>3</sup> Данная интервальная оценка основана на асимптотической  $\left(\theta; \sqrt{\frac{\theta}{n}}\right)$  — нормальной

Решение этой системы дает  $a = 10$  и  $b = 990$ . Воспользовавшись формулами пересчета (3.41), получаем значения параметров  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  апостериорного распределения  $\theta$ :

$$\tilde{a} = a + \sum_{i=1}^5 x_i = 10 + 8 = 18;$$

$$\tilde{b} = b + 5 \cdot 80 - \sum_{i=1}^5 x_i = 1382.$$

Таким образом:

$$\hat{\theta}^{(B)} = \mathbf{E}(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{\tilde{a}}{\tilde{a} + \tilde{b}} = 0,01286,$$

и можно утверждать, что с вероятностью  $P_0 = 0,90$  справедливы неравенства

$$\beta_{0,95}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \theta < \beta_{0,05}(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

где  $\beta_q(\tilde{a}, \tilde{b})$  —  $100q\%$ -ная точка бета-распределения с параметрами  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$ . Воспользовавшись известными равенствами

$$\beta_q(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{\tilde{a} F_q(2\tilde{a}; 2\tilde{b})}{\tilde{b} + \tilde{a} F_q(2\tilde{a}; 2\tilde{b})}, \quad F_{1-q}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_q(\nu_2, \nu_1)}$$

и таблицами  $100q$ -процентных точек  $F_q(\nu_1, \nu_2)$  распределения  $F$  с числами степеней свободы числителя  $\nu_1$  и знаменателя  $\nu_2$ , имеем:

$$\theta \in [0,0083; 0,0182] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90.$$

Решение этих же задач, основанное на методе максимального правдоподобия<sup>4</sup>, дает:

$$\hat{\theta}_{\text{мп}} = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^n x_i = 0,02;$$

$$\theta \in [0,0085; 0,0315] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90.$$

Размах этой интервальной оценки в 2,3 раза превосходит ширину байесовской интервальной оценки!

#### Задача 4. Оценка интервала движения автобуса

Приходящий в случайные моменты времени на остановку пассажир в течение пяти своих поездок фиксировал время ожидания автобуса (в минутах):  $x_1 = 1,2$ ;  $x_2 = 2,5$ ;  $x_3 = 0,5$ ;  $x_4 = 3,2$ ;  $x_5 = 2,9$ . Известно, что автобус ходит строго по расписанию с интервалом в  $\theta$  минут, так что время ожидания автобуса пассажиром можно считать случайной вели-

<sup>4</sup>См., например: Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика в задачах и упражнениях. М.: Юнити, 2001. Задача 1.18. <https://право.информ2000.pf>

чиной  $\xi$ , подчиненной  $[0; \theta]$  — равномерному з.р.в. (см. выше, пример 3.7). Пытаясь оценить интервал движения автобуса, пассажир сумел получить дополнительную информацию о параметре  $\theta$ : из анализа опыта работы различных автобусных маршрутов города, функционирующих в едином регламентном режиме, следовало, что среднее значение этого параметра равно 5,38 мин, а случайный разброс в его значениях характеризуется средним квадратическим отклонением, равным 1,39 мин.

Т р е б у е т с я:

*используя сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$ , получить байесовские точечную и интервальную (с уровнем доверия  $P_0 = 0,95$ ) оценки для неизвестного интервала движения автобуса и сравнить их с соответствующими оценками, основанными на методе максимального правдоподобия.*

**Решение.** В п. 3.3 (см. пример 3.7) было установлено, что сопряженное априорное распределение параметра  $\theta$  в данном случае существует и описывается распределением Парето с параметром формы  $\alpha$  и параметром сдвига  $\theta_{\min}$ , которые определяются из системы уравнений (3.32), т. е. по формулам (3.32'). В нашем случае имеем:

$$\alpha = 1 + \sqrt{1 + \frac{\theta_0^2}{\Delta^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{5,38^2}{1,39^2}} = 5,00$$

$$\theta_{\min} = \frac{1}{\alpha} \theta_0 \cdot (\alpha - 1) = \frac{1}{5} \cdot 5,38 \cdot 4 = 4,30 \text{ (мин)}.$$

Параметры *апостериорного* распределения Парето определяются формулами пересчета (3.45):

$$\tilde{\alpha} = \alpha + n = 5 + 5 = 10$$

$$\tilde{\theta}_{\min} = \max\{\theta_{\min}; x_1, \dots, x_5\} = 4,3 \text{ (мин)}.$$

Соответственно:

$$\hat{\theta}^{(B)} = \mathbf{E}(\theta | x_1, \dots, x_5) = \frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\theta}_{\min}}{\tilde{\alpha} - 1} = 4,78 \text{ (мин)}$$

и  $\theta \in [\theta_{0,975}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min}); \theta_{0,025}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})]$  с вероятностью  $P_0 = 0,95$ , где  $\theta_q(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})$  — это 100q%-ная точка распределения Парето с параметрами  $(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})$ . Поскольку функция распределения Парето определяется соотношением

$$F(\theta) = P\{\xi(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min}) < \theta\} = 1 - \left(\frac{\tilde{\theta}_{\min}}{\theta}\right)^{\tilde{\alpha}},$$

то значения  $\theta_{0,975}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})$  и  $\theta_{0,025}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})$  определяется из уравнений, соответственно:

$$\left( \frac{\tilde{\theta}_{\min}}{\theta_{0,975}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})} \right)^{\tilde{\alpha}} = 0,975,$$

$$\left( \frac{\tilde{\theta}_{\min}}{\theta_{0,025}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})} \right)^{\tilde{\alpha}} = 0,025.$$

Решение этих уравнений относительно  $\theta_{0,975}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})$  и  $\theta_{0,025}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min})$  при  $\tilde{\alpha} = 10$  и  $\tilde{\theta}_{\min} = 4,3$  дает:

$$\theta_{0,975}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min}) = 4,31 \text{ и } \theta_{0,025}(\tilde{\alpha}; \tilde{\theta}_{\min}) = 6,22,$$

так что

$$\theta \in [4,31; 6,22] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,95.$$

Решение тех же задач, основанное на *методе максимального правдоподобия*, дает:

$$\hat{\theta}_{\text{мп}} = 3,84 \text{ (мин);}$$

$$\theta \in [3,22; 6,69] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,95$$

(здесь дается оценка максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_{\text{мп}}$ , *подправленная на несмещенность*). И в данном случае байесовский подход позволил сузить ширину доверительного интервала почти в 2 раза (точнее в 1,82 раза).

**Задача 5.** Оценка параметров модели зависимости душевых доходов от объема автономных инвестиций.

В нижеследующей таблице приведены макроэкономические данные по США, характеризующие среднедушевой доход  $y_t$  и автономные инвестиции  $x_t$  (в долларах, в дефлированных с помощью индекса стоимости жизни ценах) за 1922–1941 гг. Инвестиции определены приближенно как разность между среднедушевым доходом и душевым расходом на личное потребление (данные заимствованы из работы *Haavelmo T. Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume // JASA. Vol. 42 (1947). P. 105–122*).

$t$	1 (1922)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_t$	39	60	42	52	47	51	45	60	39	41
$y_t$	433	483	479	486	494	498	511	534	478	440

$t$	11 (1922)	12	13	14	15	16	17	18	19	20 (1941)
$x_t$	22	17	27	33	48	51	33	46	54	100
$y_t$	372	381	419	449	511	520	477	517	548	650





также факт  $t(2\tilde{\alpha})$ -распределенности случайных величин  $(\hat{\theta}_j^{(B)} - \theta_j)\sqrt{\tilde{c}_j}$ , где параметр точности  $\tilde{c}_j$  вычисляется по блочным компонентам матрицы точности  $\tilde{\mathbf{B}}$  частного апостериорного обобщенного многомерного  $t(2\tilde{\alpha}|\hat{\Theta}^{(B)}; \tilde{\mathbf{B}})$ -распределения по формуле

$$\tilde{c}_j = \tilde{b}_{jj} - \tilde{\mathbf{V}}_j \cdot \tilde{\mathbf{B}}(j) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_j \quad (3.49)$$

(см. Приложение ПЗ.16). Участвующие в этом соотношении число  $\tilde{b}_{jj}$ ,  $1 \times (k-1)$ -матрица  $\tilde{\mathbf{V}}_j$ ,  $(k-1) \times 1$ -матрица  $\tilde{\mathbf{B}}_j$  и  $(k-1) \times (k-1)$ -матрица  $\tilde{\mathbf{B}}(j)$  определяются следующим блочным представлением матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$ :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{jj} & \tilde{\mathbf{V}}_j \\ \tilde{\mathbf{V}}_j & \tilde{\mathbf{B}}(j) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

В нашем случае  $k=2$ ,  $j=0$  или  $1$ , матрица

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \tilde{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 0,040 & 1,618 \\ 1,618 & 178,665 \end{pmatrix}.$$

так что  $\tilde{c}_0 = 0,040 - (1,618)^2/178,665 = 0,0254$  и  $\tilde{c}_1 = 178,665 - (1,618)^2/0,040 = 113,217$ . Следовательно, с вероятностью  $P_0 = 0,90$  мы можем утверждать, что  $|\hat{\theta}_0^{(B)} - \theta_0| \cdot \sqrt{0,0254} < t_{0,05}(52)$  и  $|\hat{\theta}_1^{(B)} - \theta_1| \cdot \sqrt{113,217} < t_{0,05}(52)$ , так что (с учетом того, что  $t_{0,05}(52) = 1,676$ ) имеем:

$$\theta_0 \in [338,5; 359,5] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90;$$

$$\theta_1 \in [2,743; 3,057] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90.$$

Поскольку параметр  $h$  подчиняется апостериорному гамма-распределению с параметрами  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$ , то:

$h \in [\gamma_{0,95}(\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}); \gamma_{0,05}(\tilde{\alpha}; \tilde{\beta})]$  с вероятностью  $P_0 = 0,90$ . Используя соотношение  $\gamma_q(\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}) = \frac{1}{2\tilde{\beta}} \chi_q^2(2\tilde{\alpha})$ , имеем (с учетом  $\chi_{0,95}^2(52) \approx 36,4$  и  $\chi_{0,05}^2(52) \approx 69,8$ ):

$$h \in [0,00125; 0,00239] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90.$$

Оценивание модели (3.48) с помощью *метода максимального правдоподобия* (дающего в данном случае те же результаты, что и *метод наименьших квадратов*) приводит к следующим точечным и интервальным оценкам:

$$\hat{\Theta}_{\text{МП}} = \hat{\Theta}_{\text{МНК}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = (344,7; 3,05)'$$

$$\hat{h}_{\text{МП}} = \left[ \frac{1}{18}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\Theta}_{\text{МП}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\Theta}_{\text{МП}}) \right]^{-1} = 0,0015;$$

$h \in [0,00093; 0,00285]$  с вероятностью  $P_0 = 0,90$ .

Мы видим, что байесовский подход позволяет сузить доверительный интервал для  $\theta_0$  в 2,6 раза, для  $\theta_1$  — в 3,7 раза и для  $h$  — в 1,4 раза по сравнению с подходом, основанным на методе максимального правдоподобия.

### 3.6. Байесовский прогноз зависимой переменной, основанный на нормальной классической линейной модели множественной регрессии

Мы продолжаем рассматривать нормальную КЛММР

$$y_t = \theta_0 + \sum_{j=1}^k \theta_j \cdot x_t^{(j)} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

или, в матричной записи, модель (3.8)–(3.9) (см. выше), в которой остатки  $\varepsilon_i = \varepsilon(X_i)$  нормальны, гомоскедастичны и взаимнонекоррелированы при **любом** (*а не только на наблюдаемом*) наборе значений объясняющих переменных.

Введем в рассмотрение, наряду с наблюдаемыми значениями  $\mathbf{X}$  и  $Y$  анализируемых переменных  $X = (1; x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})'$  и  $y$ , их прогнозные (на  $q$  тактов времени вперед) значения:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_{n+1}^{(k)} \\ 1 & x_{n+2}^{(1)} & x_{n+2}^{(2)} & \dots & x_{n+2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+q}^{(1)} & x_{n+q}^{(2)} & \dots & x_{n+q}^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{n+q} \end{pmatrix}.$$

а также соответствующие остатки  $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots, \varepsilon_{n+q})'$ .

Тогда в соответствии с (3.8)~(3.9):

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{\mathbf{X}}\Theta + \tilde{\varepsilon}, & (3.8a) \\ \tilde{\varepsilon} \in N_q(\mathbf{0}; h^{-1} \cdot \mathbf{I}_q) & (3.9a) \end{cases}$$

Для того чтобы строить точечные и интервальные оценки для  $\tilde{Y}$  по заданным значениям  $\mathbf{X}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $Y$ , очевидно, надо располагать плотностью условного распределения  $p(\tilde{Y}|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y)$ , которую обычно называют

(3.8a)–(3.9a) следует, что распределение вектора  $\tilde{Y}$  зависит также от параметров  $\Theta$  и  $h$ , а они в байесовском подходе интерпретируются как случайные величины, имеющие соответствующее апостериорное распределение, то реализуется следующая схема определения прогнозной функции плотности  $p(\tilde{Y}|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y)$ :

$$\begin{aligned} p(\tilde{Y}|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) &= \int_{\Theta} \int_h p(\tilde{Y}; \Theta; h|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) d\Theta dh = \\ &= \int_{\Theta} \int_h p(\tilde{Y}|\Theta; h; \mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) \cdot p(\Theta; h|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) d\Theta dh. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Правая часть (3.51) получена с использованием формулы произведения вероятностей  $P(AB|C) = P(A|B, C) \cdot P(B|C)$ . С учетом того, что  $p(\tilde{Y}|\Theta; h; \mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) = p(\tilde{Y}|\Theta; h; \tilde{\mathbf{X}}) \sim h^{\frac{q}{2}} \cdot e^{-\frac{h}{2}(\tilde{Y}-\mathbf{X}\Theta)'(\tilde{Y}-\mathbf{X}\Theta)}$ , а  $p(\Theta; h|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) = p(\Theta; h|\mathbf{X}; Y)$  — гамма-нормальное распределение с параметрами  $\tilde{\Theta}_0, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$ , определяемыми по параметрам  $\Theta_0, \Lambda_0, \alpha$  и  $\beta$  априорного гамма-нормального распределения  $p(\Theta, h)$  по формулам (3.47), интегрирование в правой части (3.51) дает:

$$p(\tilde{Y}|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) \sim \left[ 1 + \frac{1}{v} (\tilde{Y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\Theta}_0)' \tilde{\mathbf{B}} (Y - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\Theta}_0) \right]^{-\frac{v+q}{2}}, \quad (3.52)$$

где

$$v = n - k - 1 \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \left[ \mathbf{I}_q - \tilde{\mathbf{X}}(\Lambda_0 + \mathbf{X}'\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}' \right] \quad (3.53)$$

(подробное доказательство этого факта читатель найдет, например, в [Зельнер (1980)]). Таким образом, мы пришли к тому, что условное распределение  $q$ -мерного вектора  $\tilde{Y}$  при заданных значениях  $\mathbf{X}, Y$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  описывается обобщенным многомерным  $t$ -распределением с  $n - k - 1$  степенями свободы, параметром сдвига  $\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\Theta}_0$  и матрицей точности  $\tilde{\mathbf{B}}$ , определенной соотношением (3.53) (т. е.  $(\tilde{Y}|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}; Y) = t(n - k - 1 | \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\Theta}_0; \tilde{\mathbf{B}})$ , см. Приложение П3.16).

Используя известные свойства обобщенного  $t$ -распределения Стьюдента (см. Приложение П3.16), получаем следующие байесовские прогнозы для  $\tilde{Y}$ :

• **точечный байесовский прогноз для компонент вектора  $\tilde{Y}$  определяется соотношением**

• интервальный байесовский прогноз для компонент вектора  $\tilde{Y}$  с вероятностью  $P_0$  определяется соотношением

$$y_{n+m} \in \left[ \hat{y}_{n+m} - t_{\frac{1-P_0}{2}}(n-k-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_m}}; \hat{y}_{n+m} + t_{\frac{1-P_0}{2}}(n-k-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_m}} \right], \quad m = 1, 2, \dots, q, \quad (3.55)$$

где  $t_\varepsilon(v)$  — 100ε%-ная точка стандартного  $t(v)$ -распределения Стьюдента, а величины  $\tilde{c}_m$  вычисляются по схеме (3.49)~(3.50) с заменой  $(k \times k)$ -матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$  на  $(q \times q)$ -матрицу  $\tilde{\tilde{\mathbf{B}}}$ , определенную соотношением (3.53);

• байесовская прогнозная доверительная область  $\Delta\tilde{Y}$  для вектора  $\tilde{Y} = (y_{n+1}, \dots, y_{n+q})'$  состоит, с заданной вероятностью  $P_0$ , из всех тех  $\tilde{Y} = (y_{n+1}, \dots, y_{n+q})'$ , которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{q}(\tilde{Y} - \tilde{\mathbf{X}}\hat{\Theta}^{(B)})'\Sigma_{\tilde{Y}}^{-1}(\tilde{Y} - \tilde{\mathbf{X}}\hat{\Theta}^{(B)}) < F_{1-P_0}(q; n-k-1), \quad (3.56)$$

где  $F_\varepsilon(v_1, v_2)$  — 100ε%-ная точка  $F(v_1, v_2)$ -распределения,  $\hat{\Theta}^{(B)}$  — байесовская точечная оценка параметров регрессии  $\Theta$ , а  $\Sigma_{\tilde{Y}} = \frac{n-k-1}{n-k-3} \tilde{\tilde{\mathbf{B}}}^{-1}$  — ковариационная матрица вектора  $\tilde{Y}$ . Можно показать, что для модели (3.8a)–(3.9a) эта область имеет форму  $q$ -мерного эллипсоида.

Рассмотрим реализацию описанной выше схемы построения точечных и интервальных байесовских прогнозов значений зависимой переменной в нормальной КЛММР на нашем примере, проанализированном в задаче 5.

**Задача 5 (продолжение).** В условиях примера, рассмотренного выше, требуется:

*по заданным (планируемым) значениям автономных инвестиций  $x_{21} = 120$  и  $x_{22} = 140$  построить точечные и интервальные байесовские прогнозы для среднедушевых доходов населения  $y_{21}$  и  $y_{22}$ , а также прогнозную доверительную область  $\Delta\tilde{Y}$  для этих значений с уровнем доверия  $P_0 = 0,90$ ; сравнить полученные решения с решениями, основанными на методе максимального правдоподобия.*

**Решение.** Итак, в нашем случае:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 120 \\ 1 & 140 \end{pmatrix}; \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = ?$$

В соответствии с (3.52) плотность условного распределения вектора  $\tilde{Y}$  при заданных  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\Theta}$  описывается обобщенным многомерным

$t$ -распределением с числом степеней свободы  $\nu = 20 - 1 - 1 = 18$ , параметром сдвига  $\begin{pmatrix} 1 & 120 \\ 1 & 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 349, 0 \\ 2, 9 \end{pmatrix}$  и матрицей точности  $\tilde{\mathbf{B}}$ , определенной соотношением (3.53).

Произведя необходимые вычисления по формулам (3.53)–(3.56) и используя известные свойства обобщенного многомерного  $t$ -распределения (см. Приложение П3.16), имеем:

$$\hat{y}_{21}(\text{прогн.}) = 349 + 2,9 \cdot 120 = 697,4;$$

$$\hat{y}_{22}(\text{прогн.}) = 349 + 2,9 \cdot 140 = 755,5;$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0,00159 & -0,00022 \\ -0,00022 & 0,00152 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_{\tilde{Y}} = \begin{pmatrix} 721,8 & 106,8 \\ 106,8 & 757,4 \end{pmatrix};$$

$$y_{21} \in [653,6; 741,2] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90;$$

$$y_{22} \in [710,7; 800,3] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90;$$

$$\Delta_{\tilde{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_{21} - 697,4 \\ y_{22} - 755,5 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0,00159 & -0,00022 \\ -0,00022 & 0,00152 \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} y_{21} - 697,4 \\ y_{22} - 755,5 \end{pmatrix} < 2,62 \right\}.$$

Сравним эти результаты с соответствующими прогнозами, основанными на оценках *метода максимального правдоподобия*:

- *точечный прогноз*

$$\hat{y}_{21}^{\text{МП}} (\text{прогнозное}) = 344,7 + 3,05 \cdot 120 = 710,7;$$

$$\hat{y}_{22}^{\text{МП}} (\text{прогнозное}) = 344,7 + 3,05 \cdot 140 = 771,7;$$

- *интервальный прогноз* строится на основе  $t(n-2)$ -распределенности случайных величин

$$\frac{\hat{y}_{n+m}^{\text{МП}} (\text{прогн.}) - y_{n+m}}{\hat{\sigma}_{\text{МП}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+m} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}, \quad m = 1, 2;$$

в нашем случае  $n = 20$ ,  $x_{n+1} = 120$ ,  $x_{n+2} = 140$ ,  $\hat{\sigma}_{\text{МП}}^2 = \frac{1}{\hat{h}_{\text{МП}}} = \frac{1}{0,0015} = 666,67$ ;  $\hat{\sigma}_{\text{МП}} = 25,82$ ;  $\frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{5572,6}{5711} = 0,976$ ;  $\frac{(x_{n+2} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{8958,6}{5711} = 1,569$  и  $t_{0,05}(18) = 1,734$ , так что:

$$y_{21} \in [647,1; 774,3] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90;$$

$$y_{22} \in [699,2; 844,2] \text{ с вероятностью } P_0 = 0,90.$$

Мы видим, что и в прогнозе байесовский подход позволяет сузить ширину прогнозной интервальной оценки для  $y_{22}$  в 1,45 раза, а для

## Выводы

1. При принятии решения, основанного на байесовском подходе, эконометрист использует в качестве исходной информации одновременно информацию двух типов: *априорную и содержащуюся в исходных статистических данных*. При этом априорная информация предоставлена ему в виде некоторого *априорного распределения вероятностей* анализируемого неизвестного параметра, которое описывает степень его уверенности в том, что этот параметр примет то или иное значение, *еще до начала сбора исходных статистических данных*. По мере же поступления исходных статистических данных эконометрист уточняет (пересчитывает) это распределение, *переходя от априорного распределения к апостериорному*, используя для этого известную формулу Байеса (см. п. 3.1).

2. Априорные сведения об оцениваемом параметре  $\Theta$  основаны на предыстории функционирования анализируемого процесса (если таковая имеется) и на профессиональных теоретических соображениях о его сущности, специфике, особенностях и т. п. В конечном итоге эти априорные сведения должны быть представлены в виде функции  $p(\Theta)$ , задающей *априорное распределение параметра* и интерпретируемой как вероятность того, что параметр примет значение, равное  $\Theta$ , если параметр дискретен, и как функция плотности распределения в точке  $\Theta$ , если параметр непрерывен по своей природе.

3. При практической реализации байесовского подхода важное значение имеет выбор семейства  $\{p(\Theta; D)\}$  априорных распределений оцениваемого параметра. При этом существенную роль играют *распределения, сопряженные по отношению к наблюдаемой генеральной совокупности*, т. е. такие априорные распределения, которые при пересчете в *апостериорные* не выходят за пределы семейства, к которому они принадлежат (см. п. 3.2).

4. В ситуациях, в которых исследователь не располагает никакой полезной *априорной* информацией о значениях оцениваемого параметра, обычно используются следующие два правила выбора соответствующего априорного распределения (см. п. 3.3.1):

(а) *если оцениваемый скалярный параметр  $\theta$  может (теоретически) принимать значения на конечном интервале  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$  или на бесконечном интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то априорную функцию плотности  $p(\theta)$  следует считать постоянной на соответствующем интервале;*

(б) *если же из смысла оцениваемого параметра вытекает, что он может принимать любые положительные значения, то следует считать постоянной на всей числовой прямой  $[-\infty, +\infty]$  функцию*

плотности распределения логарифма от значения параметра, т. е.  $p(\ln \theta) = \text{const}$  при  $\theta \in (0; +\infty)$ . Такие априорные распределения обычно называют «распределениями, отражающими скудость априорных знаний», или коротко — «САЗ-априорными распределениями».

5. Использование, в качестве априорных, законов распределения вероятностей (з.р.в.), сопряженных с наблюдаемой генеральной совокупностью (в ситуациях, когда они существуют), позволяет нам определить их общий вид, т. е. задает целое семейство априорных распределений  $\{p(\Theta; D)\}$ . Однако при реализации байесовского подхода мы должны оперировать конкретным априорным распределением, что требует знания числовых значений  $D_0$  параметров  $D$ , от которых наш априорный з.р.в. зависит. Как же подбирать эти значения  $D_0$  в каждом конкретном случае? (см. п. 3.3.3).

В широком классе ситуаций можно исходить из того, что нам известны априорные средние значения оцениваемого параметра  $\Theta_0 = \mathbf{E}\Theta = (\mathbf{E}\theta_1, \mathbf{E}\theta_2, \dots, \mathbf{E}\theta_s)'$  и их среднеквадратические ошибки  $\Delta_1 = \sqrt{\mathbf{D}\theta_1}, \Delta_2 = \sqrt{\mathbf{D}\theta_2}, \dots, \Delta_s = \sqrt{\mathbf{D}\theta_s}$ . Тогда параметры априорного распределения, как правило, могут быть определены методом моментов (в случае многомерного параметра  $\Theta$  — с учетом статистической независимости компонент вектора  $\Theta$  в априорном распределении).

6. Поскольку по определению семейство сопряженных априорных распределений  $\{p(\Theta; D)\}$  замкнуто относительно операции пересчета априорного распределения в апостериорное, то общий вид апостериорного распределения  $\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n)$  при использовании сопряженных априорных распределений нам известен, и нам лишь надо уметь пересчитывать параметры  $\tilde{D}(X_1, \dots, X_n)$  этого апостериорного распределения по заданным параметрам  $D_0$  априорного распределения и имеющимся наблюдениям  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Общая схема такого пересчета следующая (см. п. 3.4). Пусть  $\{p(\Theta; D)\}$  — семейство априорных распределений, сопряженных с функцией правдоподобия  $L(x_1, \dots, x_n|\Theta)$  имеющих у нас наблюдений  $x_1, \dots, x_n$ , и пусть  $D_0$  — заданные (известные) значения параметров  $d_1^0, \dots, d_q^0$  в анализируемом случае. Тогда с помощью ряда тождественных преобразований правая часть соотношения, определяемого формулой Байеса,

$$\bar{p}(\Theta|X_1, \dots, X_n) \sim p(\Theta; D_0) \cdot L(X_1, \dots, X_n|\Theta)$$

приводится, с точностью до множителей, не зависящих от  $\Theta$ , к виду  $p(\Theta; D(X_1, \dots, X_n))$ , где последняя функция принадлежит семейству  $\{p(\Theta; D)\}$ , а каждая из компонент  $d_j(X_1, \dots, X_n)$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) вектора параметров  $D(X_1, \dots, X_n)$  является функцией от  $X_1, \dots, X_n$ .

## Глава 4

# Анализ многомерных временных рядов

Весьма редко встречаются ситуации, когда изучаемые в динамике сложные явления (как, например, те, которые обычно изучаются в экономике и финансах) могут быть описаны с использованием единственного временного ряда. Напротив, более распространенным является описание подобных явлений при помощи двух и более переменных, рассматриваемых в динамике. Однако всегда следует учитывать, что многие временные ряды, например в финансах, изменяются синхронно в определенной взаимозависимости.

В этой главе мы обратимся к вопросу совместного моделирования двух или более временных рядов и обобщим некоторые подходы, используемые для одномерных временных рядов, на многомерный случай<sup>1</sup>.

### 4.1. Многомерные временные ряды: определения и основные понятия

В этом разделе мы обобщим основные инструменты, используемые при анализе одномерных временных рядов, на многомерный случай.

**Определение 4.1** (многомерная автоковариация). *Определим  $j$ -ую компоненту многомерной автоковариационной функции многомерного временного ряда  $\{Y_t\}_{t=1,2,\dots} \in \mathbb{R}^m$ , представляющего собой*

---

<sup>1</sup>Анализу одномерных временных рядов посвящена гл.10 учебника [Айвазян  
Сканировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек  
<https://право.информ2000.рф>



$m$ -мерный вектор-столбец с компонентами  $Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t}$ , в форме  $(m \times m)$ -матрицы:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_t, Y_{t-j}] &= \Gamma_{t,t-j} \equiv \mathbf{E}[(Y_t - \mathbf{E}[Y_t])(Y_{t-j} - \mathbf{E}[Y_{t-j}])'] = \\ &= \begin{bmatrix} \text{Cov}[Y_{1,t}, Y_{1,t-j}] & \text{Cov}[Y_{1,t}, Y_{2,t-j}] & \dots & \text{Cov}[Y_{1,t}, Y_{m,t-j}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}[Y_{m,t}, Y_{1,t-j}] & \dots & \dots & \text{Cov}[Y_{m,t}, Y_{m,t-j}] \end{bmatrix}_{m \times m} = \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{1t,1(t-j)} & \gamma_{1t,2(t-j)} & \dots & \gamma_{1t,m(t-j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{mt,1(t-j)} & \dots & \dots & \gamma_{mt,m(t-j)} \end{bmatrix}_{m \times m}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Определение 4.2** (ковариационная (слабая) стационарность). Многомерный временной ряд  $Y_t \in \mathbb{R}^m$  с компонентами  $(Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t})'$  называется ковариационно стационарным или слабо стационарным, если

$$\begin{aligned} \mu_t = \mathbf{E}[Y_t] &= \mu, \quad \forall t; \\ \text{Cov}[Y_t, Y_{t-j}] &= \Gamma_{t,t-j} = \Gamma_j, \quad \forall t, \end{aligned}$$

где  $\mu \in \mathbb{R}^m$  и  $\Gamma_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

В предположении ковариационной стационарности многомерная, автоковариационная функция (4.1) принимает следующий вид:

$$\text{Cov}[Y_t, Y_{t-j}] = \Gamma_j = \begin{bmatrix} \gamma_{11,j} & \gamma_{12,j} & \dots & \gamma_{1m,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{m1,j} & \dots & \dots & \gamma_{mm,j} \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Отметим, что эта матрица необязательно симметрична, поскольку в общем случае  $\gamma_{iq,j} \neq \gamma_{qi,j}$ . Важно отметить, что несмотря на то, что в случае скалярного процесса  $\gamma_j = \gamma_{-j}$ , для векторного процесса в общем случае мы имеем:

$$\Gamma_j \neq \Gamma_{-j}.$$

Это неравенство выполняется в силу того, что, например, элемент (1,2) матрицы  $\Gamma_j$  — ковариация между  $Y_{1,t}$  и  $Y_{2,t-j}$ , элемент (1,2) матрицы  $\Gamma_{-j}$  — ковариация между  $Y_{1,t}$  и  $Y_{2,t+j}$ , а отклик  $Y_2$  на изменения  $Y_1$  может отличаться от отклика  $Y_1$  на изменения  $Y_2$ .

Заметим, что, заменив в автокорреляционной функции  $t$  на  $t + j$ , мы получим

$$\Gamma_j = \mathbf{E}[(Y_{t+j} - \mu)(Y_{t-j} - \mu)'] = \mathbf{E}[(Y_{t+j} - \mu)(Y_t - \mu)']$$

а транспонировав эту матрицу, получим, что

$$\Gamma'_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+j} - \mu)'] = \Gamma_{-j}.$$

Соответственно ковариационная матрица многомерного временного ряда  $Y_t \in \mathbb{R}^m$  равна:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Y_t} = \Gamma_0 &= E[(Y_t - E[Y_t])(Y_t - E[Y_t])'] = \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{11,0} & \gamma_{12,0} & \dots & \gamma_{1m,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{m1,0} & \dots & \dots & \gamma_{mm,0} \end{bmatrix}_{m \times m}. \end{aligned}$$

**Определение 4.3** (многомерная автокорреляция). Автокорреляция  $j$ -го порядка для ковариационно стационарного многомерного процесса  $Y_t \in \mathbb{R}^m$  с компонентами  $(Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t})'$  определяется следующим образом:

$$Corr[Y_t, Y_{t-j}] = R_j \begin{bmatrix} \rho_{11,j} & \rho_{12,j} & \dots & \rho_{1m,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{m1,j} & \dots & \dots & \rho_{mm,j} \end{bmatrix}_{m \times m},$$

где

$$\rho_{iq,j} = Corr[Y_{i,t}, Y_{q,t-j}] = \frac{Cov[Y_{i,t}, Y_{q,t-j}]}{(DY_{i,t})^{1/2} \cdot (DY_{q,t-j})^{1/2}}.$$

**З а м е ч а н и е.** Математическое ожидание  $\mu_t \equiv E[Y_t]$ , автоковариационную и автокорреляционную функцию для стационарного многомерного процесса  $Y_t$  с компонентами  $(Y_{1t}, \dots, Y_{mt})'$  можно состоятельно оценивать при помощи следующих статистик, определяемых как эмпирическое среднее и эмпирическая ковариационная функция соответственно:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t, \\ \hat{\Gamma}_j &= \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (Y_t - \hat{\mu})(Y_{t-j} - \hat{\mu})', \end{aligned}$$

Таким образом, автокорреляционная функция компоненты  $Y_{i,t}$  состоятельно оценивается при помощи следующей статистики

$$\hat{\rho}_{ii,j} = \frac{\hat{\gamma}_{ii,j}}{\hat{\gamma}_{ii,0}},$$

а корреляционная функция  $\rho_{iq,j}$  состоятельно оценивается при помощи:

$$\hat{\rho}_{iq,j} = \frac{\hat{\gamma}_{iq,j}}{\hat{\gamma}_{ii,0}^{\frac{1}{2}} \hat{\gamma}_{qq,0}^{\frac{1}{2}}},$$

где через  $\hat{\gamma}_{iq,j}$  обозначается  $(i, q)$ -й элемент матрицы  $\hat{\Gamma}_j$ .

**Определение 4.4** (многомерный слабый белый шум). *Многомерный процесс  $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^m$  с компонентами  $\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{m,t}$  называется слабым белым шумом, если выполняются следующие свойства:*

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0 \in \mathbb{R}^m, \\ \Gamma_j &= 0 \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \forall j \neq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что многомерный белый шум имеет ковариационную матрицу  $\Gamma_0$ , отличную от диагональной матрицы, так как компоненты многомерного белого шума могут быть коррелированными. Если матрица  $\Gamma_0 = \Omega$  обратима, то исходный белый шум может быть преобразован к редуцированной форме (нулевое среднее и диагональная ковариационная матрица для компонент белого шума) при помощи перехода к  $\tilde{\varepsilon}_t = \mathbf{P}^{-1}\varepsilon_t$ , где  $\mathbf{P}$  — квадратный корень из  $\Omega$  (разложение Холецкого),  $\Omega = \mathbf{P}\mathbf{P}'$ , а  $\mathbf{P}$  — нижнетреугольная матрица. Обратите внимание, что при вычислении разложения Холецкого в пакете GAUSS оно определяется как  $\Omega = \mathbf{P}'\mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  — *верхнетреугольная матрица*.

## 4.2. Модели векторной авторегрессии (VAR-модели)

Векторные авторегрессии (VAR) впервые были использованы как инструмент эмпирического исследования в экономике Симсом (см. работу [Sims (1980)], который показал, что VAR-модели могут послужить гибким и интерпретируемым инструментом анализа экономических временных рядов. Принятая ниже структуризация материала по VAR-моделям во многом следует схеме, описанной в [Gourieroux, Jasiak (2002)].

**Определение 4.5.** *Многомерный процесс  $Y_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{m,t})'$  называется VAR(p)-процессом, если он представим в виде*

$$Y_t = \mu + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (4.9)$$

Здесь  $\mathbf{c}$  обозначает  $m$ -мерный вектор-столбец констант, а  $\Phi_j$  при  $j = 1, 2, \dots, p$ , —  $(m \times m)$ -матрицы авторегрессионных коэффициентов. Вектор остатков  $\varepsilon_t$ , размерность которого  $(m \times 1)$ , — многомерный белый шум:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varepsilon_t] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s'] &= \begin{cases} \mathbf{\Omega}, & \text{для } t = s; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\mathbf{\Omega}$  — симметричная положительно определенная матрица размерности  $(m \times m)$ .

Первое уравнение в системе (4.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{1,t} = c_1 &+ \phi_{11}^{(1)} Y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} Y_{2,t-1} + \dots + \phi_{1m}^{(1)} Y_{m,t-1} + \\ &+ \phi_{11}^{(2)} Y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} Y_{2,t-2} + \dots + \phi_{1m}^{(2)} Y_{m,t-2} + \\ &+ \dots + \phi_{11}^{(p)} Y_{1,t-p} + \phi_{12}^{(p)} Y_{2,t-p} + \dots + \phi_{1m}^{(p)} Y_{m,t-p} + \varepsilon_{1t}, \end{aligned}$$

где  $\phi_{ij}^{(k)}$  —  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $\Phi_k$ . Таким образом, в этом случае значение каждой компоненты вектора  $Y_t$  в момент времени  $t$  зависит не только от ее  $p$  прошлых значений, но и от  $p$  прошлых значений всех других компонент этого вектора. При помощи оператора сдвига  $L$  назад на один такт времени система (4.2) может быть переписана в следующем виде:

$$[\mathbf{I}_n - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p] Y_t = \mathbf{c} + \varepsilon_t.$$

Введя обозначение для полинома лагирования, получим:

$$\Phi(L) Y_t = \mathbf{c} + \varepsilon_t. \quad (4.3)$$

Предполагая, что  $\Phi(L)^{-1}$  существует, имеем:

$$Y_t = \Phi(L)^{-1} \mathbf{c} + \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t.$$

Следовательно,

$$\mu = \mathbf{E}[Y_t] = \Phi(L)^{-1} \mathbf{c}.$$

Таким образом, центрируя систему (4.2), получим:

$$\begin{aligned} \Phi(L) Y_t - \Phi(L) \mu &= -\Phi(L) \mu + \mathbf{c} + \varepsilon_t \\ \Phi(L) [Y_t - \mu] &= -\Phi(L) \Phi(L)^{-1} \mathbf{c} + \mathbf{c} + \varepsilon_t \\ \Phi(L) [Y_t - \mu] &= \varepsilon_t \\ (Y_t - \mu) &= \Phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \Phi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \dots \end{aligned}$$

### 4.2.1. Модели VAR(1)

Стационарный процесс  $Y_t$  с компонентами  $(Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t})'$ , описываемый векторной авторегрессией первого порядка VAR(1), удовлетворяет следующему соотношению:

$$Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{m1} & \dots & \dots & \phi_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

— матрица коэффициентов авторегрессии размерности  $m \times m$ , собственные значения которой по модулю меньше единицы, а  $\varepsilon_t$  —  $m$ -мерный слабый белый шум. Представление в форме скользящего среднего бесконечного порядка имеет вид:

$$Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t = \quad (4.5)$$

$$= \Phi^2 Y_{t-2} + \varepsilon_t + \Phi \varepsilon_{t-1} =$$

$$\vdots$$

$$= \Phi^j Y_{t-j} + \varepsilon_t + \Phi \varepsilon_{t-1} + \dots + \Phi^{j-1} \varepsilon_{t-j+1} = \dots =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \varepsilon_{t-j}. \quad (4.6)$$

Моменты первого и второго порядков для VAR(1)-процесса равны:

$$\mathbf{E}[Y_t] = \mathbf{E} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \varepsilon_{t-j} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \mathbf{E}[\varepsilon_{t-j}] = 0$$

и

$$\Gamma_0 = \Sigma_{Y_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Omega \Phi^{j'},$$

где  $\Omega = \Sigma_{\varepsilon_t}$ .

Учитывая, что  $\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-j+1}$  не коррелированы с  $Y_{t-j}$ , ковариационная матрица  $\Gamma_j$  при  $j = 0, 1, \dots$  равна:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-j}) = \Gamma_j = \text{Cov}[\Phi^j Y_{t-j} + \varepsilon_t + \Phi \varepsilon_{t-1} + \dots + \Phi^{j-1} \varepsilon_{t-j+1}, Y_{t-j}] =$$

$$= \Phi^j \mathbf{V}[Y_{t-j}] = \Phi^j \Gamma_0.$$

### 4.2.2. Модели VAR(p)

Подобно одномерному случаю  $m$ -мерный VAR( $p$ )-процесс может быть представлен в виде  $mp$ -мерного VAR(1)-процесса. Для простоты мы предположим, что процесс центрирован. Определим

$$\xi_t \equiv \begin{bmatrix} Y_t - \mu \\ Y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix}_{mp \times 1}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_m & 0 \end{bmatrix}_{mp \times mp}$$

$$\nu_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{mp \times 1}.$$

Систему VAR( $p$ ) мы можем переписать в виде:

$$\xi_t = \mathbf{F}\xi_{t-1} + \nu_t,$$

$$\mathbf{E}[\nu_t \nu_s'] = \begin{cases} \mathbf{Q}, & \text{для } t = s; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{где} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{mp \times mp},$$

а  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) —  $(m \times m)$ -матрица коэффициентов авторегрессии при значениях  $Y_{t-j} - \mu$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ).

Аналогично одномерному случаю для многомерного случая можно получить условие слабой стационарности. Если для процесса  $Y_t$  существует ковариационная матрица  $\Omega$ , а автоковариационная функция сходится к нулевой матрице с экспоненциальной скоростью, то эти же свойства переносятся и на  $\xi_t$ . Это обеспечивается тем, что  $mp$  собственных значений матрицы  $\mathbf{F}$  лежат внутри единичного круга. Характеристическое уравнение имеет вид:

Следовательно, условие стационарности VAR( $p$ )-процесса состоит в следующем.

**Условие стационарности VAR( $p$ )-процесса.** VAR( $p$ ) является стационарным процессом, если все собственные значения матрицы  $\mathbf{F}$  (определена выше), определяемые из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{I}_m \lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \Phi_2 \lambda^{p-2} - \dots - \Phi_p) = 0, \quad (4.7)$$

лежат **внутри** единичного круга.

Таким образом, VAR( $p$ )-процесс является ковариационно стационарным, если для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих (4.7), выполняется неравенство:  $|\lambda| < 1$ .

Или, что эквивалентно, VAR( $p$ )-процесс является ковариационно стационарным, если все значения  $z$ , удовлетворяющие уравнению

$$\det(\mathbf{I}_m - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \dots - \Phi_p z^p) = 0,$$

лежат **вне** единичного круга. Более детальная информация приведена, например, в [Hamilton (1994)].

Когда  $p = 1$  и корни уравнения  $|\mathbf{I}_m - \Phi_1 z| = 0$  лежат вне единичного круга, т. е.  $|z| > 1$ , собственные значения матрицы  $\Phi_1$  находятся внутри единичного круга. Отметим, что сопряженные значения корней уравнения  $|\Phi_1 - \lambda \mathbf{I}_m| = 0$  являются корнями уравнения  $|\mathbf{I}_m - \Phi_1 z| = 0$  и наоборот.

Пусть процесс ковариационно стационарный. Возьмем математическое ожидание от обеих частей (4.2):

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbf{c} + \Phi_1 \mu + \dots + \Phi_p \mu \\ \mu &= [\mathbf{I}_m - \Phi_1 \dots - \Phi_p]^{-1} \mathbf{c} \\ &= \Phi(1)^{-1} \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Если VAR( $p$ ) — стационарный процесс, тогда для него справедливо следующее представление в виде *векторного процесса скользящего среднего* бесконечного порядка (Vector Moving Average process) VMA( $\infty$ ):

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \mu + \Psi(L) \varepsilon_t,$$

т. е.  $Y_{t-j}$  — линейная функция от элементов  $\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t-j-1}, \dots$ , при  $j = 0, 1, \dots$ , каждый из которых не коррелирован с  $\varepsilon_{t+1}$ . Следовательно,  $\varepsilon_{t+1}$  не коррелирован с  $Y_{t-j}$  для любых  $j \geq 0$ . Таким образом, линейный прогноз  $Y_{t+1}$  по  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$  определяется соотношением:

Так что  $\varepsilon_{t+1}$  можно интерпретировать как фундаментальный остаток  $Y_{t+1}$ , т.е. как ошибку прогноза  $Y_{t+1}$ , который представляет собой линейную функцию от  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$

Матрицы  $\Psi_j$  в VMA( $\infty$ )-представлении вычисляются следующим образом:

$$\Psi(L) = [\Phi(L)]^{-1}$$

$$\Psi(L)\Phi(L) = I_m$$

$$[I_m + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \dots][I_m - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 + \dots - \Phi_p L^p] = I_m.$$

Приравнивая коэффициент при  $L$  к нулевой матрице, получим:

$$\Psi_1 - \Phi_1 = 0.$$

Приравнивая коэффициент при  $L^2$  к нулевой матрице, получаем:

$$\Psi_2 = \Psi_1 \Phi_1 + \Phi_2.$$

В общем случае, приравнивая коэффициент при  $L^s$  к нулевой матрице, мы получим:

$$\Psi_s = \Phi_1 \Psi_{s-1} + \dots + \Phi_p \Psi_{s-p} \quad s = 1, 2, \dots$$

$$\Psi_0 = I_m, \quad \Psi_s = 0 \quad \text{при } s < 0.$$

Существует альтернативное представление в виде скользящего среднего, основанное на VWN-процессах<sup>2</sup>, отличных от  $\varepsilon_t$ . Пусть  $\mathbf{H}$  — несингулярная матрица размерности  $(N \times N)$ , тогда  $\mathbf{u}_t = \mathbf{H}\varepsilon_t \sim VWN$  и справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H} \varepsilon_t + \Psi_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H} \varepsilon_{t-1} + \dots = \\ &= \mu + \mathbf{J}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{J}_1 \mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{J}_2 \mathbf{u}_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_s \equiv \Psi_s \mathbf{H}^{-1}.$$

В качестве  $\mathbf{H}$  можно взять любую матрицу, которая диагонализует  $\Omega$ :

$$\mathbf{H}\Omega\mathbf{H}' = \mathbf{D},$$

при этом случайные величины  $\mathbf{u}_t$  взаимно не коррелированы. Стационарный процесс VAR(p) всегда можно представить в виде скользящего среднего многомерного белого шума, элементы которого взаимно не коррелированы.

<sup>2</sup>Так в англоязычной литературе обозначают «векторные процессы белого шума»  
Скопировано с сайта: <http://www.vbn.no>  
(Vector Autoregressive Processes, т.е. VWN-процессы).  
Разработка электронных библиотек  
<http://www.право.информ2000.pf>



### 4.2.3. Автоковариационная функция VAR-процессов

В этом разделе мы вычислим автоковариационную функцию стационарного  $m$ -мерного VAR( $p$ )-процесса. Для достижения этой цели мы будем использовать указанное выше  $mp$ -мерное VAR(1)-представление:

$$\xi_t = \mathbf{F}\xi_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

$$\Sigma = \mathbf{E}[\xi_t \xi_t']$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} [(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})' \dots (\mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu})'] \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{p-1} \\ \Gamma_1' & \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{p-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Gamma_{p-1}' & \Gamma_{p-2}' & \dots & \Gamma_0 \end{bmatrix}_{(mp \times mp)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\xi_t \xi_t'] &= \mathbf{E}[(\mathbf{F}\xi_{t-1} + \mathbf{v}_t)(\mathbf{F}\xi_{t-1} + \mathbf{v}_t)'] = \\ &= \mathbf{F}\mathbf{E}(\xi_{t-1} \xi_{t-1}')\mathbf{F}' + \mathbf{E}(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t'), \end{aligned}$$

где воспользовались тем, что  $\mathbf{F}\mathbf{E}(\xi_{t-1} \mathbf{v}_t') = 0$ . Следовательно, мы имеем:

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}' + \mathbf{Q}.$$

Решение этого уравнения может быть получено при помощи оператора *vec*, который определяется следующим образом.

**Определение 4.6** (оператор *vec*). Пусть  $\mathbf{A}$  – матрица размерности  $q \times m$ . Тогда вектор-столбец размерности  $(qm \times 1)$ , полученный вертикальным выстраиванием столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ , обозначается как  $\text{vec}(\mathbf{A})$ . Воспользуемся известным фактом, а именно: пусть  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  – матрицы, размерности которых таковы, что  $\mathbf{ABC}$  существует. Тогда:  $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$ , где  $\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}$  – это кронекерово произведение матриц  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{A}$  (см., например, [Айвазян (2010)], п. П2.8). Применяя это к нашему случаю, имеем:

$$\text{vec}(\Sigma) = \text{vec}(\mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}') + \text{vec}(\mathbf{Q})$$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Sigma) &= (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})\text{vec}(\Sigma) + \text{vec}(\mathbf{Q}) = \\ &= [\mathbf{I}_{(mp)^2} - (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})]^{-1}\text{vec}(\mathbf{Q}). \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы  $(\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})$  имеют вид  $\lambda_i \lambda_j$ , где  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{F}$ . Если  $|\lambda_i| < 1, \forall i$ , то все собственные значения матрицы  $(\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})$  находятся внутри единичного круга  $|\mathbf{I}_{(mp)^2} - (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})| \neq 0$ .

Автоковариация  $j$ -го порядка для  $\xi_t$  равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\xi_t \xi'_{t-j}] &= \mathbf{F}\mathbf{E}[\xi_{t-1} \xi'_{t-j}] + \mathbf{E}[\mathbf{v}_t \xi'_{t-j}] \\ \Sigma_j &= \mathbf{F}\Sigma_{j-1} \\ \Sigma_j &= \mathbf{F}^j \Sigma \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

#### 4.2.4. Оценивание VAR-модели

Рассмотрим гауссовский  $m$ -мерный VAR(p)-процесс  $Y_t$ , определяемый соотношением:

$$Y_t = \mathbf{c} + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (4.8)$$

$\varepsilon_t \in N_m(\mathbf{0}; \Omega)$  и не коррелированы по  $t$ .

Пусть мы имеем  $(T + p)$  наблюдений за этим процессом. Функция условного правдоподобия имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1 | Y_0, \dots, Y_{1-p}}(Y_T, \dots, Y_1 | Y_0, \dots, Y_{1-p}; \theta) \\ \theta = (\mathbf{c}', \text{vec}(\Phi_1)', \text{vec}(\Phi_2)', \dots, \text{vec}(\Phi_p)', \text{vec}(\Omega)')'. \end{aligned}$$

Предполагая, что

$$Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1} \in N(\mathbf{c} + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p}; \Omega),$$

и используя следующие обозначения:

$$X_t = \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix}_{(mp+1) \times 1},$$

$$\Pi' \equiv [\mathbf{c} \quad \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_{-p+1}]_{(m \times (mp+1))},$$

выразим функцию условного правдоподобия для  $Y_t$ :

$$\begin{aligned} f_{Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{1-p}}(Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{1-p}; \theta) &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\Omega^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y_t - \Pi' X_t)' \Omega^{-1} (Y_t - \Pi' X_t)\right). \end{aligned}$$

Совместная плотность, при условии имеющихся наблюдений  $Y_0, \dots, Y_{1-p}$ , определяется соотношением:

$$\begin{aligned} f_{Y_t, \dots, Y_1|Y_0, \dots, Y_{1-p}}(Y_t, \dots, Y_1|Y_0, \dots, Y_{1-p}; \theta) &= f_{Y_t|Y_0, \dots, Y_{1-p}}(\theta) \times \\ &\times f_{Y_{t-1}, \dots, Y_1|Y_0, \dots, Y_{1-p}}(\theta). \end{aligned}$$

Соответственно функция правдоподобия для полной выборки, при заданном условии на значения  $Y_0, \dots, Y_{1-p}$ , равна:

$$f_{Y_T, \dots, Y_1|Y_0, \dots, Y_{1-p}} = \prod_{t=1}^T f_{Y_t|Y_0, \dots, Y_{1-p}}.$$

Соответствующая логарифмическая условная функция правдоподобия равна:

$$\mathcal{L}(\theta) = -\frac{Tm}{2} \log(2\pi) + \frac{T}{2} \log |\Omega^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [(Y_t - \Pi' X_t)' \Omega^{-1} (Y_t - \Pi' X_t)].$$

Можно показать, что оценки параметров  $\Pi$ , получаемые методом максимума правдоподобия, имеют вид (выполните в качестве упражнения):

$$\hat{\Pi}' = \left[ \sum_{t=1}^T Y_t X_t' \right] \left[ \sum_{t=1}^T X_t X_t' \right]^{-1},$$

$j$ -я строка матрицы  $\hat{\Pi}'$  равна:

$$\hat{\pi}_{i,t} = \mathbf{u}'_j \hat{\Pi}' = \mathbf{u}'_j \left[ \sum_{t=1}^T Y_t X_t' \right] \left[ \sum_{t=1}^T X_t X_t' \right]^{-1}.$$

Заметим, что эта оценка метода максимального правдоподобия (ММП-оценка) совпадает с МНК-оценкой регрессии  $Y_{jt}$  на  $X_t$ . Таким образом, ММП-оценки находятся как МНК-оценки регрессии  $Y_{jt}$  на константу и  $p$  лагов всех переменных из системы. ММП-оценка матрицы  $\Omega$  равна:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t', \quad \text{Разработка электронных библиотек}$$

где  $\hat{\varepsilon}_{it} = y_{it} - X_t' \hat{\pi}_{i,T}$ .

$\hat{\Pi}$  и  $\hat{\Omega}$  — оценки соответствующих параметров, полученные методом максимума правдоподобия, будут состоятельными, даже если фактические остатки  $\varepsilon_t$  не будут иметь гауссовское распределение.

Предполагая, что

$$\begin{aligned}\Phi(L)Y_t &= \varepsilon_t, \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T &\sim iid(\mathbf{0}, \Omega)^3, \\ \mathbf{E}[\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}\varepsilon_{lt}\varepsilon_{qt}] &< \infty \quad \forall i, j, l, q,\end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \sum_t X_t X_t' &\xrightarrow{p} \mathbf{Q} = \mathbf{E}(X_t X_t'), \\ \hat{\pi}_T &\xrightarrow{p} \pi, \quad \text{где } \hat{\pi}_T = \text{vec}(\hat{\Pi}_T), \\ \hat{\Omega} &\xrightarrow{p} \Omega \\ \sqrt{T}(\hat{\pi}_T - \pi) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, (\Omega \otimes \mathbf{Q}^{-1})), \\ \sqrt{T}(\hat{\pi}_{i,T} - \pi) &\xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, (\sigma_i^2 \mathbf{Q}^{-1})), \\ \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{T} \sum_t \varepsilon_{it}^2 \xrightarrow{p} \sigma_i^2, \quad \text{где } \sigma_i^2 = E(\varepsilon_{it}^2).\end{aligned}$$

Формулы для  $t$ - и  $F$ -статистик коэффициентов любого уравнения системы VAR, полученные с использованием МНК, асимптотически справедливы. Если нам необходимо протестировать ограничения на параметры, имеющие следующий вид  $\mathbf{R}\pi = \mathbf{c}$ , мы можем использовать основанный на МНК  $\chi^2$ -тест в обобщенной форме Вальда:

$$\sqrt{T}(\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{R}(\Omega \otimes \mathbf{Q}^{-1})\mathbf{R}'),$$

$$\begin{aligned}\xi^2(q) &= T(\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c})' \left[ \mathbf{R}(\hat{\Omega} \otimes \hat{\mathbf{Q}}_T^{-1})\mathbf{R}' \right]^{-1} (\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c}) = \\ &= (\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c})' \left[ \mathbf{R}(\hat{\Omega} \otimes (T\hat{\mathbf{Q}}_T)^{-1})\mathbf{R}' \right]^{-1} (\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c}) = \\ &= (\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c})' \left[ \mathbf{R} \left( \hat{\Omega} \otimes \left( \sum_t X_t X_t' \right)^{-1} \right) \mathbf{R}' \right]^{-1} (\mathbf{R}\hat{\pi}_T - \mathbf{c}) \sim \\ &\sim \chi^2(q),\end{aligned}$$

<sup>3</sup> Аббревиатура «iid» здесь и далее используется для обозначения одинаковой распределенности и взаимной независимости случайных величин (independent and identically distributed). «iid(0; Ω)» означает, что каждая из взаимнонезависимых многомерных случайных величин  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$  имеет вектор средних значений  $\mathbf{0}$  и ко-

где  $m$  — число столбцов матрицы  $\mathbf{R}$  (для более детальной информации см. [Hayashi (2000)] или [Lütkepohl (2005)]).

#### 4.2.5. Функция импульсного отклика

Предположим, что  $Y_t$  — ковариационно-стационарный VAR( $p$ )-процесс

$$Y_t = \mathbf{c} + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (4.9)$$

или, что то же:

$$\Phi_p(L)Y_t = \mathbf{c} + \varepsilon_t. \quad (4.10)$$

Этот процесс имеет, в предположении обратимости лагового оператора  $\Phi_p(L)$ , следующее представление в виде VMA( $\infty$ ):

$$\begin{aligned} Y_t &= \Phi_p(L)^{-1} \mathbf{c} + \Phi_p(L)^{-1} \varepsilon_t = \\ &= \mu + \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots, \end{aligned} \quad (4.11)$$

а значит:

$$Y_{t+h} = \mu + \varepsilon_{t+h} + \Psi_1 \varepsilon_{t+h-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t+h-2} + \dots$$

Аналогично одномерному случаю нам интересно исследовать, как шоки влияют на нашу систему уравнений с течением времени. Шоки в момент времени  $t$  задаются вектором остатков  $\varepsilon_t$ .

Функция импульсного отклика — это матричная функция от  $h = 0, 1, 2, \dots$ , которая задается следующим образом:

$$\frac{\partial Y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_{1,t+h}}{\partial \varepsilon_{1,t}} & \dots & \frac{\partial Y_{1,t+h}}{\partial \varepsilon_{m,t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_{n,t+h}}{\partial \varepsilon_{1,t}} & \dots & \frac{\partial Y_{n,t+h}}{\partial \varepsilon_{m,t}} \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}} \right]_{m \times m}.$$

Таким образом,  $(i, j)$ -элемент этой матричной функции отражает реакцию переменной  $Y_i$  на шок в переменной  $Y_j$ . А именно  $\frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}}$  — это реакция значения  $i$ -й переменной в момент времени  $t+h$  на единичное изменение шока  $j$ -й переменной в момент времени  $t$ .

Функция импульсного отклика переменной  $Y_i$  на шок переменной  $Y_j$  — это последовательность  $\frac{\partial Y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t}}, \frac{\partial Y_{i,t+1}}{\partial \varepsilon_{j,t}}, \dots, \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}}, \dots$ .

**Пример 4.1** (двумерная VAR(1)-модель без ограничений).

Предположим, что  $(Y_t)$  — центрированный стационарный двумерный VAR(1)-процесс:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Для того чтобы вычислить функцию импульсного отклика, зададимся нулевым начальным значением  $Y_{t-1}$ . Кроме того, мы предположим, что

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности положим, что  $Y_t$  центрирована.

- А. Рассмотрим эффект единичного шока  $\varepsilon_{1t}$  на  $Y_{1,t}$  в момент времени  $t$ , предполагая нулевыми значения шоков во все последующие моменты времени (чтобы выделить изучаемые шоковые влияния), т. е.:

$$Y_t = \varepsilon_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$Y_{t+1} = \Phi_1 Y_t = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{t+2} = \Phi_1 Y_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- В. Аналогично рассмотрим эффект единичного шока  $\varepsilon_{2t}$  на  $Y_{2,t}$  в момент времени  $t$

$$Y_t = \varepsilon_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получим:

$$Y_{t+1} = \Phi_1 Y_t = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$Y_{t+2} = \Phi_1 Y_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,21 \\ 0,04 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, функция импульсного отклика задается последовательностью

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,25 & 0,21 \\ 0 & 0,04 \end{pmatrix}, \dots$$

Проблема вышеописанной процедуры состоит в том, что она не учитывает возможные единовременные корреляции между компонентами вектора  $\varepsilon_t$ , означающие недиагональность ковариационной матрицы  $E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Omega$ . Несмотря на то что эта процедура математически корректна, она не позволяет получить ответ на вопрос о том, в какой мере единичный шок на  $Y_j$  в момент времени  $t$  влияет на значение переменной  $Y_i$  в момент времени  $t+h$ . Эта проблема возникает в силу того, что, когда элементы  $\varepsilon_t$  коррелированы, мы не можем рассуждать о рассматриваемых шоках как об изолированных, поскольку в силу корреляции мы будем иметь мгновенное воздействие на все другие элементы вектора. В результате, с учетом этих единовременных эффектов, было предложено понятие ортогонализированной функции импульсного отклика.

### Ортогонализированная функция импульсного отклика

Идея ортогонализации состоит в том, чтобы исходные ошибки преобразовать к ортогональным, т. е. к ошибкам, ковариационная матрица которых диагональна. Ниже представлены два подхода получения таких преобразований.

#### A. Рекурсивная ортогонализация

Любая симметричная положительно определенная матрица  $\Omega$ , составленная из действительных чисел (обычно это ковариационная матрица ошибок), может быть представлена в виде:

$$\Omega = ADA',$$

где  $D$  — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят положительные числа:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{mm} \end{bmatrix}, \quad d_{ii} > 0,$$

а  $A$  — нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_{21} & 1 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда ортогонализированные ошибки  $u_t$  определяются как:

$$u_t \equiv \mathbf{A}^{-1} \varepsilon_t.$$

Ковариационная матрица  $u_t$  равна:

$$\mathbf{E}[u_t u_t'] = \mathbf{E}[\mathbf{A}^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' \mathbf{A}'^{-1}] = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}' \mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{D}.$$

Откуда мы видим, что  $u_t$  ортогонализированы (не коррелированы), поскольку все ковариации (кроме диагональных) оказались нулевыми. Теперь рассмотрим  $\mathbf{A}u_t = \varepsilon_t$ , которое в явном виде выписывается как:

$$\mathbf{A}u_t = \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{mt} \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем, что  $u_t$  вычисляются по следующей схеме:

$$\begin{aligned} u_{1t} &= \varepsilon_{1t}, \\ u_{2t} &= \varepsilon_{2t} - a_{21}u_{1t}, \\ u_{3t} &= \varepsilon_{3t} - a_{31}u_{1t} - a_{32}u_{2t}, \\ u_{jt} &= \varepsilon_{jt} - a_{j1}u_{1t} - a_{j2}u_{2t} - \dots - a_{j,j-1}u_{j-1t}. \end{aligned}$$

Так как:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jt} &= a_{j1}u_{1t} + a_{j2}u_{2t} + \dots + a_{j,j-1}u_{j-1t} + u_{jt} = \\ &= \mathbf{E}[\varepsilon_{jt} | u_{1t}, \dots, u_{j-1t}] + u_{jt}, \end{aligned}$$

$u_{jt}$  и  $u_{1t}, \dots, u_{j-1t}$  некоррелированы с  $u_{jt}$ , то  $u_{jt}$  можно интерпретировать как ошибку прогнозирования  $\varepsilon_{jt}$  через  $u_{1t}, \dots, u_{j-1t}$ . Для того чтобы получить представление с ортогональными ошибками, мы можем следующим образом переписать VMA( $\infty$ )-представление (4.11) в терминах вектора  $u_t$ :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbf{c} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_i \varepsilon_{t-i} = \mathbf{c} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_i \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \varepsilon_{t-i} = \\ &= \mathbf{c} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{H}_i u_{t-i}, \end{aligned} \tag{4.12}$$



где  $u_t = \mathbf{A}^{-1}\varepsilon_t$ ,  $\mathbf{H}_i = \Psi_i \mathbf{A}$  и  $\mathbf{H}_0 = \Psi_0 \mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

Пример 4.2 (случай  $m = 3$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i = \Psi_i \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}^i & \Psi_{12}^i & \Psi_{13}^i \\ \Psi_{21}^i & \Psi_{22}^i & \Psi_{23}^i \\ \Psi_{31}^i & \Psi_{32}^i & \Psi_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}^i + a_{21}\Psi_{12}^i + a_{31}\Psi_{13}^i & \Psi_{12}^i + a_{32}\Psi_{13}^i & \Psi_{13}^i \\ \Psi_{21}^i + a_{21}\Psi_{22}^i + a_{31}\Psi_{23}^i & \Psi_{22}^i + a_{32}\Psi_{23}^i & \Psi_{23}^i \\ \Psi_{31}^i + a_{21}\Psi_{32}^i + a_{31}\Psi_{33}^i & \Psi_{32}^i + a_{32}\Psi_{33}^i & \Psi_{33}^i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим влияние единичного шока  $u_{1t}$  на переменную  $Y_1$ , когда  $\mathbf{c} = 0$ : Полагая

$$u_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_{t-j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall j \neq 0.$$

Таким образом, имеется один шок, действующий на  $Y_t$  в момент времени  $t$ , и отсутствуют любые прошлые и будущие шоки.

Поскольку  $\mathbf{c} = 0$ , то (4.12) может быть записано в виде:

$$Y_t = \mathbf{H}_0 u_t + \mathbf{H}_1 u_{t-1} + \dots + \Phi.$$

Поскольку все вектора  $u_{t-j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) нулевые, то

$$Y_t = \mathbf{A}_0 u_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что шок  $u_{1t}$  оказывает мгновенное воздействие на все компоненты вектора  $Y_t$ . В частности,  $Y_{2t}$  меняется на  $a_{21}$ , а  $Y_{3t}$  меняется на  $a_{31}$ . Отметим, что параметры  $(\Psi_i)$  не играют никакой роли. Это происходит потому, что корреляционная структура  $Y_t$  полностью описывается корреляционной структурой  $\varepsilon_t$ , которая,

В момент времени  $t + 1$  мы имеем следующий эффект:

$$\begin{aligned}
 Y_{t+1} &= \mathbf{H}_0 u_{t+1} + \mathbf{H}_1 u_t + \mathbf{H}_2 u_{t-1} + \dots = \\
 &= \Psi_1 \mathbf{A} u_t, \text{ поскольку } u_{t+1} \text{ и } u_{t-j} = 0 \quad \forall j > 0 = \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}^1 & \Psi_{12}^1 & \Psi_{13}^1 \\ \Psi_{21}^1 & \Psi_{22}^1 & \Psi_{23}^1 \\ \Psi_{31}^1 & \Psi_{32}^1 & \Psi_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}^1 & \Psi_{12}^1 & \Psi_{13}^1 \\ \Psi_{21}^1 & \Psi_{22}^1 & \Psi_{23}^1 \\ \Psi_{31}^1 & \Psi_{32}^1 & \Psi_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}^1 + a_{21} \Psi_{12}^1 + a_{31} \Psi_{13}^1 \\ \Psi_{21}^1 + a_{21} \Psi_{22}^1 + a_{31} \Psi_{23}^1 \\ \Psi_{31}^1 + a_{21} \Psi_{32}^1 + a_{31} \Psi_{33}^1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Влияние на значение переменной, запаздывающей на один лаг, зависит не только от  $\mathbf{A}$ , но и от  $\Psi_1$ . Следовательно, имеются два источника, через которые шок на  $Y_1$  в момент времени  $t$  влияет на состояние системы в момент времени  $t + 1$ : первый источник — единовременная зависимость, определяемая ковариационной матрицей  $\Omega$  (представляемая через элементы матрицы  $\mathbf{A}$ ); второй источник — динамическая зависимость в векторе  $Y_t$  (представляемая матрицей авторегрессионных коэффициентов  $\Psi_1$ ).

Теперь рассмотрим влияние единичного шока  $u_{2t}$  на переменную  $Y_2$ :

$$u_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left( \text{и } u_{t-j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall j \neq 0 \right).$$

Тогда

$$Y_t = \mathbf{H}_0 u_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a_{32} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, шок на переменную  $Y_2$  имеет мгновенное воздействие на переменную  $Y_3$ , но не на переменную  $Y_1$ . Это является следствием рекурсивной ортогонализации:  $u_2$  ортогонализировано относительно  $u_1$ , а значит,  $Y_2$  не имеет мгновенного влияния на

Наконец, рассмотрим влияние единичного шока  $u_{3t}$  на переменную  $Y_3$ :

$$u_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \text{and } u_{t-j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall j \neq 0 \right).$$

Тогда

$$Y_t = \mathbf{H}_0 u_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что шок на переменную  $Y_3$  не оказывает мгновенного воздействия на другие переменные, поскольку была произведена ортогонализация ошибки  $u_{3t}$  относительно  $Y_1$  и  $Y_2$ . Для того чтобы завершить этот пример, рассмотрим эффект воздействия единичного шока  $u_{3t}$  через один период.

**Влияние единичного шока  $u_{3t}$  в момент  $t + 1$ :**

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= \mathbf{H}_0 u_{t+1} + \mathbf{H}_1 u_t + \mathbf{H}_2 u_{t-1} + \dots = \\ &= \Psi_1 \mathbf{A} u_t \\ &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}^1 & \Psi_{12}^1 & \Psi_{13}^1 \\ \Psi_{21}^1 & \Psi_{22}^1 & \Psi_{23}^1 \\ \Psi_{31}^1 & \Psi_{32}^1 & \Psi_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Psi_{13}^1 \\ \Psi_{23}^1 \\ \Psi_{33}^1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что влияние единичного шока  $u_{3t}$  в момент  $t + 1$  происходит из-за структуры динамики изменения  $Y_t$ .

Этот пример показывает тот факт, что даже при ортогонализации вектора ошибок их порядок играет важное значение. Как мы только что видели в нашем примере, если переименовать  $Y_1$  на  $Y_3$ , а  $Y_3$  на  $Y_1$ , то мы будем иметь различные функции импульсного отклика.

Для того чтобы получить осмысленное упорядочивание переменных, оно должно быть осуществлено относительно скорости реакции на шоки, т. е. относительно потенциальной реакции переменных на шоки. Переменная, отвечающая наиболее медленной реакции, должна быть первой, второй — следующая по скорости

### В. Ортогонализация при помощи разложения Холецкого

Альтернативная схема ортогонализации осуществляется с использованием разложения Холецкого, которое для матрицы  $\mathbf{A}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{A}' = \\ &= \mathbf{P}\mathbf{P}',\end{aligned}$$

где  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{A}\mathbf{D}^{1/2}$  и

$$\mathbf{D}^{1/2} = \begin{pmatrix} d_{11}^{1/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_{mm}^{1/2} \end{pmatrix}$$

— матрица, составленная из стандартных отклонений  $u_t$ , которые расположены на главной диагонали. Определим («ортогонализованную») новую ошибку  $v_t$ :

$$\begin{aligned}v_t &= \mathbf{P}^{-1}\varepsilon_t = \\ &= \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1}\varepsilon_t.\end{aligned}$$

Тогда среднее и дисперсия  $v_t$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[v_t] &= \mathbf{0}_{n-1} = \\ \mathbf{D}[v_t] = \mathbf{E}(v_t \cdot v_t') &= \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_t')\mathbf{A}^{-1'}\mathbf{D}^{-1/2} = \\ &= \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1}\Omega\mathbf{A}^{-1'}\mathbf{D}^{-1/2} = \\ &= \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1'}\mathbf{D}^{-1/2} = \\ &= \mathbf{I}_m.\end{aligned}$$

В этом случае ортогонализация  $\varepsilon_t$  влечет то, что ковариационная матрица «новых» ошибок будет единичной. Используя это преобразование и VMA( $\infty$ )-представление (см. (4.11)), получим:

$$\begin{aligned}Y_t &= \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t-i} = \\ &= \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} \varepsilon_{t-i} = \\ &= \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{H}}_i v_{t-i}\end{aligned}$$

где  $\Psi_0 = \mathbf{I}_m$  и  $\tilde{\mathbf{H}}_i = \Psi_i \mathbf{P} = \Psi_i \mathbf{A} \mathbf{D}^{1/2}$ . Отметим, что:

$$\begin{aligned} v_t &= \mathbf{P}^{-1} \varepsilon_t = \\ &= \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{A}^{-1} \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Поскольку  $u_t = \mathbf{A}^{-1} \varepsilon_t$ , то мы получим:

$$\begin{aligned} v_t &= \mathbf{D}^{-1/2} u_t = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u_{1t}}{\sqrt{d_{11}}} = \\ \frac{u_{2t}}{\sqrt{d_{22}}} \\ \vdots \\ \frac{u_{mt}}{\sqrt{d_{mm}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последнее равенство позволяет нам увидеть, в чем разница описанных подходов ортогонализации. Единичный шок  $v_t$  можно интерпретировать как шок величины, равной стандартному отклонению соответствующего элемента исходной переменной  $Y_t$ .

В противоположность этому единичный шок  $u_t$  означает, что соответствующий элемент  $Y_t$  изменился на единицу независимо от ее шкалы измерения. Следовательно, ортогонализация с использованием разложения Холецкого более удобна, чем рекурсивное разложение.

#### 4.2.6. Причинность по Гранжеру

Классической областью приложения VAR-моделей является анализ причинно-следственных связей. Как правило, при помощи эмпирического анализа весьма сложно установить те или иные эффекты воздействий. Даже если имеется сильная корреляционная зависимость между переменными  $X$  и  $Y$ , в отсутствие дополнительной информации относительно эффектов *причинного* воздействия этих переменных друг на друга мы сказать ничего не сможем. Корреляция не всегда позволяет определить степень влияния тех или иных переменных. В эконометрике имеется огромное количество примеров, в которых корреляция оказывается либо мнимой, либо незначимой. В качестве таких примеров отметим следующие: положительная корреляция между зарплатами учителей и потреблением алкоголя; положительная корреляция между коэффициентом смертности в Великобритании и долей браков, заключенных с венчальной церемонией в англиканской церкви. Экономисты продолжают спорить относительно значимых корреляций между объективно

Иногда в вопросе выделения объективно связанных переменных может помочь эконометрическая теория. Но, к сожалению, теория не всегда дает недвусмысленный ответ: в таких случаях используется определение причинно-следственной связи, которое дает возможность идентифицировать влияние тех или иных переменных, основываясь только на статистических результатах. Это определение строится на следующем принципе: *причина всегда предшествует следствию*. Другими словами, если переменная  $X$  влияет на переменную  $Y$ , то это означает, что  $Y$  меняется либо мгновенно, либо через короткое время после изменения  $X$ . То есть сначала происходит изменение  $X$ , и только после этого мы наблюдаем его эффект, т. е. изменение  $Y$ . И наоборот, если  $X$  не является причиной изменения  $Y$ , то изменения  $X$  не влияют на будущие значения  $Y$ .

Более формально мы можем определить «причинно-следственную связь по Гранжеру» следующим образом.

**Определение 4.7** (причинно-следственная связь по Гранжеру). Пусть  $E^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots)$  — наилучший (в смысле среднего квадрата ошибки) линейный прогноз для  $Y_{t+s}$ , построенный только по прошлым значениям переменных  $Y$ , а  $E^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots)$  — наилучший (в том же смысле) линейный прогноз для  $Y_{t+s}$ , построенный по прошлым значениям переменной  $Y$  и  $X$ . Мы говорим, что  $X$  не влияет на  $Y$  (по Гранжеру), если

$$E[(Y_{t+s} - E^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots))^2] = E[(Y_{t+s} - E^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots))^2].$$

Если  $X$  не влияет на  $Y$  по Гранжеру, то мы будем писать:

$$X \nrightarrow Y,$$

а если  $X$  влияет на  $Y$  по Гранжеру, то будем писать:

$$X \rightarrow Y.$$

### Причинность в двумерных VAR-системах

Рассмотрим двумерный VAR(1)-процесс:

$$Y_{1,t} = c_1 + \phi_{1,1}Y_{1,t-1} + \phi_{1,2}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t},$$

$$Y_{2,t} = c_2 + \phi_{2,1}Y_{1,t-1} + \phi_{2,2}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

где ковариационная матрица слабого белого шума  $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$  определяется следующим образом:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Более того, рассмотрим регрессии каждой из переменных временных рядов  $(Y_{j,t})$ ,  $j = 1, 2$ , на его прошлые значения:

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \tilde{c}_1 + \tilde{\phi}_{1,1} Y_{1,t-1} + \tilde{\varepsilon}_{1,t}, \\ Y_{2,t} &= \tilde{c}_2 + \tilde{\phi}_{2,1} Y_{2,t-1} + \tilde{\varepsilon}_{2,t}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Рассмотрим также следующие регрессии:

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \tilde{\tilde{c}}_1 + \psi_{1,0} Y_{2,t} + \psi_{1,1} Y_{1,t-1} + \psi_{1,2} Y_{2,t-1} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_{1,t}, \\ Y_{2,t} &= \tilde{\tilde{c}}_2 + \psi_{2,0} Y_{1,t} + \psi_{2,1} Y_{1,t-1} + \psi_{2,2} Y_{2,t-1} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_{2,t}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Мы будем говорить, что:

- (i)  $Y_2$  «не влияет на  $Y_1$  по Гранжеру» тогда и только тогда, когда наилучший линейный прогноз  $Y_{1,t}$  при заданном значении  $Y_{1,t-1}$  не зависит от  $Y_{2,t-1}$ . Для VAR(1)-процесса эта гипотеза эквивалентна гипотезе о равенстве нулю коэффициента  $\phi_{1,2}$  в соотношении (4.13):

$$H_0 : Y_2 \nrightarrow Y_1 \Leftrightarrow \phi_{1,2} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{D}[\varepsilon_{1,t}] = \mathbf{D}[\tilde{\varepsilon}_{1,t}]$$

против

$$H_1 : \text{нулевая гипотеза неверна;}$$

- (ii) соответственно, « $Y_1$  не влияет на  $Y_2$  по Гранжеру» тогда и только тогда, когда наилучший линейный прогноз для  $Y_{2,t}$  при заданном  $Y_{2,t-1}$  не зависит от  $Y_{1,t-1}$ . Для VAR(1)-процесса эта гипотеза эквивалентна гипотезе о равенстве нулю коэффициента  $\phi_{2,1}$  в соотношении (4.13):

$$H_0 : Y_1 \nrightarrow Y_2 \Leftrightarrow \phi_{2,1} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{D}[\varepsilon_{2,t}] = \mathbf{D}[\tilde{\varepsilon}_{2,t}]$$

против

$$H_1 : \text{нулевая гипотеза неверна;}$$

- (iii) «переменная  $Y_1$  не оказывает мгновенного влияния на  $Y_2$ » тогда и только тогда, когда наилучший линейный прогноз для  $Y_{2,t}$  при заданном  $Y_{2,t-1}$  не зависит от  $Y_{1,t}$ . Для VAR(1)-процесса эта гипотеза эквивалентна гипотезе о равенстве нулю коэффициента  $\phi_{2,0}$  в соотношении (4.15):

заданных  $Y_{1,t}, Y_{1,t-1}, Y_{2,t-1}$  не зависит от  $Y_{1,t}$ . Это означает, что:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad Y_1 \leftrightarrow Y_2 &: \Leftrightarrow \psi_{2,0} = 0 \text{ and } \psi_{1,0} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{D}[\tilde{\varepsilon}_{2,t}] = \mathbf{D}[\varepsilon_{2,t}] \text{ и } \mathbf{D}[\tilde{\varepsilon}_{1,t}] = \mathbf{D}[\varepsilon_{1,t}] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det \Sigma_{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}} = \mathbf{D}\varepsilon_{1,t} \cdot \mathbf{D}\varepsilon_{2,t} \end{aligned}$$

против

$$H_1 : \quad \text{нулевая гипотеза неверна;}$$

(iv) «отсутствие линейной связи между переменными  $Y_1$  и  $Y_2$ » определяется выполнением всех трех упомянутых выше нулевых гипотез, а именно:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad Y_1 \approx Y_2 &: \Leftrightarrow \{Y_1 \nrightarrow Y_2\} \cap \{Y_2 \nrightarrow Y_1\} \cap \{Y_1 \leftrightarrow Y_2\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det \Sigma_{\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{2,t} \end{pmatrix}} = \mathbf{D}\tilde{\varepsilon}_{1,t} \cdot \mathbf{D}\tilde{\varepsilon}_{2,t} \end{aligned}$$

против

$$H_1 : \quad \text{нулевая гипотеза неверна.}$$

### Тест отношения правдоподобия при проверке наличия причинности по Гранжеру

При тестировании справедливости гипотезы о параметрических ограничениях для одного или нескольких уравнений можно использовать тест отношения правдоподобия (ОП-тест). При проверке причинно-следственной связи по Гранжеру требуется тестирование нулевых ограничений определенных параметров VAR( $p$ )-процесса. Для этого мы можем воспользоваться ОП-тестом. Как мы увидим ниже, ОП-тест имеет весьма привлекательную интерпретацию в терминах дисперсий ошибок прогнозирования модели с ограничениями и без них. Для того чтобы показать это, нам необходимо вначале описать построение функции правдоподобия для модели с ограничением, которую мы будем использовать при вычислении ОП-статистик.

Рассмотрим стандартную модель линейной регрессии с нормальными ошибками

$$Y_t = X_t\beta + \varepsilon_t, \quad (t = 1, \dots, T),$$

где  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\in} N(0, \sigma^2)$ . Логарифмическая функция правдоподобия для соответствующих нормально-распределенных  $Y_t$  определяется следующим



выражением:

$$\begin{aligned}\ln L(\beta, \sigma^2) &= \sum_{t=1}^T \ln f(Y_t | X_t, \beta, \sigma^2) = \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (Y - X\beta)'(Y - X\beta).\end{aligned}$$

Условие первого порядка для экстремума функции  $\ln L(\beta, \sigma^2)$  принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)}{\partial \beta} &= \frac{1}{\hat{\sigma}^2} X'(Y - X\hat{\beta}) = 0, \\ \frac{\partial L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{T}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = 0.\end{aligned}$$

Решая второе уравнение относительно  $\hat{\sigma}^2$ , получаем:

$$\hat{\sigma}^2 = \tau(\hat{\beta}) = \frac{1}{T} (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}).$$

Таким образом, оценка максимума правдоподобия (МП-оценка) для  $\sigma^2$  может быть представлена как функция от МП-оценки для  $\beta$ . Заменяя в логарифмической функции правдоподобия  $\ln L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  величину  $\hat{\sigma}^2$  на  $\tau(\hat{\beta})$ , получим:

$$\begin{aligned}\ln L_c(\hat{\beta}, \tau(\hat{\beta})) &= -\frac{T}{2} \ln \left( \frac{1}{T} (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) \right) - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \ln(2\pi) = \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \ln(\tau(\hat{\beta})).\end{aligned}$$

Таким образом, в условиях нормальности, заменив в логарифмической функции правдоподобия  $\ln L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$  величину  $\hat{\sigma}^2$  на  $\tau(\hat{\beta})$ , мы можем выразить функцию правдоподобия как функцию, зависящую только от оценки дисперсии ошибки прогнозирования.

Теперь рассмотрим **задачу максимизации правдоподобия с ограничениями**, в которой мы хотим оценить  $\beta$  методом максимума правдоподобия, учитывая при этом  $q$  нелинейных ограничений,  $h(\beta) = 0$ . Более формально: ищем оценки для  $\beta$  и  $\sigma^2$  из условия

$$\max_{\beta, \sigma^2} \ln L(\beta, \sigma^2) \text{ при ограничениях } h(\beta) = 0,$$

где  $h(\beta) = (h_1(\beta), h_2(\beta), \dots, h_q(\beta))'$  — векторнозначная функция размерности  $q$ . Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

где  $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$  — вектор множителей Лагранжа.

Условие первого порядка упомянутой выше задачи максимизации с ограничениями принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln L(\hat{\beta}_R, \hat{\sigma}_R^2)}{\partial \beta} - \frac{\partial h(\hat{\beta}_R)'}{\partial \beta} \hat{\lambda} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \ln L(\hat{\beta}_R, \hat{\sigma}_R^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = h(\hat{\beta}_R) = 0. \quad (4.18)$$

Решая уравнение  $\partial \mathcal{L} / \partial \sigma^2 = 0$  относительно  $\hat{\sigma}_R^2$ , мы снова получим оценку дисперсии ошибок прогнозирования в терминах оценки  $\beta$ , но теперь уже при максимизации функции правдоподобия с ограничениями:

$$\hat{\sigma}_R^2 = \tau(\hat{\beta}_R) = \frac{1}{T} (Y - X \hat{\beta}_R)' (Y - X \hat{\beta}_R).$$

Подставляя  $\tau(\hat{\beta}_R)$  в функцию правдоподобия для модели с ограничениями, имеем:

$$\begin{aligned} \ln L_{CR} &= \ln L(\hat{\beta}_R, \tau(\hat{\beta}_R)) = \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \ln \hat{\sigma}_R^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу получения оценок методом максимума правдоподобия в общем случае, для  $k$ -мерного векторного параметра  $\theta$ . Статистика теста отношения правдоподобия при проверке нулевой гипотезы  $h(\theta) = 0$  против альтернативы, что нулевая гипотеза неверна, имеет вид:

$$LR = 2(\ln L(\hat{\theta}_U) - \ln L(\hat{\theta}_R)) \overset{a}{\sim} \chi_q^2,$$

(асимптотически по числу наблюдений), где  $q$  — число ограничений,  $q \leq k$  ( $k$  — размерность вектора  $\theta_U$ ).

Рассмотрим стандартную регрессионную модель с ограничениями на векторный параметр  $\beta$ . Используя указанные выше результаты, получаем, что статистика отношения правдоподобия принимает вид:

$$\begin{aligned} LR &= 2(\ln L(\hat{\beta}_U, \hat{\sigma}_U^2) - \ln L(\hat{\beta}_R, \hat{\sigma}_R^2)) = \\ &= 2(\ln L_c(\hat{\beta}_U, \tau(\hat{\beta}_U)) - \ln L_c(\hat{\beta}_R, \tau(\hat{\beta}_R))) = \\ &= T \ln \frac{\hat{\sigma}_R^2}{\hat{\sigma}_U^2} = \\ &= T \ln \frac{\hat{\epsilon}'_R \hat{\epsilon}_R}{\hat{\epsilon}'_U \hat{\epsilon}_U}. \end{aligned}$$

Если оценки дисперсии ошибок прогнозирования для модели с ограничениями и без них близки друг к другу, тогда статистика отношения правдоподобия принимает значения близкие к нулю, и мы не отклоняем нулевую гипотезу. Отметим, что тест отношения правдоподобия, примененный к выявлению причинно-следственных связей по Гранжеру, сравнивает оценки дисперсий ошибок двух линейных прогнозов, в одном из которых предполагается отсутствие влияния по Гранжеру (модель с ограничением), а в другом — влияние по Гранжеру учитывается (модель без ограничений).

### Тестирование влияния по Гранжеру

Гипотезы о наличии влияния по Гранжеру может быть легко проверена при помощи статистики отношения правдоподобия, построенной на основании соответствующих регрессий (4.13)–(4.15):

- тестирование влияния  $Y_2$  на  $Y_1$  по Гранжеру, где нулевая гипотеза состоит в том, что  $Y_2 \nrightarrow Y_1$ :

$$C_{2 \rightarrow 1} = \log \left[ \frac{D\tilde{\epsilon}_{1,t}}{D\epsilon_{1,t}} \right];$$

- тестирование влияния  $Y_1$  на  $Y_2$  по Гранжеру, где нулевая гипотеза состоит в том, что  $Y_1 \nrightarrow Y_2$ :

$$C_{1 \rightarrow 2} = \log \left[ \frac{D\tilde{\epsilon}_{2,t}}{D\epsilon_{2,t}} \right];$$

- тестирование мгновенного взаимовлияния  $Y_1$  и  $Y_2$ , где нулевая гипотеза состоит в том, что  $Y_1 \leftrightarrow Y_2$ :

$$C_{1 \leftrightarrow 2} = \log \left[ \frac{D\epsilon_{1,t} \cdot D\epsilon_{2,t}}{\det \Sigma_{(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t})}} \right].$$

Используя введенные выше меры, получаем следующую формулу разложения:

$$C_{1 \approx 2} = \log \left[ \frac{D\tilde{\epsilon}_{1,t} \cdot D\tilde{\epsilon}_{2,t}}{\det \Sigma_{(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t})}} \right] = C_{2 \rightarrow 1} + C_{1 \rightarrow 2} + C_{1 \leftrightarrow 2}.$$

Заменяя теоретические дисперсии ошибок соответствующими оценками, т. е.  $\widehat{D}\epsilon_{1,t} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_{1,t}^2$  и т. д., мы получим оценки мер влияния  $\hat{C}_{2 \rightarrow 1}$ ,  $\hat{C}_{1 \rightarrow 2}$ ,  $\hat{C}_{1 \leftrightarrow 2}$  и

При нулевой гипотезе, состоящей в том, что  $Y_1 \leftrightarrow Y_2$ , статистики  $T\hat{C}_{2 \rightarrow 1}$ ,  $T\hat{C}_{1 \rightarrow 2}$ ,  $T\hat{C}_{1 \leftrightarrow 2}$  асимптотически независимы, а их предельные распределения, при  $T \rightarrow \infty$ , совпадают с распределением  $\chi^2(1)$ . Таким образом, распределение тестовой статистики  $T\hat{C}_{1 \leftrightarrow 2}$  асимптотически, при  $T \rightarrow \infty$ , совпадает с распределением  $\chi^2(3)$ .

### 4.2.7. Выбор порядка VAR-модели

Перед тем как использовать VAR( $p$ )-модель, нам необходимо оценить структурный параметр модели, т.е. выбрать порядок этой модели  $p$ . Этот выбор может быть основан на многомерных аналогах информационных критериев, указанных ниже.

- Информационный критерий Акаике (AIC):

$$AIC(k) = \ln(\det(\hat{\Omega})) + \frac{2pm^2}{T}.$$

- Байесовский информационный критерий (BIC) или информационный критерий Шварца (SIC):

$$BIC(k) = \ln(\det(\hat{\Omega})) + \frac{pm^2 \ln T}{T}.$$

- Информационный критерий Хэннана – Квина (HQ):

$$HQ(k) = \ln(\det(\hat{\Omega})) + \frac{2pm^2 \ln(\ln T)}{T},$$

где  $\hat{\Omega} = 1/T \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$  — оценка ковариационной матрицы вектора остатков, построенной по остаткам оцененной VAR-модели  $p$ -го порядка,  $m$  — размерность наблюдений,  $T$  — число наблюдений. Кроме того, мы предполагаем, что  $\varepsilon_t \in N(0, \Omega)$ .

Если основной целью является качество прогнозирования, то имеет смысл выбирать этот порядок  $p$  таким, чтобы мера погрешности прогнозов была минимальной. В качестве такой меры может быть использован СКО (средний квадрат ошибки). В результате мы приходим к так называемому критерию ошибки прогнозирования (prediction error criterion — PEC), определяемого следующим образом:

- критерий ошибки прогнозирования (PEC):

$$PEC(m) = \det \left[ \frac{T + mp + 1}{T} \cdot \frac{T}{T - mp - 1} \cdot \hat{\Omega} \right] = \left[ \frac{T + mp + 1}{T - mp - 1} \right]^m \det(\hat{\Omega})$$

Если порядок  $p$  увеличивать, то  $\det(\hat{\Omega})$  будет уменьшаться, а множитель  $(T + mp + 1)/(T - mp - 1)$  увеличиваться. Оценка порядка VAR-модели выбирается таким образом, чтобы значения двух составляющих критерий множителей были оптимально сбалансированы.

Когда стоит задача выбора корректной оценки VAR-модели, имеет смысл использовать ту оценку, которая обладает в некотором смысле «наилучшими» выборочными свойствами. Для нас в этом разделе основной интерес представляют статистические свойства таких оценок параметра  $p$ , как, например,  $\hat{p}(PEC)$  и  $\hat{p}(AIC)$ . Необходимо, чтобы выбираемая оценка обладала, как минимум, свойством состоятельности. Напомним, что оценка  $\hat{p}$  параметра  $p$  VAR-модели называется *состоятельной*, если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{\hat{p} = p\} = 1.$$

Оценку  $\hat{p}$  называют *сильно состоятельной*, если

$$P\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{p} = p\right\} = 1.$$

Мы будем называть критерий выбора состоятельным или сильно состоятельным, если оценка порядка VAR-модели, получаемая с использованием этого критерия, состоятельна или сильно состоятельна соответственно. К сожалению, можно показать, что оценки  $\hat{p}(PEC)$  и  $\hat{p}(AIC)$  несостоятельны. Однако критерий  $HQ$  все же является состоятельным, а критерий  $SIC$  является сильно состоятельным. Если размерность  $m$  наблюдений превышает единицу, то критерии  $SIC$  и  $HQ$  являются сильно состоятельными (доказательство см., например, в работе [Lütkepohl (2005)]).

Несмотря на то что в общем случае достаточно трудно оценивать свойства оценок, построенных по малым выборкам, для упомянутых выше критериев некоторые свойства все-таки можно получить. А именно:

$$\begin{aligned} \hat{p}(SIC) &\leq \hat{p}(AIC), && \text{если } T \geq 8, \\ \hat{p}(SIC) &\leq \hat{p}(HQ), && \text{для всех } T, \\ \hat{p}(HQ) &\leq \hat{p}(AIC), && \text{если } T \geq 16. \end{aligned}$$

Важно отметить, что этот результат не требует стационарности  $Y_t$ . Более того, еще раз подчеркнем, что этот результат справедлив для малых выборок (см. [Lütkepohl (2005)]).

В качестве альтернативного подхода для выбора корректного значения порядка VAR-модели можно использовать тест отношения правдоподобия. Пусть  $Y_t$  — ковариационно-стационарный VAR( $M$ )-процесс

где  $M$  — верхняя граница для порядка VAR-модели. Следующую последовательность нулевых и альтернативных гипотез можно протестировать при помощи теста отношения правдоподобия:

$$\begin{array}{ll}
 H_0^1 : \Phi_M = 0 & \text{против } H_1^1 : \Phi_M \neq 0 \\
 H_0^2 : \Phi_{M-1} = 0 & \text{против } H_1^2 : \Phi_{M-1} \neq 0 | \Phi_M = 0 \\
 \vdots & \\
 H_0^i : \Phi_{M-i+1} = 0 & \text{против } H_1^i : \Phi_{M-i+1} \neq 0 | \Phi_M = \dots \\
 & \dots = \Phi_{M-i+2} = 0 \\
 \vdots & \\
 H_0^M : \Phi_1 = 0 & \text{против } H_1^M : \Phi_1 \neq 0 | \Phi_M = \dots \\
 & \dots = \Phi_2 = 0.
 \end{array} \quad (4.19)$$

В этой схеме каждая нулевая гипотеза тестируется при условии, что предыдущая нулевая гипотеза верна. Процедура прерывается на  $k$ -м шаге, если отвергается соответствующая этому шагу нулевая гипотеза, т. е., если отвергается  $H_0^k$ . В этом случае оценка порядка VAR-процесса берется равной  $\hat{p} = M - i + 1$ . Статистика отношения правдоподобия для тестирования  $i$ -й нулевой гипотезы равна:

$$LR(i) = T[\ln |\hat{\Omega}(M - i)| - \ln |\hat{\Omega}(M - i + 1)|]. \quad (4.20)$$

Асимптотически эта статистика при справедливости нулевой гипотезы имеет  $\chi_{m^2}^2$ -распределение. Кроме того, можно использовать статистику  $LR(i)/m^2$ , которая при справедливости нулевой гипотезы асимптотически имеет  $F(m^2, T - m(M - i + 1) - 1)$ -распределение.

Выбор адекватных уровней значимости при схеме тестирования (4.19) является весьма трудной задачей, поскольку необходимо учитывать различия между общим и индивидуальным уровнями значимости. Следует отметить, что если последовательность тестируемых гипотез достаточно велика, то фактическая вероятность отклонить справедливую нулевую гипотезу тоже достаточно велика. Более того,  $\chi_{m^2}^2$ -распределение годится только как асимптотическое распределение. Таким образом, выбранные уровни значимости будут аппроксимировать лишь вероятности ошибок первого рода. Кроме того, процедура последовательного тестирования не позволяет получить состоятельную оценку порядка VAR-модели, если последовательность индивидуальных уровней значимости состоит из постоянных значений. Для того чтобы показать это, необходимо заметить, что для  $M > p$  и фиксированного уровня значимости  $\alpha$  нулевая гипотеза  $H_0 : \Phi_M = 0$  отвер-

довательного тестирования дает некорректную оценку порядка VAR-модели, равную  $M$  с вероятностью  $\alpha$ . А это означает, что существует положительная вероятность выбора слишком большого значения для порядка VAR-процесса. Эту проблему можно преодолеть, *полагая, что уровень значимости стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$* .

После ряда исследований на примерах смоделированных данных мы все еще не можем получить ясного ответа на вопрос относительно того, какой критерий следует использовать в условиях малых выборок (см., например, [Lütkepohl (2005)]). Один из выводов, который можно сделать из этих исследований, состоит в том, что в условиях очень малых выборок небольшая недооценка фактического значения порядка VAR-процесса не столь опасна для точности прогнозов. Более того,  $\chi^2$ -аппроксимация для LR-статистики в условиях малых выборок не слишком хороша. Следовательно, наилучшей стратегией представляется сравнительный анализ оценок порядка  $p$  VAR-процесса, полученных с использованием различных критериев и, возможно, прогнозного анализа, основанного на различных значениях порядка VAR-процесса.

#### 4.2.8. Анализ остатков VAR-моделей

В предыдущем разделе мы рассматривали критерии выбора оптимального порядка VAR-модели. В этом разделе мы сосредоточимся на процедурах проверки предположения о белом шуме для остатков рассматриваемой модели. Такая проверка необходима, например, в случае, если порядок модели выбран на основании экономической теории. Но, поскольку разные методы отражают различные особенности генерирующего данные процесса и каждый из них позволяет исследователю получить полезную информацию, то, как правило, рекомендуется при оценке модели полагаться не на одну процедуру, а на совокупность различных статистических инструментов.

#### Тесты Портманто́ (Portmanteau Tests)

Эти тесты представляют собой многомерные аналоги одномерных тестов Бокса — Пирса/Льюнга — Бокса. Нулевая гипотеза здесь состоит в том, что автокорреляция до  $h$ -го порядка рассматриваемого временного ряда (остатков) равна нулю.

Пусть через  $\hat{\varepsilon}_t$  обозначены оцененные остатки VAR( $p$ )-процесса, тогда автоковариационная матрица для  $\hat{\varepsilon}_t$  оценивается следующим образом:

$$\hat{C}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}'_{t-i}$$

Соответственно, оценка автокорреляционной матрицы для  $\hat{\epsilon}_t$  дается формулой:

$$\hat{\mathbf{R}}_i := \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{D}}^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, h,$$

где  $\hat{\mathbf{D}}$  — диагональная матрица размерности  $(n \times n)$ , в которой диагональные элементы равны квадратным корням соответствующих диагональных элементов матрицы  $\hat{\mathbf{C}}_0$ .

*Портманто-тест* используется для проверки гипотезы:

$$H_0 : \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \dots, \mathbf{R}_h = 0$$

против альтернативы

$$H_1 : \text{нулевая гипотеза не выполняется,}$$

а тестовая статистика вычисляется по формуле:

$$Q_h = T \sum_{i=1}^h \text{tr} \left( \hat{\mathbf{C}}_i' \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \right).$$

Модифицированная версия этого теста — многомерный тест Льюнга — Бокса, предложенный в работе [Hosking (1980)], который является многомерной версией одномерного теста Льюнга — Бокса. Статистика для теста Льюнга — Бокса определяется следующим образом:

$$Q_{LB(h)} = T(T+2) \sum_{i=1}^h \frac{1}{T-i} \text{tr} \left( \hat{\mathbf{C}}_i' \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \right).$$

При справедливости нулевой гипотезы, состоящей в том, что серийная корреляция до  $h$ -го порядка включительно равна нулю, обе статистики асимптотически имеют  $\chi^2$ -распределение с количеством степеней свободы, равным  $m^2(h-p)$ , где  $p$  — порядок VAR-модели, а  $m$ , как и прежде, — размерность анализируемого временного ряда.

Результаты исследования показали, что многомерный тест Льюнга — Бокса оказывается более качественным в условиях малых выборок. Как тест Портманто, так и тест Льюнга — Бокса реализованы в стандартных классических статистических пакетах. Для практических целей важно помнить, что  $\chi^2$ -аппроксимация функции распределения тестовой статистики может оказаться неприемлемой при малых значениях  $T$ . Для более подробной информации см., например, работы [Davies, Triggs, Newbold (1977)], [Ljung, Box (1978)], [Hosking (1980)] и



## Тесты множителей Лагранжа

Другой способ тестирования автокорреляции остатков основан на предположении о том, что вектор ошибок описывается при помощи VAR-модели, т.е.  $\varepsilon_t = \Gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Gamma_h \varepsilon_{t-h} + v_t$ , где  $v_t$  — белый шум. Последовательность  $\varepsilon_t$  сама является белым шумом, если  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_h = 0$ . Таким образом, нулевая гипотеза и ее альтернатива определяются следующим образом:

$$H_0 : \Gamma_1 = \dots = \Gamma_h = 0,$$

$$H_1 : \Gamma_j \neq 0 \text{ для хотя бы одного значения } j \in \{1, \dots, h\}.$$

В этом случае для построения теста удобно использовать принцип максимального правдоподобия (МП). Тестовая статистика для порядка  $h$  VAR-модели вычисляется при помощи вспомогательной регрессии остатков на исходные регрессоры и лагированные до  $h$ -го порядка остатки:

$$\hat{\varepsilon}_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + \Gamma_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \Gamma_h \hat{\varepsilon}_{t-h} + \xi_t.$$

Формулу для МП-статистики см. в [Johansen (1995)], с. 22, или [Lütkepohl, (2005)] с. 171–172. При справедливости нулевой гипотезы, которая состоит в отсутствии серийной корреляции, МП-статистика асимптотически имеет  $\chi^2$ -распределение с  $hm^2$  степенями свободы.

## Тесты на нормальность

Процедуры тестирования на нормальность обычно строятся с использованием оцененных остатков, а не исходных наблюдений  $Y_t$ . Это происходит потому, что в противном случае эти тесты могут быть менее мощными.

Пусть  $\mathbf{P}$  и  $\hat{\mathbf{P}}$  — матрицы факторизации размерности  $m \times m$  ковариационной и выборочной ковариационной матриц остатков, соответственно такие, что  $\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}' = \hat{\mathbf{\Omega}}$  и  $\hat{\mathbf{P}}$  стремится (по вероятности) к  $\mathbf{P}$  при росте числа наблюдений. Определим

$$\hat{\omega}_t = (\hat{\omega}_{1t}, \dots, \hat{\omega}_{mt})' \equiv \hat{\mathbf{P}}^{-1} \hat{\varepsilon}_t,$$

$$\hat{b}_1 = (\hat{b}_{11}, \dots, \hat{b}_{m1})' \quad \text{с} \quad \hat{b}_{i1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\omega}_{it}^3, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\hat{b}_2 = (\hat{b}_{12}, \dots, \hat{b}_{m2})' \quad \text{с} \quad \hat{b}_{i2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\omega}_{it}^4, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда можно показать, что (см., например, [Lütkepohl (2005)], п. 4.5.2):

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 - 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \begin{bmatrix} 6\mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & 24\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right) \quad (4.21)$$

(сходимость по распределению).

Откуда следует, что

$$\hat{\lambda}_s = T\hat{b}'_1\hat{b}_1/6 \xrightarrow{d} \chi^2_m, \quad (4.22)$$

$$\hat{\lambda}_k = T(\hat{b}_2 - 3)'(\hat{b}_2 - 3)/24 \xrightarrow{d} \chi^2_m, \quad (4.23)$$

$$\hat{\lambda}_{sk} = \hat{\lambda}_s + \hat{\lambda}_k \xrightarrow{d} \chi^2_{2m}. \quad (4.24)$$

Все три приведенные выше тестовые статистики могут быть использованы для тестирования нормальности. Отметим, что матрица факторизации  $\hat{\mathbf{P}}$  неединственна, а следовательно, тесты в некоторой степени будут зависеть от их выбора. На практике, если найдено какое-то  $\hat{\mathbf{P}}$ , для которого нулевая гипотеза отвергается, то это указывает на то, что процесс не является нормально-распределенным.

#### 4.2.9. Эмпирические приложения с использованием пакета Eviews

Если мы откроем рабочий файл под названием Tutorial\_VAR.wf1, то в нем обнаружим наблюдения за следующими переменными (квартальные данные).

Переменная	Описание
Inv	Данные по объему инвестиций в США за период 1960:q1-1982q4
Inc	Данные о доходах в США за период 1960:q1-1982q4
Cs	Данные по потреблению в США за период 1960:q1-1982q4
y1	dlog(inv) 1960:q2-1982q4
y2	dlog(inc) 1960:q2-1982q4
y3	dlog(cs) 1960:q2-1982q4

Наша цель состоит в написании программы в среде пакета Eviews, которая позволила бы решить следующие задачи:

1. Оценить VAR-модель 2-го порядка для вектор-наблюдений, составленных из переменных  $Y_1, Y_2, Y_3$ , взятых за период с 1960:1 по 1978:4.

2. Оценить результаты использования описанных выше критериев выбора порядка VAR-модели (LR, AIC, SC, HQ).

3. Оценить VAR-модель 3-го порядка и представить результаты теста Вальда лаговых исключений для оцененной VAR-модели.

Требуемый для этого код представлен ниже:

```
' estimate VAR
smp1 1960:1 1978:4
var var1.ls 1 2 y1 y2 y3 @ c

' lag length criteria
freeze(tab45) var1.laglen(4,vname=vlag,mname=mlag)
show tab45

'Lag exclusion tests
var var1.ls 1 3 y1 y2 y3 @ c
freeze(tab1) var1.testlags(name=lags)
show tab1
```

Ограничиваясь целями нашей задачи, мы представим только результаты использования критериев выбора длины лага.

Информационные критерии, представленные в табл. 4.1, построены с использованием значения функции правдоподобия и без учета константы в VAR-модели. Однако после включения константы значения AIC, HQ, and SC в таблице 4.1 будут иными.

**Таблица 4.1.** Информационные критерии

VAR Lag Order Selection Criteria						
Endogenous variables: Y1 Y2 Y3						
Exogenous variables: C						
Date: 04/22/03 Time: 00:22						
Sample: 1960:1 1978:4						
Included observations: 71						
Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	564.7842	NA	2.69E-11	-15.82491	-15.7293*	-15.78689*
1	576.4087	21.93905	2.50E-11	-15.89884	-15.51641	-15.74676
2	588.8591	22.44588*	2.27E-11*	-15.9960*	-15.32679	-15.72989
3	591.2373	4.086484	2.75E-11	-15.80950	-14.85344	-15.42931
4	598.4565	11.79471	2.91E-11	-15.75934	-14.51646	-15.26508
* indicates lag order selected by the criterion						
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)						
FPE: Final prediction error						
AIC: Akaike information criterion						
SC: Schwarz information criterion						
HQ: Hannan-Quinn information criterion						

Теперь мы хотим написать программу в Eviews, которая бы производила диагностику остатков VAR-модели. Для коррелограммы (автокорреляции) остатков следует помнить, что EViews позволяет сделать выводы, справедливые лишь в асимптотическом смысле.

1. Оценить VAR-модель 2-го порядка.
2. Оценить коррелограмму остатков.
3. Применить тест Портманто.
4. Применить тест на нормальность.

```
' estimate VAR of order 2
smp1 1960:1 1978:4
var var1.ls 1 2 y1 y2 y3 @ c

' residual correlograms (Fig 4.2, p.149)
freeze(fig42) var1.correl(12,graph)
show fig42

' portmanteau test (p.152)
freeze(tab_p152) var1.qstats(12,name=qstat)
show tab_p152

' normality test (p.158)
freeze(tab_p158) var1.jbera(factor=chol,name=jbera)
show tab_p158
```

Наконец, мы напишем программу, которая позволяет решать следующие задачи:

1. Оценить VAR-модель.
2. Построить прогноз по оцененной VAR-модели. Для этого нам необходимо изменить объем текущей выборки с учетом выделенного периода прогнозирования, т. е. с учетом периода `smp1 1979:1 1980:1`, после чего, пользуясь оцененной моделью по суженной выборке, получить динамические прогнозы.
3. Изобразить фактические значения и их прогнозы. Объединить все графы в один.

Требуемый код приведен ниже:

```
' estimate VAR
smp1 1960:1 1978:4
var var1.ls 1 2 y1 y2 y3 @ c

' replicates p.72, (3.2.22) & (3.2.24)
' note that the variables are ordered differently
freeze(out1) var1.output
show out1

' make model out of estimated VAR
var1.makemodel(mod1)

' change sample to forecast period
```

```
' solve model to obtain dynamic forecasts
mod1.solve

' plot actual and forecasts
smpl 1975:1 1980:1
for !i=1 to var1.@neqn
  group gtmp y!i y!i_0
  freeze(gra!i) gtmp.line
  %gname = %gname + "gra"+ str(!i)
next
```

Таблица 4.2. Тесты Портманто

VAR Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations					
H0: no residual autocorrelations up to lag h					
Date: 04/21/03 Time: 23:39					
Sample: 1960:1 1978:4					
Included observations: 73					
Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	0.920768	NA*	0.933556	NA*	NA*
2	2.044941	NA*	2.089396	NA*	NA*
3	9.328680	0.4075	9.685295	0.3766	9
4	21.03897	0.2775	22.07444	0.2287	18
5	26.38946	0.4971	27.81836	0.4204	27
6	30.77054	0.7154	32.59177	0.6315	36
7	35.57594	0.8416	37.90683	0.7642	45
8	44.83454	0.8085	48.30495	0.6928	54
9	48.27351	0.9147	52.22752	0.8315	63
10	56.81194	0.9051	62.12126	0.7904	72
11	66.09500	0.8846	73.05132	0.7235	81
12	73.51723	0.8966	81.93365	0.7157	90
*The test is valid only for lags larger than the VAR lag order.					
df is degrees of freedom for (approximate) chi-square distribution					

Таблица 4.3. Тесты на нормальность

VAR Residual Normality Tests				
Orthogonalization: Cholesky (Lutkepohl)				
H0: residuals are multivariate normal				
Component	Skewness	Chi-sq	df	Prob.
1	0.119351	0.173310	1	0.6772
2	-0.383159	1.786194	1	0.1814
3	-0.312723	1.189845	1	0.2754
Joint		3.149350	3	0.3692
Component	Kurtosis	Chi-sq	df	Prob.
1	3.933079	2.648186	1	0.1037
2	3.739590	1.663770	1	0.1971
3	2.648386	0.376049	1	0.5397
Joint		4.688005	3	0.1961
Component	Jarque-Bera	df	Prob.	
1	2.821496	2	0.2440	
2	3.449965	2	0.1782	
3	1.565894	2	0.4571	
Joint		6	0.2503	

Autocorrelations with 2 Std.Err. Bounds

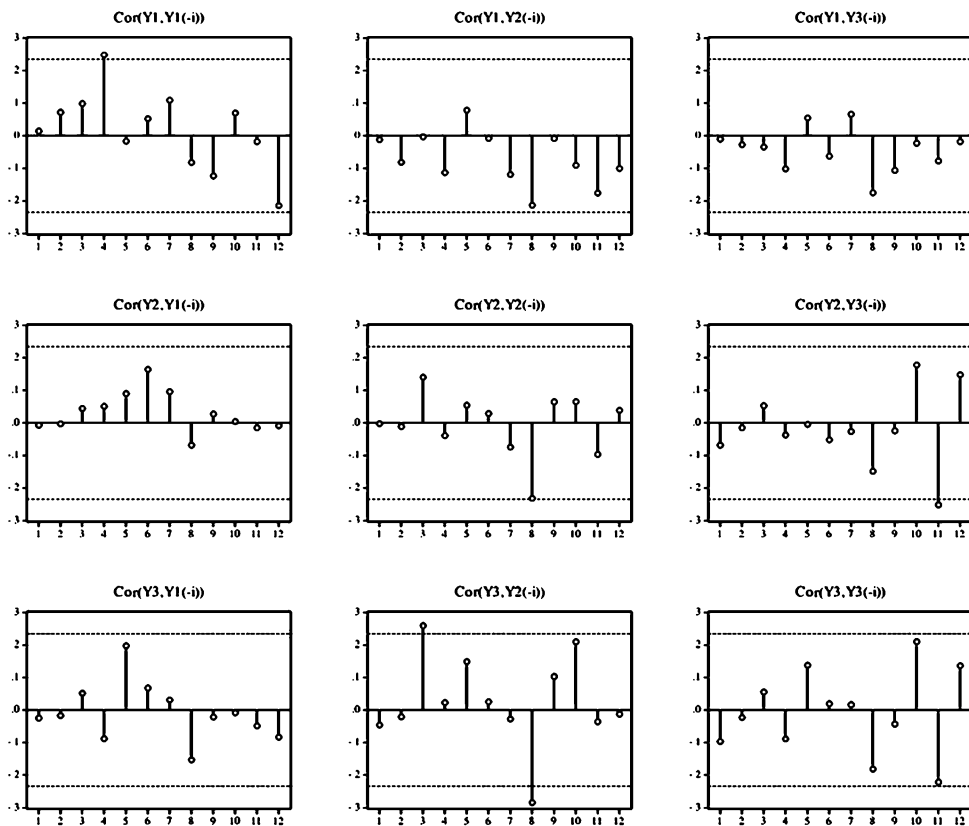


Рис. 4.1. Графики автокорреляций

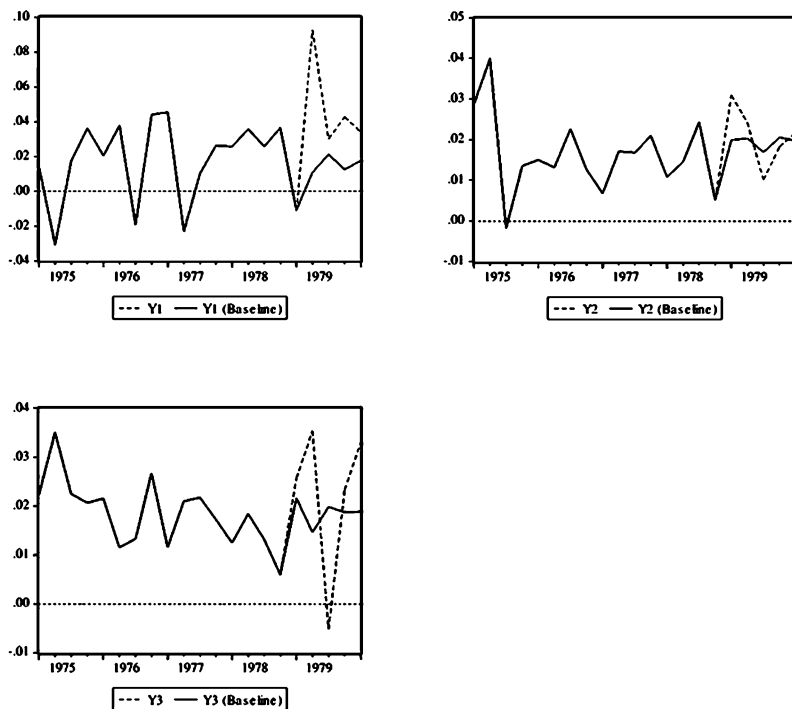


Рис. 4.2. Прогнозы VAR-модели

Таблица 4.4. Результаты оценивания VAR-модели

Vector Autoregression Estimates			
Sample(adjusted): 1960:4 1978:4			
Included observations: 73 after adjusting endpoints			
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]			
	Y1	Y2	Y3
Y1(-1)	-0.319631 (0.12546) [-2.54774]	0.043931 (0.03186) [ 1.37891]	-0.002423 (0.02568) [-0.09435]
Y1(-2)	-0.160551 (0.12491) [-1.28537]	0.050031 (0.03172) [ 1.57728]	0.033880 (0.02556) [ 1.32533]
Y2(-1)	0.145989 (0.54567) [ 0.26754]	-0.152732 (0.13857) [-1.10220]	0.224813 (0.11168) [ 2.01305]
Y2(-2)	0.114605 (0.53457) [ 0.21439]	0.019166 (0.13575) [ 0.14118]	0.354912 (0.10941) [ 3.24398]
Y3(-1)	0.961219 (0.66431) [ 1.44694]	0.288502 (0.16870) [ 1.71015]	-0.263968 (0.13596) [-1.94151]
Y3(-2)	0.934394 (0.66510) [ 1.40490]	-0.010205 (0.16890) [-0.06042]	-0.022230 (0.13612) [-0.16331]
C	-0.016722 (0.01723) [-0.97072]	0.015767 (0.00437) [ 3.60427]	0.012926 (0.00353) [ 3.66629]
R-squared	0.128562	0.114194	0.251282
Adj. R-squared	0.049340	0.033666	0.183217
Sum sq. resids	0.140556	0.009064	0.005887
S.E. equation	0.046148	0.011719	0.009445
F-statistic	1.622807	1.418070	3.691778
Log likelihood	124.6378	224.6938	240.4444
Akaike AIC	-3.222954	-5.964214	-6.395737
Schwarz SC	-3.003321	-5.744581	-6.176104
Mean dependent	0.018229	0.020283	0.019802
S.D. dependent	0.047330	0.011922	0.010451
Determinant Residual Covariance	1.66E-11		
Log Likelihood (d.f. adjusted)	595.2689		
Akaike Information Criteria	-15.73339		
Schwarz Criteria	-15.07449		

### 4.3. Структурные VAR-модели (SVAR-модели)

В последние годы модели структурной векторной авторегрессии (SVAR) стали весьма популярным инструментом анализа механизмов монетарного перехода и источников флуктуаций бизнес-циклов.

SVAR на сегодняшний момент реализована в широком списке стандартных эконометрических программных пакетов (например, в пакетах EViews или RATS), что делает возможным достаточно простое ее использование<sup>4</sup>.

Следует отметить, что тематика SVAR- и VAR-моделей тесно связана с тематикой моделей, представляемых в форме *систем линейных одновременных уравнений* (так называемых *COY-моделей*). Последним посвящен п. 4.4 нашего учебника. Действительно, как будет видно позже, *структурная* и *приведенная* формы COY-модели отличается, соответственно, от SVAR- и VAR-модели лишь присутствием в COY определенного количества *экзогенных переменных*, которые вместе с лагированными эндогенными переменными *y* составляют так называемые *предопределенные переменные* (см. ниже, п. 4.4). Так что формально всякую COY-модель можно представить в соответствующих терминах SVAR- (структурная форма COY) и VAR- (приведенная форма COY) модели (см., например, [Diebolt (1998)]). Однако специфика COY-моделей обуславливает правомерность выделения этого класса моделей для специального (автономного) описания.

В изложении п. 4.3.1–4.3.4 с любезного согласия автора используются результаты Эрика Зиво (Eric Zivot), см. <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/svarslides.pdf>, а также <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/svarslides2.pdf>

### 4.3.1. Представление в структурной и приведенной формах

Рассмотрим структурную VAR (SVAR)-модель вида:

$$y_{1t} = \gamma_{10} - b_{12}y_{2t} + \gamma_{11}y_{1t-1} + \gamma_{12}y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad (4.25)$$

$$y_{2t} = \gamma_{20} - b_{21}y_{1t} + \gamma_{21}y_{1t-1} + \gamma_{22}y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}, \quad (4.26)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim iid \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right),$$

где  $\varepsilon_{1t}$  и  $\varepsilon_{2t}$  называют *структурными остатками* и  $\text{cov}(y_{2t}, \varepsilon_{1t}) \neq 0$ ,  $\text{cov}(y_{1t}, \varepsilon_{2t}) \neq 0$ . Следовательно, все переменные являются эндогенными и метод наименьших квадратов не является подходящей техникой оценивания.

<sup>4</sup>Обзор работ, в которых для описания механизма монетарных переходов используются SVAR-модели, см. в [Christiano et al. (1999)]. Кроме того, следует отметить основополагающую работу [Blanchard and Quah (1989)], популяризирующую использование SVAR-моделей для анализа источников флуктуаций бизнес-циклов.  
 Скопировано с сайта <http://www.pearson.ru> Разработка электронных библиотек  
 Учебники и материалы 2000.pdf <http://www.pearson.ru>



В матричной форме эта модель имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t'] &= \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Если мы используем лаговый оператор, то SVAR-модель записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{L})\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \mathbf{B}(\mathbf{L}) &= \mathbf{B} - \boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{L}. \end{aligned}$$

Выражая  $\mathbf{y}_t$  через  $\mathbf{y}_{t-1}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , получаем *приведенную форму*:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_0 + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \\ &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t \\ \mathbf{a}_0 &= \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_0, \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_1, \mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t. \end{aligned} \quad (4.27')$$

Отметим, что

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{B}) = 1 - b_{12}b_{21}.$$

Записывая (4.27') более компактно, получим *приведенную форму остатков*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{L})\mathbf{y}_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{u}_t, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{L}) = \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{L}. \quad (4.29)$$

*Приведенная форма остатков*  $\mathbf{u}_t$  представляет собой линейную комбинацию структурных остатков  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Ковариационная матрица  $\mathbf{u}_t$  равна:

$$\mathbf{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'] = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t']\mathbf{B}^{-1'} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1'} = \boldsymbol{\Omega}.$$

Отметим, что параметры SVAR-модели в приведенной форме могут быть оценены методом наименьших квадратов, поскольку *лагированные значения переменных*  $\mathbf{y}$  не коррелированы с остатками  $\mathbf{u}_t$ .

### 4.3.2. Представление в форме модели скользящего среднего (представление Волда)

Если мы умножим обе части уравнения приведенной формы (4.28)–(4.29) на  $\mathbf{A}(\mathbf{L})^{-1} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{L})^{-1}$ , то получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{L})\mathbf{u}_t, & (4.30) \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{L}) &= (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{L})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_k\mathbf{L}^k, \quad \boldsymbol{\Psi}_0 = \mathbf{I}_2, \quad \boldsymbol{\Psi}_k = \mathbf{A}_1^k, \\ \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{A}(1)^{-1}\mathbf{a}_0, \\ \mathbf{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'] &= \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned}$$

Представление в форме структурного-скользящего среднего (ССС-представление) для  $\mathbf{y}_t$  основано на модели скользящего среднего бесконечного порядка. Учитывая в представлении Волда, что  $\mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{L})\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{L}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\Theta}_k\mathbf{L}^k = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{L})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}_1\mathbf{B}^{-1}\mathbf{L} + \dots \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_0 &= \mathbf{B}^{-1} \neq \mathbf{I}_2, \\ \boldsymbol{\Theta}_k &= \boldsymbol{\Psi}_k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}_1^k\mathbf{B}^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Пример 4.3 (структурное СС-представление для двумерной системы).

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(0)} & \theta_{12}^{(0)} \\ \theta_{21}^{(0)} & \theta_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(1)} & \theta_{12}^{(1)} \\ \theta_{21}^{(1)} & \theta_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{bmatrix} + \dots$$

Отметим, что:

- $\boldsymbol{\Theta}_0 = \mathbf{B}^{-1} \neq \mathbf{I}_2$ .  $\boldsymbol{\Theta}_0$  отражает начальное влияние структурных шоков и определяет одномоментную корреляцию между  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$ ;
- Элементы матрицы  $\boldsymbol{\Theta}_k$ ,  $\theta_{ij}^{(k)}$ , определяют множители, отвечающие за динамику, или импульсные отклики  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  на изменения в структурных остатках  $\varepsilon_{1t}$  и  $\varepsilon_{2t}$ .

## Функции импульсного отклика

Рассмотрим структурное СС-представление в момент времени  $t + s$ :

$$\begin{bmatrix} y_{1t+s} \\ y_{2t+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(0)} & \theta_{12}^{(0)} \\ \theta_{21}^{(0)} & \theta_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t+s} \\ \varepsilon_{2t+s} \end{bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(s)} & \theta_{12}^{(s)} \\ \theta_{21}^{(s)} & \theta_{22}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} + \dots$$

Множители, отвечающие за структурную динамику, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial y_{1t+s}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \theta_{11}^{(s)}, \quad \frac{\partial y_{1t+s}}{\partial \varepsilon_{2t}} = \theta_{12}^{(s)}, \\ \frac{\partial y_{2t+s}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \theta_{21}^{(s)}, \quad \frac{\partial y_{2t+s}}{\partial \varepsilon_{2t}} = \theta_{22}^{(s)}.$$

Функции структурного импульсного отклика (СИО-функции) определяются как совокупность пар  $(s, \theta_{ij}^{(s)})$  для  $i, j = 1, 2$ . Эти функции позволяют оценить, насколько единичные импульсы на структурные шоки в момент времени  $t$  влияют на значение  $y$  в момент времени  $t + s$ , где  $s$  принимает различные значения.

Из стационарности  $y_t$  следует, что  $\lim_{s \rightarrow \infty} \theta_{ij}^{(s)} = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Долгосрочное кумулятивное влияние структурных шоков определяется следующим образом:

$$\Theta(1) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(1) & \theta_{12}(1) \\ \theta_{21}(1) & \theta_{22}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{11}^{(s)} & \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{12}^{(s)} \\ \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{21}^{(s)} & \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{22}^{(s)} \end{bmatrix} \\ \Theta(L) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(L) & \theta_{12}(L) \\ \theta_{21}(L) & \theta_{22}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{11}^{(s)} L^s & \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{12}^{(s)} L^s \\ \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{21}^{(s)} L^s & \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{22}^{(s)} L^s \end{bmatrix}.$$

### 4.3.3. Вопросы идентификации: введение

Без некоторых определенных ограничений параметры SVAR-модели являются неидентифицируемыми. Это означает, что по заданным значениям параметров приведенной формы SVAR-модели  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$  и  $\Omega$  невоз-

Например, когда мы имеем 10 структурных параметров и 9 параметров редуцированной формы, требуется как минимум одно ограничение на параметры SVAR-модели. Типичными идентифицирующими ограничениями являются:

- нулевые (исключающие) ограничения на элементы матрицы  $\mathbf{B}$ ; например,  $b_{12} = 0$ ;
- линейные ограничения на элементы матрицы  $\mathbf{B}$ ; например,  $b_{12} + b_{21} = 1$ .

В некоторых приложениях идентификация параметров SVAR-модели достигается при помощи ограничений на параметры структурного СС-представления:

- *идентификация при помощи одновременных ограничений.* Предположим, что  $\varepsilon_{2t}$  не имеет одновременного влияния на  $y_{1t}$ . Тогда  $\theta_{12}^{(0)} = 0$  и

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(0)} & 0 \\ \theta_{21}^{(0)} & \theta_{22}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $\Theta_0 = \mathbf{B}^{-1}$ , тогда

$$\begin{bmatrix} \theta_{11}^{(0)} & 0 \\ \theta_{21}^{(0)} & \theta_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix} \implies b_{12} = 0.$$

Таким образом, предположение  $\theta_{12}^{(0)} = 0$  в структурном СС-представлении эквивалентно предположению, что  $b_{12} = 0$  в SVAR-представлении;

- *идентификация при помощи долгосрочных ограничений.* Предположим, что  $\varepsilon_{2t}$  не имеет долгосрочного кумулятивного влияния на  $y_{1t}$ . Тогда

$$\theta_{12}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{12}^{(s)} = 0.$$

$$\Theta(1) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(1) & 0 \\ \theta_{21}(1) & \theta_{22}(1) \end{bmatrix}.$$

Этот тип долгосрочных ограничений дает нелинейные ограничения на коэффициенты SVAR-модели, поскольку

#### 4.3.4. Идентификация с использованием рекурсивно-причинного упорядочивания

Рассмотрим двумерную SVAR-модель. Для идентификации нам необходимо как минимум одно ограничение на параметры. Предположим, что  $b_{12} = 0$ , а значит, матрица  $\mathbf{B}$  нижнетреугольна. То есть

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае SVAR-модель становится рекурсивной моделью:

$$y_{1t} = \gamma_{10} + \gamma_{11}y_{1t-1} + \gamma_{12}y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad (4.31)$$

$$y_{2t} = \gamma_{20} - b_{21}y_{2t} + \gamma_{21}y_{1t-1} + \gamma_{22}y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}. \quad (4.32)$$

Рекурсивная модель налагает следующие ограничения: значение  $y_{2t}$  не имеет единовременный эффект на  $y_{1t}$ ; поскольку априори  $b_{21} \neq 0$ , мы допускаем возможность, что  $y_{1t}$  имеет единовременный эффект на  $y_{2t}$ .

В этом случае приведенная форма VAR-остатков  $\mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1}\varepsilon_t$  имеет вид:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} - b_{21}\varepsilon_{1t} \end{bmatrix}.$$

Теперь мы покажем, что ограничения  $b_{12} = 0$  достаточно для идентификации  $b_{21}$ , а следовательно, для идентификации матрицы  $\mathbf{B}$ . Для этого нам необходимо установить, можно ли единственным образом идентифицировать  $b_{21}$  из элементов ковариационной матрицы  $\Omega$  приведенной формы. Заметим, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_2^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b_{21} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -b_{21}\sigma_1^2 \\ -b_{21}\sigma_1^2 & \sigma_2^2 + b_{21}^2\sigma_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда мы можем выразить  $b_{21}$  следующим образом:

$$b_{21} = -\frac{\omega_{12}}{\omega_1^2} = -\rho \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

где  $\rho = \omega_{12}/\omega_1\omega_2$  — корреляция между  $u_1$  и  $u_2$ . Отметим, что  $b_{21} \neq 0$  при условии  $\rho \neq 0$ .

### Оценка с использованием рекурсивно-причинного упорядочивания

Учитывая описанные выше результаты, процесс оценки может быть разделен на три шага:

- оценить каждое уравнение приведенной формы VAR-модели при помощи метода наименьших квадратов:

$$y_t = \hat{a}_0 + \hat{A}_1 y_{t-1} + \hat{u}_t$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t';$$

- оценить  $b_{21}$  и  $B$  из  $\hat{\Omega}$ :

$$\hat{b}_{21} = -\frac{\hat{\omega}_{12}}{\hat{\omega}_1^2}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{b}_{21} & 1 \end{bmatrix};$$

- оценить параметры структурного СС-представления из оценок  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{A}_1$  и  $\hat{B}$ :

$$y_t = \hat{\mu} + \hat{\Theta}(L)\hat{\varepsilon}_t$$

$$\hat{\mu} = \hat{a}_0(I_2 - \hat{A}_1)^{-1}$$

$$\hat{\Theta}_k = \hat{A}_1^k \hat{B}^{-1}, k = 0, 1, \dots$$

$$\hat{D} = \hat{B} \hat{\Omega} \hat{B}'.$$

Для того чтобы найти структурную функцию импульсного отклика, необходимо оценить параметры структурного СС-представления. Поскольку

$$\Theta(L) = \Psi(L)B^{-1},$$

$$\Psi(L) = A(L)^{-1} = (I_2 - A_1 L)^{-1},$$

процедуру оценки параметров для  $\Theta(L)$  часто можно разбить на следующие шаги:

- $A_1$  оценивается из приведенной формы VAR.
- При заданном значении  $\hat{A}_1$  матрицы в  $\Psi(L)$  могут быть оценены при помощи  $\hat{\Psi}_k = \hat{A}_1^k$ .
- $B$  оценивается из идентифицируемой SVAR-модели.
- При заданных  $\hat{B}$  и  $\hat{\Psi}_k$  оценки  $\Theta_k, k = 0, 1, \dots$  могут быть получены как  $\hat{\Theta}_k = \hat{\Psi}_k \hat{B}^{-1}$ .

## Восстановление структурного СС-представления с использованием разложения Холецкого

SVAR-представление, основанное на рекурсивно-причинном упорядочивании, может быть вычислено с использованием разложения Холецкого ковариационной матрицы  $\Omega$  приведенной формы. Разложение Холецкого положительно-полуопределенной матрицы  $\Omega$  определяется как:

$$\Omega = \mathbf{P}\mathbf{P}', \quad \text{где } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Из разложения Холецкого можно получить так называемое *треугольное разложение*:

$$\Omega = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}', \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{21} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, 2.$$

Рассмотрим приведенную форму VAR-модели:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t, \quad \Omega = \mathbf{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'] = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}'.$$

Умножая на  $\mathbf{T}^{-1}$ , построим псевдо SVAR-модель:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}_t &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{a}_0 + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}_t, \implies \\ \implies \mathbf{B}\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}, \quad \boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{a}_0, \quad \boldsymbol{\Gamma}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}_t.$$

Псевдоструктурные остатки  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  имеют диагональную ковариационную матрицу  $\mathbf{\Lambda}$ :

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t'] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t']\mathbf{T}^{-1'} = \mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}^{-1'} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1'} = \mathbf{\Lambda}.$$

В псевдо SVAR-модели:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t_{21} & 1 \end{bmatrix} \implies b_{12} = 0, \quad b_{21} = -t_{21}.$$

Идентификация SVAR-модели с использованием треугольной факторизации зависит от упорядочивания компонент вектора  $\mathbf{y}_t$ . В приведенном выше анализе предполагается, что компоненты вектора  $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})'$  упорядочены так, что  $y_{1t}$  — первая компонента,  $y_{2t}$  — вторая. Когда осуществляется треугольная факторизация и оценивается псевдо SVAR-модель, то в этом случае структурная матрица  $\mathbf{B}$  равна:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \implies \text{Рис. 4.10}$$

Если переменные упорядочены в обратном порядке, то  $\mathbf{y}_t = (y_{2t}, y_{1t})'$ , тогда рекурсивно-причинное упорядочивание SVAR-модели представлено в обратном порядке и структурная матрица  $\mathbf{B}$  становится равной:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies b_{21} = 0.$$

Упорядочивание переменных в  $\mathbf{y}_t$  определяет рекурсивно-причинную структуру SVAR-модели. К сожалению, эти идентификационные предположения не являются проверяемыми. Поэтому для определения того, как структурный анализ, основанный на изучении поведения СИО-функций, определяется предполагаемым причинным упорядочиванием, часто проводят «анализ чувствительности».

Этот анализ чувствительности основан на оценке SVAR-модели для различных вариантов упорядочиваний переменных. Если для различных вариантов упорядочиваний переменных в  $\mathbf{y}_t$  СИО-функции значительно отличаются друг от друга, тогда очевидно, что рекурсивно-причинная структура влияет на структурные выводы.

Один из способов определить, влияет ли предполагаемое причинное упорядочивание на структурные выводы — взглянуть на ковариационную матрицу остатков  $\hat{\Omega}$  для оцененной VAR-модели в приведенной форме. Если эта ковариационная матрица близка к диагональной, тогда оцененная матрица  $\mathbf{B}$  будет близка к диагональной матрице и упорядочивание переменных не будет влиять на структурные выводы.

### Замечание относительно обозначений

В некоторых работах вы можете найти модель в *приведенной форме*, представленную в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{L})\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \in N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}),$$

тогда как *структурная модель* представлена как:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{A}(\mathbf{L})\mathbf{y}_t &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_t &= \mathbf{B}\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \in N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2). \end{aligned}$$

Остатки в *приведенной форме*  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  соответствуют  $\mathbf{u}_t$ , тогда как *структурные остатки*  $\mathbf{e}_t$  соответствуют  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Более того, матрица  $\mathbf{A}$  соответствует матрице  $\mathbf{B}$ , а матрица  $\mathbf{B}$  соответствует матрице  $\mathbf{D}$ .



### 4.3.5. Идентификация с использованием долгосрочных ограничений

Рассмотрим два наблюдаемых временных ряда  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  таких, что  $y_{1t} \sim I(1)$ , а  $y_{2t} \sim I(0)$ <sup>5</sup>. Это возможно, в частности, в случае примера, представленного в работе [Blanchard, Quah (1989)]:

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{логарифм реального ВВП,} \\ y_2 &= \text{доля безработных.} \end{aligned}$$

Определим

$$y_t = (\Delta y_{1t}, y_{2t})' \implies y_t \sim I(0).$$

Предположим, что для  $y_t$  справедливо следующее структурное представление:

$$\begin{aligned} B y_t &= \gamma_0 + \Gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ y_t &= \mu + \Theta(L) \varepsilon_t \\ \Theta(L) &= \Psi(L) B^{-1} \\ E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] &= D \text{ (диагональна).} \end{aligned}$$

Приведенная форма этого представления имеет вид:

$$\begin{aligned} y_t &= B^{-1} \gamma_0 + B^{-1} \Gamma_1 y_{t-1} + B^{-1} \varepsilon_t = a_0 + A_1 y_{t-1} + u_t = \\ &= \mu + \Psi(L) u_t, \\ \Psi(L) &= (I_2 - A_1 L)^{-1}, \\ E[u_t u_t'] &= B^{-1} E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] B^{-1'} = B^{-1} D B^{-1'} = \Omega. \end{aligned}$$

Отметим, что в работе [Blanchard, Quah (1989)]  $\varepsilon_{1t}$  интерпретируется как постоянный шок в уравнении «предложен», поскольку последний является остатком в модели реального объема производства  $y_t$ ,  $\varepsilon_{2t}$  интерпретируется как временный шок в уравнении спроса, поскольку это остатки в модели для доли безработных.

Структурная СИО-функция определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta y_{1t+s}}{\partial \varepsilon_{1t}} &= \theta_{11}^{(s)}, & \frac{\partial \Delta y_{1t+s}}{\partial \varepsilon_{2t}} &= \theta_{12}^{(s)}, \\ \frac{\partial y_{2t+s}}{\partial \varepsilon_{1t}} &= \theta_{21}^{(s)}, & \frac{\partial y_{2t+s}}{\partial \varepsilon_{2t}} &= \theta_{22}^{(s)}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Напомним, что нестационарный временной ряд (процесс)  $y_t$  называется **интегрируемым порядка  $d$**  (обозначается  $y_t \sim I(d)$ ), если он впервые становится стационарным после  $d$ -кратного применения к нему операции взятия первой разности, т.е. ряд  $(I - L)^{d-1} y_t$  является рядом нестационарным, в то время как ряд  $(I - L)^d y_t$  стационарен. При этом под  $y_t \sim I(0)$  подразумевается факт стационарности ряда  $y_t$ .  
Скопировано с сайта <http://www.mathnet.ru> Разработка электронных библиотек <http://www.mathnet.ru>

Поскольку ряд  $y_{1t}$  (выпуск) имеет первый порядок интегрируемости, долгосрочное кумулятивное влияние шоков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  на уровень  $y_1$  равно:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{1t+s}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \theta_{11}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{11}^{(s)},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{1t+s}}{\partial \varepsilon_{2t}} = \theta_{12}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{12}^{(s)}.$$

Поскольку  $y_{2t}$  (безработица) является стационарным временным рядом, долгосрочное кумулятивное влияние шоков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  на уровень  $y_2$  равно:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{2t+s}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \theta_{2j}^{(s)} = 0.$$

Для  $y_2$  долгосрочные кумулятивные влияния соответствующих шоков равны:

$$\theta_{21}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{21}^{(s)},$$

$$\theta_{22}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{22}^{(s)}$$

соответственно.

В работе [Blanchard, Quah (1989)] идентификация SVAR/SMA-модели достигается на основании следующих предположений:

- временные (спрос) шоки (шоки в  $\varepsilon_2$ ) не имеют долгосрочного влияния на уровень выпуска производства или безработицы;
- постоянные (выпуск) шоки (шоки в  $\varepsilon_1$ ) имеют долгосрочное влияние на уровень выпуска производства, но не на уровень безработицы.

Ограничение, состоящее в том, что шоки в  $\varepsilon_2$  не имеют долгосрочного влияния на уровень  $y_1$ , формализуется в рассматриваемой модели следующим образом:

$$\theta_{12}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{12}^{(s)} = 0.$$

Ограничение, состоящее в том, что шоки в  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  не имеют долгосрочного воздействия на уровень  $y_2$ , формализуется следующим образом:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{2t+s}}{\partial \varepsilon_{jt}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \theta_{2j}^{(s)} = 0.$$

что следует из того, что  $y_2 \sim I(0)$ .

В предположениях, допускаемых в работе [Blanchard, Quah (1989)], матрица долгосрочного кумулятивного влияния  $\Theta(1)$  является нижнетреугольной:

$$\Theta(1) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(1) & 0 \\ \theta_{21}(1) & \theta_{22}(1) \end{bmatrix}.$$

Нижнетреугольная матрица  $\Theta(1)$  может быть использована для идентификации матрицы  $\mathbf{B}$ . Для того чтобы увидеть это, рассмотрим ковариационную матрицу для  $y_t$ , определяемую из представления Волда (4.30):

$$\Lambda = \Psi(1)\Omega\Psi(1)' = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1}\Omega((\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1})'.$$

Эту матрицу называют «долгосрочной» («long-run covariance matrix»). Так как

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1'} \\ \Theta(1) &= \Psi(1)\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}^{-1}, \end{aligned}$$

то матрица  $\Lambda$  может быть представлена как:

$$\Lambda = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{B}^{-1})'((\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1})' = \Theta(1)\mathbf{D}\Theta(1)'.$$

Для того чтобы идентифицировать матрицу  $\mathbf{B}$ , в работе [Blanchard, Quah (1989)] делается дополнительное предположение:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_2,$$

т. е. предполагается, что структурные шоки  $\varepsilon_{1t}$  и  $\varepsilon_{2t}$  имеют единичные дисперсии. Тогда

$$\Lambda = \Theta(1)\Theta(1)'.$$

Поскольку матрица  $\Theta(1)$  нижнетреугольная, то матрица  $\Lambda$  единственна, и она может быть получена при помощи разложения Холецкого; т. е.  $\Theta(1)$  может быть вычислена как нижнетреугольная матрица в разложении Холецкого для  $\Lambda$ . Разложение Холецкого для  $\Lambda$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbf{P}\mathbf{P}' = \Theta(1)\Theta(1)', \\ \Rightarrow \Theta(1) &= \mathbf{P}. \end{aligned}$$

При условии, что матрица  $\Theta(1) = \mathbf{P}$  может быть вычислена при заданной матрице  $\Lambda$ , матрица  $\mathbf{B}$  может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \Theta(1) = \Psi(1)\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}^{-1}, \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= [(\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{P}]^{-1}. \end{aligned}$$

## Оценка SVAR-модели при наличии долгосрочных ограничений

Оценка матриц  $\mathbf{B}$  и  $\Theta(\mathbf{L})$  с использованием идентификационной схемы, представленной в работе [Blanchard, Quah (1989)], может быть осуществлена следующим образом:

- Оценить приведенную форму VAR-модели при помощи метода наименьших квадратов, примененного к каждому уравнению:

$$\mathbf{y}_t = \hat{\mathbf{a}}_0 + \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \hat{\mathbf{u}}_t$$

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{u}}_t'$$

- Вычислить параметрическую оценку долгосрочной ковариационной матрицы остатков модели (1.30):

$$\hat{\mathbf{\Lambda}} = (\mathbf{I}_2 - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1} \hat{\mathbf{\Omega}} (\mathbf{I}_2 - \hat{\mathbf{A}}_1)^{-1'}$$

- Вычислить разложение Холецкого для матрицы  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ :

$$\hat{\mathbf{\Lambda}} = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}'$$

- Оценить  $\Theta(\mathbf{1})$  как нижнетреугольную матрицу в разложении Холецкого матрицы  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ ,

$$\hat{\Theta}(\mathbf{1}) = \hat{\mathbf{P}}$$

- Оценить  $\mathbf{B}$  по формуле:

$$\hat{\mathbf{B}} = [(\mathbf{I}_2 - \hat{\mathbf{A}}_1) \hat{\Theta}(\mathbf{1})]^{-1}$$

- Оценить  $\Theta_k$  по формуле:

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Psi}_k \hat{\mathbf{B}}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}_1^k \hat{\mathbf{B}}^{-1}$$

Используя полученную оценку  $\hat{\Theta}_k$ , можно вычислить матрицы структурных функций импульсного отклика. Кроме того, оценки структурных функций  $\hat{\xi}_1$  и  $\hat{\xi}_2$  могут быть получены по формуле:  $\hat{\xi}_t = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}_t$

### 4.3.6. Эмпирические приложения с использованием Eviews

#### Модель Бланчада — Куаха

Представленный ниже программный код позволит обработать модель с долгосрочными ограничениями из работы [Blanchard, Quah (1989)] (обрабатываемые здесь данные отличны от тех, что рассматривались в [Blanchard, Quah (1989)], поэтому результаты совпадать не будут). Временные ряды  $\Delta Y$  (выпуск) и  $U$  (безработица) центрированы при помощи процедуры, представленной в работе [Blanchard, Quah (1989)]. Пример включен в состав E-views, 6.

Следующий код позволит оценить матрицу факторизации двумя способами, которые приводят к одному результату.

```

' Модель Бланчада-Куаха с долгосрочными
' ограничениями (11/5/99).
' Получение матрицы факторизации двумя методами
' изменить путь к программе
%path = @runpath
cd %path
' создать рабочий файл
wfcreate blanquah q 1948:1 1987:4
' извлечь данные (уже децентрированные данные) из базы
fetch(d=data_svar) dy u
' оценить VAR-модель (без константы)
var var1.ls 1 8 dy u @
'-----
' метод 1:
'-----
var1.cleartext(svar) var1.append(svar) @lrl(@u1)=0
freeze(tab1) var1.svar(rtype=text,conv=1e-4)
show tab1
' сохранить оценки матриц A и B, полученные
' с использованием метода 1
matrix mata1 = var1.@svaramat
' Матрица A должна быть единичной
matrix matb1 = var1.@svarbmat
'-----
' метод 2:
' *рекомендуется использовать для проверки*
'-----
' получить единичное долгосрочное кумулятивное влияние
var1.impulse(imp=u)
matrix clr = var1.@lrrsp
var1.cleartext(svar)
var1.append(svar) @e1 = c(1)*@u1 + c(2)*@u2
var1.append(svar) @e2 = -clr(1,1)*c(1)/clr(1,2)*@u1 +
+ c(4)*@u2
var1.svar(rtype=text,conv=1e-5)

```

```
show tab2
' сохранить оценки матриц A и B, полученные
' с использованием метода 2
matrix mata2 = var1.@svaramat
' A должна быть единичной матрицей
matrix matb2 = var1.@svarbmat
```

Должны получиться следующие результаты.

**Таблица 4.5.** Результаты оценки модели с долгосрочными ограничениями по методу 1

Structural VAR Estimates				
Sample (adjusted): 1950Q2 1987Q4				
Convergence achieved after 9 iterations				
Structural VAR is just-identified				
Model: Ae = Bu where E[uu']=I				
Restriction Type: long-run text form				
Long-run response pattern:				
0	C(2)			
C(1)	C(3)			
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	4.043213	0.232661	17.37815	0.0000
C(2)	0.005186	0.000298	17.37815	0.0000
C(3)	0.008335	0.329032	0.025333	0.9798
Log likelihood	495.5765			
Estimated A matrix:				
1.000000	0.000000			
0.000000	1.000000			
Estimated B matrix:				
0.009296	0.000746			
-0.208221	0.219819			

**Таблица 4.6.** Результаты оценки модели с долгосрочными эффектами по методу 2

Structural VAR Estimates		
Sample (adjusted): 1950Q2 1987Q4		
Included observations: 151 after adjustments		
Convergence achieved after 8 iterations		
Structural VAR is just-identified		
Model: Ae = Bu where E[uu']=I		
Restriction Type: short-run text form		
$\textcircled{E}1 = C(1)*\textcircled{U}1 + C(2)*\textcircled{U}2$ $\textcircled{E}2 = -CLR(1,1)*C(1)/CLR(1,2)*\textcircled{U}1 + C(4)*\textcircled{U}2$		
where		
$\textcircled{e}1 \text{ represents DY residuals}$ $\textcircled{e}2 \text{ represents U residuals}$		

Таблица 4.6. (продолжение)

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.009296	0.000535	17.37815	0.0000
C(2)	0.000746	0.000758	0.984581	0.3248
C(4)	0.219819	0.021145	10.39558	0.0000
Log likelihood	495.5765			
Estimated A matrix:				
1.000000	0.000000			
0.000000	1.000000			
Estimated B matrix:				
0.009296	0.000746			
-0.208221	0.219819			

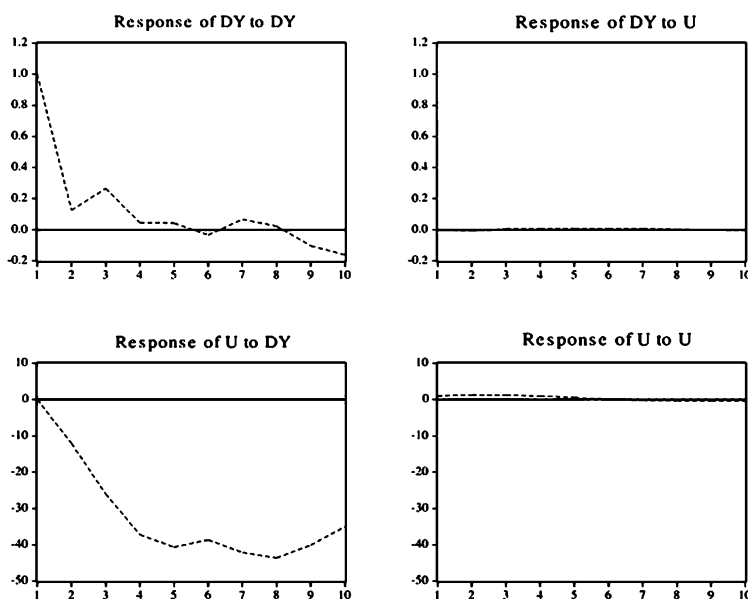


Рис. 4.3. Графики влияния нефакторизованной одноэлементной инновации

Следующая программа позволяет графически изобразить функции импульсного отклика. Временные ряды  $\Delta Y$  (выпуск) и  $U$  (безработица) децентрированы с использованием процедуры, представленной в работе [Blanchard, Quah (1989)].

Для того чтобы изобразить как кумулятивное влияние, так и уровень отклика на одном рисунке, нам необходимо сохранять значения функции импульсного отклика в отдельных матрицах. После этого извлекать эти данные, вставлять их в соответствующие столбцы третьей матрицы и использовать графические функции изображения элементов матрицы.

’ графическое изображение функции импульсного отклика

’ от долгосрочных ограничений (см. [Blanchard,

```

' изменить путь к программе
%path = @runpath
cd %path
' создать рабочий файл
wfcreate blanquah q 1948:1 1987:4
' извлечь данные (уже децентрированные) из базы
fetch(d=data_svar) dy u
' преобразовать в проценты
dy = 100*dy
' оценить VAR-модель (без константы)
var var1.ls 1 8 dy u @
' формирование долгосрочных ограничений
' @u1 = агрегированный шок (спрос)
' @u2 = агрегированный шок (предложение)
var1.cleartext(svar)
var1.append(svar) @lr1(@u1)=0
' факторизация
freeze(tab1) var1.svar(rtype=text,conv=1e-5)
' фиксация горизонта влияние
!hrz = 40
' изображение рисунков 3-4
freeze(fig3) var1.impulse(!hrz,imp=struct,se=a,a,matbys=rsp_acc) dy @ 1
freeze(fig4) var1.impulse(!hrz,imp=struct,se=a,a) dy @ 2
freeze(fig34) fig3 fig4
show fig34
' изображение рисунков 5-6
freeze(fig5) var1.impulse(!hrz,imp=struct,se=a,matbys=rsp_lvl) u @ 1
freeze(fig6) var1.impulse(!hrz,imp=struct,se=a) u @ 2
freeze(fig56) fig5 fig6
show fig56
' изобразить рисунок 1
matrix(!hrz,2) mtmp
' получить кумулятивное влияние объема выпуска продукции
vector v = @columnextract(rsp_acc,1)
colplace(mtmp,v,1)
' получить уровень влияния безработицы
v = @columnextract(rsp_lvl,2)
colplace(mtmp,v,2)
freeze(fig1) mtmp.line
fig1.draw(line,left) 0
fig1.elem(1) legend(Output response to demand)
fig1.elem(2) legend(Unemployment response to demand)
show fig1
' получить кумулятивное влияние объема выпуска продукции
vector v = @columnextract(rsp_acc,3)
colplace(mtmp,v,1)
' получить уровень влияния безработицы
v = @columnextract(rsp_lvl,4)
colplace(mtmp,v,2)
freeze(fig2) mtmp.line
fig2.draw(line,left) 0

```



```
fig2.elem(1) legend(Output response to supply)
fig2.elem(2) legend(Unemployment response to supply)
show fig2
```

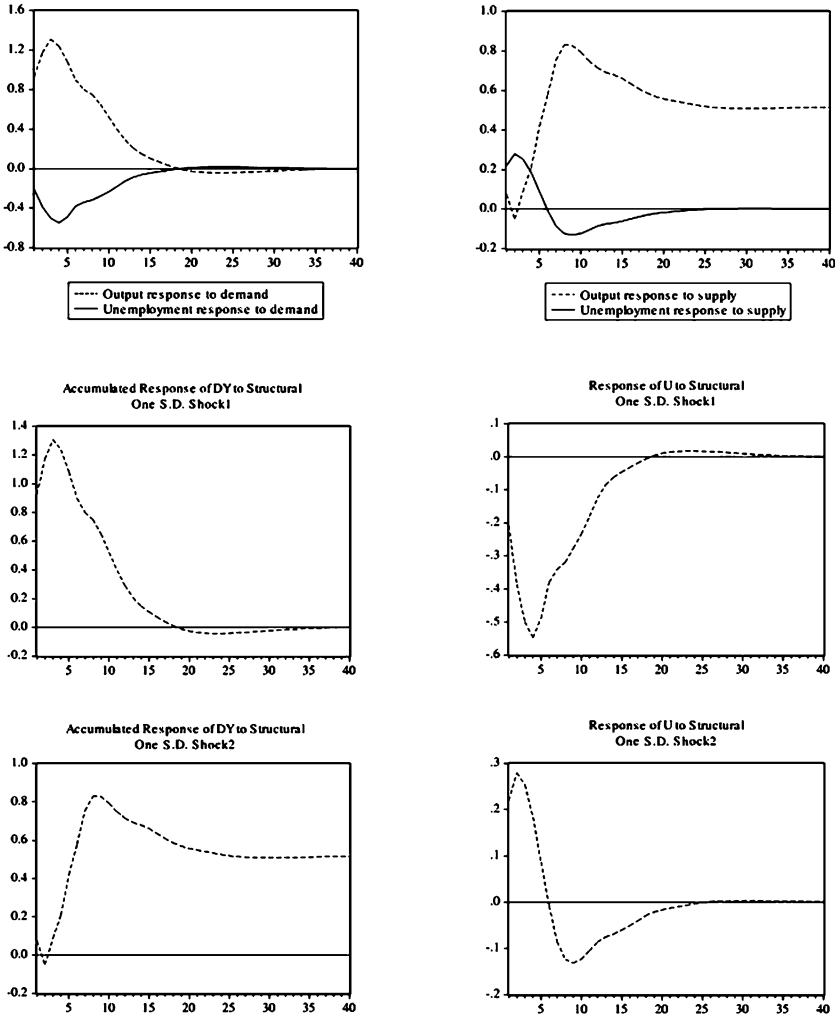


Рис. 4.4. Графики влияния дохода и безработицы на спрос и предложение

## Разложение Холецкого как структурная факторизация

Следующая программа иллюстрирует две формы формализации краткосрочных идентифицирующих ограничений в структурном разложении. В целях проверки корректности формализации ограничений мы будем использовать разложение Холецкого. Легко увидеть, что получаемые с использованием каждого из трех методов результаты совпадают.

- ' Пользуясь SVAR-представлением,
- ' применить разложение Холецкого
- ' изменить путь к программе

```
%path = @runpath
```

Скопировано с сайта  
http://учебники.информ2000.рф

Разработка электронных библиотек  
https://право.информ2000.рф

```

' создать рабочий файл
wfcreate cholsvvar q 1948:1 1979:3
' извлечь данные из базы
fetch(d=data_svar) rgnp rinv m1
' Применить логарифмическое преобразование
' к каждому из рассматриваемых временных рядов
series lgnp = log(rgnp)
series linv = log(rinv)
series lm1 = log(m1)
' оценить VAR-модель без ограничений
var var1.ls 1 4 lgnp linv lm1 @ c
' -----
' метод 1: краткосрочные ограничения в текстовой форме
' -----
var1.cleartext(svar)
var1.append(svar) @e1 = c(1)*@u1
var1.append(svar) @e2 = -c(2)*@e1 + c(3)*@u2
var1.append(svar) @e3 = -c(4)*@e1 - c(5)*@e2 + c(6)*@u3
freeze(tab1) var1.svar(rtype=text,conv=1e-5)
show tab1
' сохранить оценки матриц A и B,
' получаемые с использованием метода 1
matrix mata1 = var1.@svaramat
matrix matb1 = var1.@svarbmat
' вычислить матрицу факторизации
matrix fact1 = @inverse(mata1)*matb1
' -----
' метод 2: краткосрочные ограничения в матрице-образце
' -----
' создать и заполнить матрицу-образец
matrix(3,3) pata
pata.fill(by=r) 1,0,0, na,1,0, na,na,1
matrix(3,3) patb
patb.fill(by=r) na,0,0, 0,na,0, 0,0,na
freeze(tab2) var1.svar(rtype=patsr,conv=1e-5,namea=pata,
nameb=patb)
show tab2
' сохранить оценки матриц A и B,
' получаемые с использованием метода 2
matrix mata2 = var1.@svaramat
matrix matb2 = var1.@svarbmat
' вычислить матрицу факторизации
matrix fact2 = @inverse(mata2)*matb2
' -----
' метод 3: встроенное разложение Холецкого
' -----
' Оценить импульсное влияние с заданным разложением Холец-
кого порядком
var1.impulse(10)
' сохранить матрицу в разложении Холецкого
matrix fact3 = var1.@impfact

```

Таблица 4.7. Результаты оценки модели по методу 1

Model: Ae = Bu where E[uu'] = I				
Restriction Type: short-run text form				
@E1 = C(1)*@U1				
@E2 = -C(2)*@E1 + C(3)*@U2				
@E3 = -C(4)*@E1 - C(5)*@E2 + C(6)*@U3				where
@e1 represents LGNP residuals				
@e2 represents LINV residuals				
@e3 represents LM1 residuals				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(2)	-1.267693	0.174224	-7.276223	0.0000
C(4)	-0.163608	0.052334	-3.126221	0.0018
C(5)	0.024427	0.022646	1.078662	0.2807
C(1)	0.010597	0.000676	15.68439	0.0000
C(3)	0.020475	0.001305	15.68439	0.0000
C(6)	0.005142	0.000328	15.68439	0.0000
Estimated A matrix:				
1.000000	0.000000	0.000000		
-1.267693	1.000000	0.000000		
-0.163608	0.024427	1.000000		
Estimated B matrix:				
0.010597	0.000000	0.000000		
0.000000	0.020475	0.000000		
0.000000	0.000000	0.005142		

Таблица 4.8. Результаты оценки модели по методу 2

Model: Ae = Bu where E[uu'] = I Restriction Type: short-run pattern matrix				
A =				
1	0	0		
C(1)	1	0		
C(2)	C(3)	1		
B =				
C(4)	0	0		
0	C(5)	0		
0	0	C(6)		
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-1.267693	0.174224	-7.276223	0.0000
C(2)	-0.163608	0.052334	-3.126221	0.0018
C(3)	0.024427	0.022646	1.078662	0.2807
C(4)	0.010597	0.000676	15.68439	0.0000
C(5)	0.020475	0.001305	15.68439	0.0000
C(6)	0.005142	0.000328	15.68439	0.0000
Estimated A matrix:				
1.000000	0.000000	0.000000		
-1.267693	1.000000	0.000000		
-0.163608	0.024427	1.000000		
Estimated B matrix:				
0.010597	0.000000	0.000000		
0.000000	0.020475	0.000000		
0.000000	0.000000	0.005142		

При использовании метода 3 (встроенного разложения Холецкого) матрицы FACT1, FACT2 и FACT3 все равны:

$$\text{FACT} = \begin{pmatrix} 0,010597 & 0,000000 & 0,000000 \\ 0,013433 & 0,020475 & 0,000000 \\ 0,001406 & -0,000500 & 0,005142 \end{pmatrix}.$$

Вид соответствующих функций импульсного отклика представлен

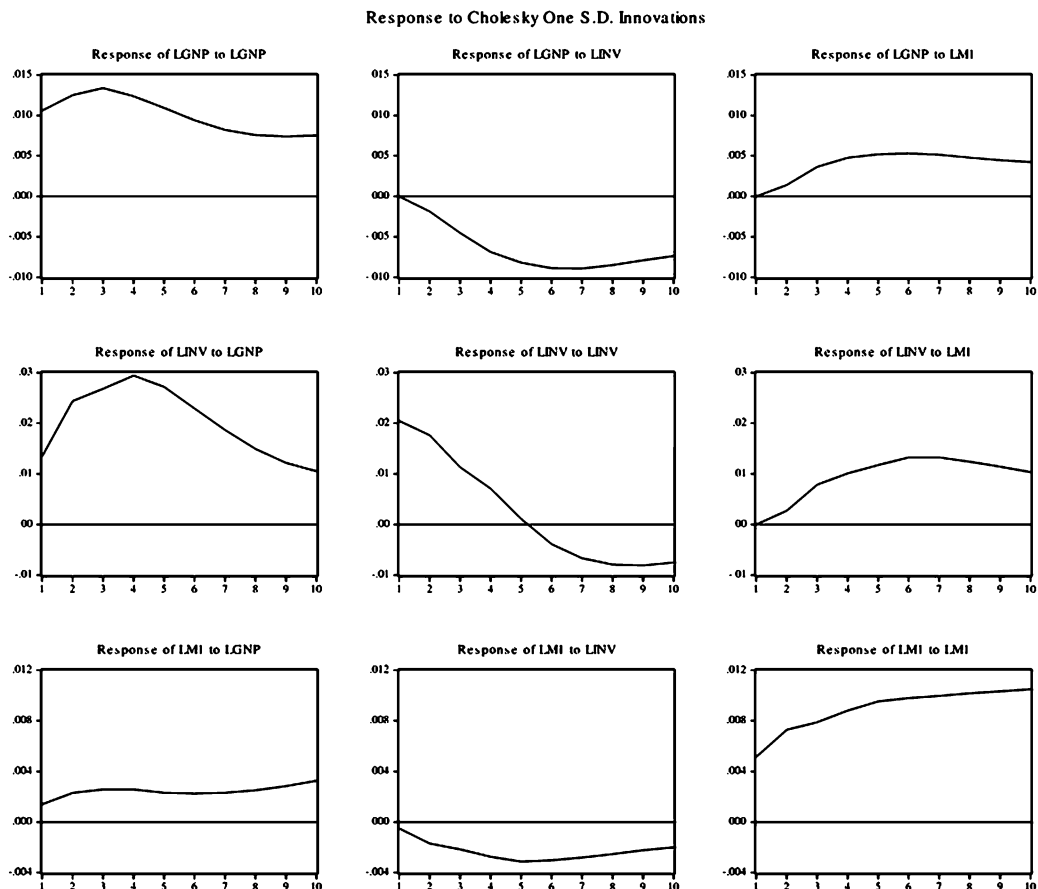


Рис. 4.5. Функции импульсного отклика

## 4.4. Системы одновременных уравнений (СОУ)

В данном пункте четвертой главы мы продолжаем описание эконометрических моделей, представимых в форме системы уравнений. При этом мы получаем в определенном смысле развитие проблематики VAR- и SVAR-моделей, которой были посвящены п. 4.2 и 4.3. Выделим две отличительные особенности СОУ-моделей:

- (а) в о - п е р в ы х, среди уравнений СОУ могут присутствовать так называемые **балансовые тождества**, т.е. *детерминированные* (вытекающие из экономической теории) соотношения между анализируемыми показателями, не содержащие подлежащих статистическому оцениванию параметров;
- (б) в о - в т о р ы х, в правые части описывающих SVAR-модели стохастических уравнений (4.27) могут быть **включены экзогенные переменные**  $X_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)})'$ , измеренные **одновременно с эндогенными переменными**  $Y_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(n)})'$

участвующими в модели (т.е. измеренными в *текущий* момент времени  $t$ ).

Строго говоря, как мы уже отмечали в начале п. 4.3, при некотором расширении понятий и обозначений, связанных со SVAR-моделями, СОУ-модели можно было бы описать, не выходя за рамки расширенного таким образом класса SVAR-моделей. Однако специфика СОУ-моделей и решение некоторых вопросов их прикладных возможностей оправдывают *отдельное* рассмотрение этого класса моделей.

#### 4.4.1. СОУ-модели: определения, основные понятия, пример

**Определение 4.8.** Система взаимосвязанных регрессионных уравнений и балансовых тождеств, в которых одни и те же переменные могут одновременно играть роль (в разных регрессионных уравнениях) и результирующих показателей и объясняющих переменных, называется системой одновременных уравнений (СОУ).

Участвующие в СОУ-модели переменные подразделяются на:

- **экзогенные**, т.е. задаваемые как бы «извне» системы, автономно, причем некоторые из этих переменных могут быть управляемыми (хотя бы — в определенной мере), планируемыми;
- **эндогенные**, т.е. такие переменные, значения которых формируются в процессе и *внутри* функционирования анализируемой системы в существенной мере под воздействием экзогенных переменных и, конечно, во взаимодействии друг с другом и со своими же прошлыми во времени (т.е. *лаговыми*) значениями; в модели они как раз и являются предметом объяснения;
- **предопределенные**, т.е. выступающие в системе в роли факторов-аргументов, или *объясняющих переменных*.

Из данных определений и из обычно принимаемого допущения о взаимной некоррелированности экзогенных и лагированных эндогенных переменных с текущими остатками уравнений системы следует, что множество предопределенных переменных формируется из всех экзогенных переменных (значения которых могут быть зарегистрированы в текущий ( $t$ ), прошлые или будущие моменты времени) и так называемых лаговых эндогенных переменных, т.е. таких эндогенных пере-

измеренными в прошлые (по отношению к текущему) моменты времени, а следовательно, являются (к текущему моменту времени) уже известными, заданными.

При построении и анализе СОУ-модели следует различать (так же, как и при анализе SVAR-моделей) ее *структурную* и *приведенную* формы. Для пояснения этих понятий условимся в дальнейшем обозначать прописной латинской буквой  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})'$  **все предопределенные переменные**, т. е. все экзогенные переменные, *включая свободный член*, и все участвующие в системе лагированные эндогенные переменные. Пусть общее число эндогенных переменных равно  $m$ , а общее число предопределенных переменных, **включая свободный член**, равно  $k$ . Примем (пока без объяснения), что общее число уравнений и тождеств в СОУ равно числу участвующих в ней эндогенных переменных, т. е. равно  $m$ . И пусть из общего числа  $m$  соотношений модели мы имеем  $m_1$  уравнений, включающих случайные остаточные компоненты, и  $m_2$  тождеств ( $m_1 + m_2 = m$ ). Разобьем вектор эндогенных переменных  $Y_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(m)})'$  на два подвектора  $Y_t^{(1)} = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(m_1)})'$  и  $Y_t^{(2)} = (y_t^{(m_1+1)}, \dots, y_t^{(m_1+m_2)})'$ , при этом порядок, в котором перенумерованы эндогенные переменные, не имеет значения.

Тогда общий вид линейной СОУ может быть представлен в форме

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 Y_t^{(1)} + \mathbf{B}_2 Y_t^{(2)} + \mathbf{C}_1 X_t = \Delta_t \\ \mathbf{B}_3 Y_t^{(1)} + \mathbf{B}_4 Y_t^{(2)} + \mathbf{C}_2 X_t = \mathbf{0}_{m_2}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4.33)$$

где  $\mathbf{B}_1 = (\beta_{ij})_{i,j=\overline{1,m_1}}$  — матрица размерности  $(m_1 \times m_1)$  из коэффициентов при  $y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(m_1)}$  в  $m_1$  первых уравнениях;  $\mathbf{B}_2 = (\beta_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m_1} \\ j=\overline{m_1+1,m_1+m_2}}}$  — матрица размерности  $(m_1 \times m_2)$  из коэффициентов при  $y_t^{(m_1+1)}, \dots, y_t^{(m_1+m_2)}$  в  $m_1$  первых уравнениях<sup>6</sup>;  $X_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)})'$  — вектор-столбец предопределенных переменных, в котором  $x_t^{(1)} \equiv 1$ ;  $\mathbf{C}_1 = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m_1} \\ j=\overline{1,k}}}$  — матрица размерности  $(m_1 \times k)$  из коэффициентов при предопределенных переменных в первых  $m_1$  уравнениях (очевидно, коэффициенты  $c_{i1}$  играют роль свободных членов уравнений);  $\mathbf{B}_3 = (\beta_{ij})_{\substack{i=\overline{m_1+1,m_1+m_2} \\ j=\overline{1,m_1}}}$  — матрица размерности  $(m_2 \times m_1)$  из коэффициентов при  $y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(m_1)}$  в  $m_2$  тождествах системы;  $\mathbf{B}_4 = (\beta_{ij})_{\substack{i=\overline{m_1+1,m_1+m_2} \\ j=\overline{m_1+1,m_1+m_2}}}$  — матрица размерности  $(m_2 \times m_2)$  из априори заданных коэффициентов при  $y_t^{(m_1+1)}, \dots, y_t^{(m_1+m_2)}$  в  $m_2$  тождествах си-

<sup>6</sup>С помощью символов  $\overline{n_1, n_2}$  кратко обозначается тот факт, что индекс  $i$  принимает значения от  $n_1$  до  $n_2$ , т. е.  $i = n_1, n_1+1, \dots, n_2$ .

стемы;  $\mathbf{C}_2 = (c_{ij})_{\substack{i=m_1+1, m_1+m_2 \\ j=1, k}}$  — матрица размерности  $(m_2 \times k)$  из коэффициентов при предопределенных переменных в  $m_2$  тождествах системы;  $\Delta_t = (\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, \dots, \delta_t^{(m_1)})'$  — вектор-столбец размерности  $m_1$  случайных остаточных составляющих  $m_1$  первых уравнений системы и  $\mathbf{0}_{m_2} = (0, 0, \dots, 0)'$  — вектор-столбец размерности  $m_2$ , состоящий из нулей.

Заметим, что *исходными статистическими данными*, необходимыми для проведения статистического анализа системы (4.33) (а именно, для оценки неизвестных коэффициентов  $\beta_{ij}$  и  $c_{ij}$ , проверки статистических гипотез, например, о линейном характере исследуемых зависимостей и т. п.), являются матрицы

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

соответственно размерностей  $(n \times m)$  и  $(n \times k)$ , а все элементы матриц  $\mathbf{B}_3$ ,  $\mathbf{B}_4$  и  $\mathbf{C}_2$  являются *известными* (их числовые значения определяются содержательным смыслом соответствующих тождеств системы).

Система (4.33) может быть записана также в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{Y}_t + \mathbf{C}\mathbf{X}_t = \bar{\Delta}_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.33')$$

или в виде

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}' = \bar{\Delta}, \quad (4.33'')$$

где

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}, \bar{\Delta}_t = \begin{pmatrix} \Delta_t \\ \mathbf{0}_{m_2} \end{pmatrix}, \bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}'_1 \\ \vdots \\ \bar{\Delta}'_n \end{pmatrix},$$

а матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{X}$  определены в (4.34).

**Определение 4.9.** Система уравнений и тождеств вида (4.33) (или эквивалентных ей записей (4.33') или (4.33'')) называется **структурной формой** линейной СОУ. При этом предполагается, что коэффициент при  $i$ -й эндогенной переменной в  $i$ -м структурном стохастическом уравнении ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) равен единице (правило нормировки системы), а матрицы  $\mathbf{B}_4$  и  $\mathbf{B}$  невырождены (допускаются и другие способы нормировки системы).

**З а м е ч а н и е.** Пользуясь тем, что эндогенные переменные  $Y_t^{(2)}$  из (4.33) могут быть явно выражены через  $Y_t^{(1)}$  и  $X_t$ , их можно исключить из общей системы и рассматривать систему, содержащую в

качестве эндогенных переменных только переменные  $Y_t^{(1)}$ , а именно:

$$\mathbf{B}^* Y_t^{(1)} + \mathbf{C}^* X_t = \Delta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.33a)$$

где  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_4^{-1} \mathbf{B}_3$  и  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_4^{-1} \mathbf{C}_2$ . Поэтому в дальнейшем, говоря о *статистическом анализе* системы соотношений, описывающих линейную СОУ-модель, можно рассматривать системы, содержащие только  $m_1$  регрессионных стохастических уравнений и не содержащие тождеств. Правда, этот переход может приводить к определенной «перепараметризации» модели, т. е. к утрате автономности первоначально введенных параметров (см. ниже реализацию данного перехода в примере 4.4).

Поскольку при реализации одной из конечных прикладных целей эконометрического моделирования (а именно, при прогнозе значений эндогенных переменных и при различных имитационных расчетах) главный интерес представляют соотношения, позволяющие явно выразить все эндогенные переменные  $Y_t$  через predetermined  $X_t$ , то одновременно со структурной формой имеет смысл рассмотреть так называемую *приведенную (редуцированную) форму* линейной СОУ<sup>7</sup>. Требуемый результат мы получим, домножив слева обе части соотношений (4.33') на матрицу  $\mathbf{B}^{-1}$  и уединив затем  $Y_t$ :

$$Y_t = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} X_t + \mathbf{B}^{-1} \bar{\Delta}_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (4.35)$$

Аналогично можно поступить и со структурной формой, записанной в виде (4.33a):

$$Y_t^{(1)} = -(\mathbf{B}^*)^{-1} \mathbf{C}^* X_t + (\mathbf{B}^*)^{-1} \Delta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (4.36)$$

В дальнейшем, говоря о приведенной (редуцированной) форме СОУ-модели, мы будем иметь в виду запись

$$Y_t = \mathbf{\Pi} \cdot X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4.35')$$

или

$$Y_t^{(1)} = \mathbf{\Pi}^* X_t + \varepsilon_t^*, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.36')$$

где  $(m \times k)$  матрица  $\mathbf{\Pi}$ ,  $(m_1 \times k)$  матрица  $\mathbf{\Pi}^*$  и векторы остаточных случайных составляющих  $\varepsilon_t$  и  $\varepsilon_t^*$  определяются соотношениями

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}, \quad (4.37)$$

<sup>7</sup>Более распространенный в русскоязычной литературе термин «приведенная форма» в действительности менее точно передает в переводе с английского смысл «reduced form model», так как основное отличие последней — в меньшем (редуцированном) числе содержащихся в ней параметров по сравнению со структурной формой. Более подробно об этом см. ниже, в п. 4.4.2).  
 Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>



$$\Pi^* = -(\mathbf{B}^*)^{-1}\mathbf{C}^*, \quad (4.38)$$

$$\varepsilon_t = \mathbf{B}^{-1}\bar{\Delta}_t, \quad (4.39)$$

$$\varepsilon_t^* = (\mathbf{B}^*)^{-1}\Delta_t. \quad (4.40)$$

**Определение 4.10.** Система соотношений (4.35') (или (4.36')), в которой все эндогенные переменные эконометрической модели явно линейно выражены через predetermined переменные и случайные остаточные компоненты, называется **приведенной формой линейной СОУ-модели**.

**Определение 4.11.** Параметры СОУ, определяющие общее число  $m$  уравнений и тождеств модели (и одновременно — общее число участвующих в ней эндогенных переменных), число  $m_1$  участвующих в модели эндогенных переменных, число  $m_2$  входящих в модель балансовых тождеств и число  $k$  участвующих в модели predetermined переменных, называются **структурными параметрами модели**.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере.

**Пример 4.4** (упрощенный вариант динамической модели национальной экономики Клейна). Рассмотрим СОУ вида

$$y_t^{(1)} = \alpha_0 + \alpha_1(y_t^{(3)} - x_t^{(1)}) + \delta_t^{(1)}, \quad (4.41)$$

$$y_t^{(2)} = \beta_1 y_{t-1}^{(3)} + \beta_2 \cdot x_t^{(2)} + \delta_t^{(2)}, \quad (4.42)$$

$$y_t^{(3)} = y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + x_t^{(3)}, \quad (4.43)$$

где априорные ограничения выражены неравенствами

$$0 < \alpha_1 < 1; \quad \beta_1 > 0; \quad \beta_2 < 0.$$

Эти три соотношения вместе с ограничениями образуют модель. В ней  $y_t^{(1)}$  обозначает потребление,  $y_t^{(2)}$  — инвестиции,  $y_t^{(3)}$  — национальный доход,  $x_t^{(1)}$  — подоходный налог,  $x_t^{(2)}$  — норму процента как инструмент государственного регулирования,  $x_t^{(3)}$  — государственные закупки товаров и услуг, измеренные в «момент времени»  $t$ .

Присутствие в уравнениях (4.41) и (4.42) «остаточных» случайных составляющих  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$  обусловлено необходимостью учесть влияние соответственно на  $y_t^{(1)}$  и  $y_t^{(2)}$  ряда неучтенных факторов. Действительно, нереалистично ожидать, что величина потребления  $y_t^{(1)}$  будет однозначно определяться уровнями национального дохода ( $y_t^{(3)}$ ) и подоходного налога ( $x_t^{(1)}$ ); аналогично величина инвестиций  $y_t^{(2)}$  зависит

очевидно, не только от достигнутого в предыдущий год уровня национального дохода ( $y_{t-1}^{(3)}$ ) и от величины нормы процента ( $x_t^{(2)}$ ), но и от ряда не учтенных в уравнении (4.42) факторов.

Полученная модель содержит два уравнения, объясняющие поведение потребителей и инвесторов, и одно тождество. Мы сформулировали ее для дискретных периодов времени и выбрали запаздывание (лаг) в один период для отражения воздействия национального дохода на инвестиции.

В этом примере число эндогенных переменных, так же как и общее число всех соотношений модели, равно трем ( $m = 3$ ). Среди этих соотношений мы имеем одно тождество (следовательно,  $m_1 = 2, m_2 = 1$ ). Общее число предопределенных переменных  $k = 4$ , в том числе три экзогенные переменные ( $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, x_t^{(3)}$ ) и одна лаговая эндогенная переменная ( $y_{t-1}^{(3)}$ ), которую мы в соответствии с принятой договоренностью кодируем как  $x_t^{(4)}$  (т. е.  $y_{t-1}^{(3)} \equiv x_t^{(4)}$ ).

Структурная форма модели в данном примере задается соотношениями (4.41)–(4.43). В общих матричных обозначениях, использованных в формуле (4.33), имеем:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & -\beta_1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_3 = (-1; -1); \quad \mathbf{B}_4 = (1); \quad \mathbf{C}_2 = (0; 0; 0; -1; 0)$$

и

$$\Delta_t = (\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)})^T.$$

Если же структурная форма записана в виде (4.33'), то в данном примере участвующие в этой записи матрицы конкретизируются в виде

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

и

$$\bar{\Delta}_t = (\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, 0)^T.$$

Отметим, что, во-первых, выполнено условие нормировки ( $y_t^{(i)}$  входит в  $i$ -е уравнение системы,  $i = 1, 2$ , с коэффициентом единица); во-вторых, значения элементов матриц  $\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$  и  $\mathbf{C}_2$  известны, они определяются содержательным смыслом тождества; в-третьих, требование невырожденности матриц  $\mathbf{B}_4$  и  $\mathbf{B}$  соблюдено; и, наконец, в-четвертых, матрицы  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  и  $\mathbf{C}_1$  относительно «слабо заполнены» неизвестными

всего четыре —  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Последняя особенность рассматриваемой эконометрической модели является, к счастью, достаточно общей отличительной чертой СОУ. Если бы это было не так, т. е. если бы мы были вынуждены иметь дело с системами, «сильно заполненными» неизвестными коэффициентами, то задача статистического анализа таких систем оказывалась бы *принципиально неразрешимой*: имеющихся в нашем распоряжении исходных статистических данных просто не хватало бы для корректного проведения такого анализа. Ведь при построении и анализе систем эконометрических уравнений, описывающих макроэкономические модели, исследователю зачастую приходится иметь дело с десятками и сотнями эндогенных и экзогенных переменных!

Рассмотрим далее структурную форму в записи (4.33а), при которой исключается часть эндогенных переменных  $Y_t^{(2)}$  посредством их выражения через  $Y_t^{(1)}$  из тождеств системы. В нашем примере эта структурная форма имеет вид:

$$\begin{cases} (1 - \alpha_1)y_t^{(1)} - \alpha_1 y_t^{(2)} - \alpha_0 + \alpha_1 x_t^{(1)} - \alpha_1 x_t^{(3)} = \delta_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} - \beta_2 x_t^{(2)} - \beta_1 x_t^{(4)} = \delta_t^{(2)}, \end{cases}$$

т. е. матрицы  $\mathbf{B}^*$  и  $\mathbf{C}^*$ , участвующие в общей записи (4.33а), в данном примере конкретизируются в форме

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & -\beta_1 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, *приведенная* форма модели (4.36'), в которой все эндогенные переменные выражаются через predetermined, в данном примере имеет вид

$$\begin{cases} y_t^{(1)} = \frac{1}{1 - \alpha_1} (\alpha_0 - \alpha_1 x_t^{(1)} + \alpha_1 \beta_2 x_t^{(2)} + \alpha_1 x_t^{(3)} + \alpha_1 \beta_1 x_t^{(4)}) \\ \quad + \left( \delta_t^{(1)} + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \delta_t^{(2)} \right) \\ y_t^{(2)} = \beta_2 x_t^{(2)} + \beta_1 x_t^{(4)} + \delta_t^{(2)}, \end{cases}$$

т. е. матрица  $\mathbf{\Pi}^*$  и вектор случайных остаточных составляющих  $\varepsilon_t^*$ , участвующие в общей записи приведенной формы (4.36'), в данном примере конкретизируются в виде:

$$\mathbf{\Pi}^* = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} & -\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} & \frac{\alpha_1 \beta_2}{1 - \alpha_1} & \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} & \frac{\alpha_1 \beta_1}{1 - \alpha_1} \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_t^* = \left( \delta_t^{(1)} + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \delta_t^{(2)}, \delta_t^{(2)} \right)^T$$

#### 4.4.2. Основные проблемы СОУ-моделирования

Для пояснения сущности именно *эконометрической модели* и описания основных возникающих при ее построении и анализе проблем нам будет удобно разбить весь процесс моделирования на **шесть основных этапов**.

*1-й этап (постановочный)* — определение конечных целей моделирования, набора участвующих в модели факторов и показателей, их роли;

*2-й этап (априорный)* — предмодельный анализ экономической сущности изучаемого явления, формирование и формализация априорной информации, в частности, относящейся к природе и генезису исходных статистических данных и случайных остаточных составляющих;

*3-й этап (параметризация)* — собственно моделирование, т. е. выбор **общего** вида модели, в том числе состава и формы входящих в нее связей;

*4-й этап (информационный)* — сбор необходимой статистической информации, т. е. регистрация значений участвующих в модели факторов и показателей на различных временных или пространственных тактах функционирования изучаемого явления;

*5-й этап (идентификация модели)* — статистический анализ модели и в первую очередь статистическое оценивание неизвестных параметров модели;

*6-й этап (верификация модели)* — сопоставление реальных и модельных данных, проверка адекватности модели, оценка точности модельных данных.

Последние три этапа (4-й, 5-й и 6-й) сопровождаются крайне трудоемкой **процедурой калибровки модели**. Дело в том, что при построении СОУ-модели исследователь, как правило, находится в ситуации, когда, с одной стороны, действует большое число «нормативных» (т. е. определенных содержательным смыслом анализируемых связей) ограничений на коэффициенты матриц **B** и **C**, а с другой стороны, ему приходится действовать в условиях определенной нечеткости (или неполноты) исходной статистической информации (4.34). Процедура калибровки модели заключается в переборе большого числа различных вариантов «нормативные ограничения — значения отдельных переменных» (что связано с многократными «вычислительными прогонами» модели) в целях получения совместной, непротиворечивой и идентифицируемой модели.

Математическая модель, в том числе математическая модель *экономического явления* или процесса, может быть сформулирована на **общем качественном** уровне, без настройки на конкретные статистические данные.

ческие данные, т. е. она может иметь смысл и без 4-го и 5-го этапов. **Тогда она не является эконометрической.** Суть именно эконометрической модели заключается в том, что она, будучи представленной в виде набора математических соотношений, описывает функционирование **конкретной** экономической системы, а не системы вообще (именно экономики России или процесса «спрос — предложение» в данном конкретном месте и в данное время). Поэтому она обязательно «настраивается» на конкретных статистических данных, а значит предусматривает обязательную реализацию 4-го и 5-го этапов моделирования.

Обратимся теперь непосредственно к описанию основных проблем, которые приходится решать в процессе СОУ-моделирования.

**Проблема спецификации модели.** Эта проблема по существу решается на первых трех этапах моделирования и включает в себя<sup>8</sup>:

- (а) определение конечных целей моделирования (прогноз, имитация различных сценариев социально-экономического развития анализируемой системы, управление);
- (б) определение списка экзогенных и эндогенных переменных;
- (в) определение состава анализируемой системы уравнений и тождеств, их структуры и соответственно списка предопределенных переменных;
- (г) формулировка исходных предпосылок и априорных ограничений относительно:
  - стохастической природы остатков  $\Delta_t$  (в классических вариантах моделей постулируются их взаимная статистическая независимость или некоррелированность, нулевые значения их средних величин и иногда сохранение постоянными в процессе наблюдения значений их дисперсий — *гомоскедастичность*);
  - числовых значений отдельных элементов матриц **В** и **С** в структурной форме модели (4.33') или (4.33'').

Итак, спецификация модели — это первый и, быть может, *важнейший* шаг эконометрического исследования. От того, насколько удачно

<sup>8</sup>Ниже описывается содержание проблемы спецификации СОУ-модели в *предположении ее линейности*, т. е. при условии, что в результате проведения 3-го этапа (этапа *параметризации или выбора общего вида модели*) эконометрист пришел к выводу о непротиворечивости гипотезы линейности анализируемых связей имеющимся в его распоряжении исходным статистическим данным. Тому, как поступать в противном случае, посвящена гл. 1 учебника.

Скопировано с сайта [www.pravo.inform2000.ru](http://www.pravo.inform2000.ru) Разработка электронных библиотек <https://pravo.inform2000.pf>

решена проблема спецификации и, в частности, насколько реалистичны наши решения и предположения относительно состава эндогенных, экзогенных и предопределенных переменных, структуры самой системы уравнений и тождеств, стохастической природы случайных остатков и конкретных числовых значений части элементов матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , решающим образом зависит успех всего эконометрического исследования.

Спецификация опирается на имеющиеся экономические теории, специальные знания или на интуитивные представления исследователя об анализируемой экономической системе. Эти априорные сведения определяют, в частности, природу матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Например, информация (или предположение) о том, что определенные переменные непосредственно не участвуют в том или ином уравнении, означает равенство нулю соответствующих элементов в строках матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Дополнительные сведения о системе могут иметь вид ограничений на комбинации элементов матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ .

Проиллюстрируем сказанное на нашем примере из 4.4. Мы видим, что непосредственно из состава и смысла уравнений системы (4.41)–(4.43) (т. е. из решения части вопросов проблемы спецификации модели) непосредственно следует специальный вид матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  (см. (4.44)) и, в частности, их слабая заполненность априори неизвестными элементами (из 24 элементов этих матриц нам предстоит статистически оценить лишь четыре:  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$  и  $\beta_2$ ).

Априорные сведения о системе находят свое отражение при спецификации модели не только в определении конфигурации матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , но и в выборе предположений относительно стохастической природы участвующих в уравнении переменных, в первую очередь относительно случайных остатков  $\delta_t^{(j)}$ . Обычно принимаются допущения о том, что все случайные остатки  $\delta_t^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, m_1$ ):

- имеют нулевые средние значения, т. е.  $\mathbf{E}\delta_t^{(j)} \equiv 0, t = 1, \dots, n$ ;
- не коррелируют друг с другом, т. е.  $\mathbf{E}(\delta_t^{(j)} \cdot \delta_t^{(l)}) = 0, (j \neq l)$ ;
- не имеют автокорреляций, т. е.  $\mathbf{E}(\delta_{t_1}^{(j)} \cdot \delta_{t_2}^{(j)}) = 0, t_1 \neq t_2$ ;
- не коррелируют ни с одной из предопределенных переменных.

Как правило, подобные допущения в процессе спецификации модели оказываются достаточно реалистичными.

**Проблема идентифицируемости.** При анализе эконометрической модели, представленной системой уравнений вида (4.33)

(или (4.33')), исследователя в конечном счете интересует прежде всего поведение эндогенных переменных  $Y_t$ . Из соответствующей приведенной формы модели (4.35) видно, что эндогенные переменные  $Y_t$  являются по своей природе случайными величинами, поведение которых определяется внутренней структурой модели, а именно элементами матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  и природой случайных остатков  $\Delta_t$ . Возникает вопрос: а возможно ли, следуя в «обратном направлении», восстановить структурную форму (4.33') (т. е. все элементы матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ ), располагая знанием приведенной формы (4.35') (т. е. знанием числовых значений всех элементов матрицы  $\mathbf{\Pi}$  и природы случайных остатков  $\varepsilon_t$ )? Именно этот вопрос и отражает сущность проблемы идентифицируемости эконометрической модели (не смешивать с *проблемой идентификации* модели, заключающейся в выборе и реализации методов статистического оценивания ее неизвестных параметров, см. ниже).

Ответ на поставленный вопрос в общем случае, очевидно, отрицательный: без дополнительных ограничений на внутреннюю структуру модели (т. е. без соблюдения некоторых *условий идентифицируемости*) по  $m_1 \times (k + 1)$  элементам матрицы  $\mathbf{\Pi}$  невозможно восстановить гораздо большее число элементов матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  (нетрудно подсчитать, что общее число коэффициентов  $\beta_{ij}$  и  $c_{iq}$  в структурной форме равно  $m_1 \times (m_1 + m_2 + k)$ , хотя, конечно, общее число коэффициентов, подлежащих статистическому оцениванию, оказывается меньшим).

В эконометрической теории приняты следующие определения, связанные с проблемой идентифицируемости (в узком смысле).

**Определение 4.12.** Уравнение структурной формы эконометрической модели называется **точно идентифицируемым (в узком смысле)**, если все участвующие в нем неизвестные (т. е. априори не заданные) коэффициенты однозначно восстанавливаются по коэффициентам приведенной формы без каких-либо ограничений на значения последних.

**Определение 4.13.** СОУ-модель называется **точно идентифицируемой (в узком смысле)**, если все уравнения ее структурной формы являются точно идентифицируемыми.

**Определение 4.14.** Уравнение структурной формы называется **сверхидентифицируемым (в узком смысле)**, если все участвующие в нем неизвестные коэффициенты восстанавливаются по коэффициентам приведенной формы, причем некоторые из его коэффициентов могут принимать одновременно несколько (более одного) числовых значений, соответствующих одной и той же приведенной форме.

**Определение 4.15.** Уравнение структурной формы называется **неидентифицируемым (в узком смысле)**, если хотя бы один из

участвующих в нем неизвестных коэффициентов не может быть восстановлен по коэффициентам приведенной формы. Соответственно модель называется неидентифицируемой, если хотя бы одно из уравнений ее структурной формы является неидентифицируемым.

Говоря о проблеме идентифицируемости модели, мы начали с того, что исследователя в конечном счете интересует поведение эндогенных переменных, и с этой точки зрения может показаться несущественной, более того, надуманной проблема «однозначного возврата» от приведенной формы к структурной. Однако в действительности проблема идентифицируемости крайне важна, в первую очередь с позиций выработки предложений по решению следующей проблемы — *проблемы идентификации СОУ-модели*, т. е. проблемы выбора и реализации методов статистического оценивания участвующих в ней неизвестных параметров.

Более подробное рассмотрение проблемы идентифицируемости эконометрической модели, включающее в себя, в частности, *формулировки необходимых условий идентифицируемости отдельного параметра, целого уравнения и всей системы уравнений структурной формы*, приведено в следующем пункте.

**Проблема идентификации.** Решение этой проблемы предусматривает «настройку» записанной в общей структурной форме (4.33') модели на реальные статистические данные (4.34). Другими словами, речь идет о выборе и реализации методов статистического оценивания неизвестных параметров модели (4.33) (т. е. той части элементов матриц **B** и **C**, значения которых не являются априори известными) по исходным статистическим данным (4.34). Описание необходимых методов статистического оценивания параметров в подобных моделях и в их отдельных фрагментах приводится в п. 4.4.4.

**Проблема верификации модели.** Эта проблема, так же как и проблема идентификации, является специфичной, связанной с построением именно *эконометрической* модели. Собственно построение эконометрической модели завершается ее идентификацией, т. е. статистическим оцениванием участвующих в ней неизвестных коэффициентов (параметров)  $b_{ij}$  и  $c_{lq}$ . После этого, однако, возникают вопросы: (а) насколько удачно удалось решить проблемы спецификации, идентифицируемости и идентификации модели, т. е. можно ли рассчитывать на то, что использование построенной модели в целях прогноза эндогенных переменных и имитационных расчетов, определяющих варианты социально-экономического развития анализируемой системы, даст результаты, достаточно адекватные реальной действительности? (б) *какова точность* (абсолютная, относительная) прогнозов и имитационных



расчетов, основанных на построенной модели? *Получение ответов на эти вопросы с помощью тех или иных математико-статистических методов и составляет содержание проблемы верификации эконометрической модели.*

Некоторые подходы к верификации модели описаны в п. 4.4.6. Здесь же отметим лишь, что эти методы основаны на процедурах статистической проверки гипотез (при ответе на вопрос (а)) и на статистическом анализе характеристик точности различных приемов статистического оценивания параметров (при ответе на вопрос (б)). Отметим также, что наиболее распространенным и эффективным подходом к верификации эконометрической модели можно признать принцип так называемых *ретроспективных расчетов*. Конкретная схема построения таких расчетов зависит от конечных прикладных целей моделирования, однако, их общая сущность заключается в следующем.

Предположим, мы строим эконометрическую модель в целях прогноза эндогенных переменных или имитационных расчетов *на  $\tau$  временных тактов вперед*. Тогда исходные статистические данные (4.34) делятся на две части:

$$\text{обучающую выборку} \quad \left\{ \left( \begin{array}{c} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_{n-\tau} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} X'_1 \\ \vdots \\ X'_{n-\tau} \end{array} \right) \right\}, \quad (4.34a)$$

$$\text{экзаменующую выборку} \quad \left\{ \left( \begin{array}{c} Y'_{n-\tau+1} \\ \vdots \\ Y'_n \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} X'_{n-\tau+1} \\ \vdots \\ X'_n \end{array} \right) \right\}. \quad (4.34b)$$

Далее все ранее принятые решения по проблемам спецификации, идентифицируемости и идентификации модели применяются только к наблюдениям обучающей выборки (4.34a). Из полученной таким образом модели подстановкой в ее приведенную форму значений экзогенных переменных  $X_{n-\tau+1}, X_{n-\tau+2}, \dots, X_n$  получают *модельные (ретроспективно прогнозные)* значения соответственно  $\bar{Y}_{n-\tau+1}, \bar{Y}_{n-\tau+2}, \dots, \bar{Y}_n$ . Сравнение этих модельных значений с соответствующими реальными значениями экзаменующей выборки  $Y_{n-\tau+1}, Y_{n-\tau+2}, \dots, Y_n$  позволяет проанализировать и адекватность модельных выводов реальной действительности, и их точность. Реализация этого принципа описана, например, в связи с построением и анализом моделей регрессии в п. 6.4 учебника [Айвазян (2010)]. Применительно к СОУ некоторые рекомендации на этот счет будут представлены в п. 4.4.6.

### 4.4.3. Условия идентифицируемости отдельных уравнений и системы в целом

Как было отмечено в предыдущем пункте, эта проблема логически предшествует статистическому оцениванию параметров системы, поскольку от ее решения зависит и выбор методов оценивания. Отсутствие идентифицируемости СОУ означает либо принципиальную невозможность состоятельного оценивания параметров структурной формы СОУ по имеющимся в нашем распоряжении наблюдениям (**неидентифицируемость в широком смысле**), либо существование бесконечного множества моделей, не противоречащих имеющимся в нашем распоряжении наблюдениям. В результате анализа проблемы идентифицируемости конкретного параметра структурной формы системы мы приходим к одной из трех принципиально возможных ситуаций: 1) этот параметр может быть однозначно выражен через коэффициенты приведенной системы; 2) параметр допускает несколько разных вариантов определения по значениям параметров приведенной формы; 3) параметр не может быть выражен через параметры приведенной формы. Очевидно, идентифицируемость или неидентифицируемость системы, ее уравнений и параметров зависят только от *внутренней структуры модели* (числа уравнений, соотношения количеств эндогенных и predetermined переменных в системе и в каждом уравнении, мультиколлинеарности анализируемых переменных, некоторых свойств матриц структурных коэффициентов), но никак не связаны со статистическими свойствами исходных наблюдений.

Следуя, в основном, обозначениям, введенным в п. 4.4.1, 4.4.2, мы будем полагать, что балансовые тождества уже исключены из анализируемой системы, так что ее структурная форма имеет вид (4.33а), т. е.<sup>9</sup>

$$BY_t + CX_t = \Delta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.45)$$

где  $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$  — матрица размерности  $(m \times m)$  (т. е.  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) коэффициентов при  $m$  эндогенных переменных  $Y_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(m)})'$ ;  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  — матрица размерности  $(m \times k)$  (т. е.  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$ ) коэффициентов при  $k$  predetermined переменных  $X_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)})'$ , в состав которых, если необходимо, включен и свободный член; а вектор-столбец случайных остатков  $\Delta_t = (\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, \dots$

<sup>9</sup> В целях упрощения обозначений в соотношении (4.33а) мы далее не будем снабжать верхним индексом \* матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  и верхним индексом <sup>(1)</sup> вектор-столбец эндогенных переменных  $Y$ , а также будем полагать, что общее число эндогенных переменных (так же, как общее число регрессионных уравнений в системе после исключения из нее балансовых тождеств) равно  $m$ .

$\dots, \delta_t^{(m)}$ ' удовлетворяет в общем случае следующим условиям:  $\mathbf{E}\Delta_t \equiv \mathbf{0}_m$ ; ковариационная матрица остатков  $\Sigma_\Delta = \mathbf{E}(\Delta_t \Delta_t^T)$  положительно определена и не зависит от  $t$ ; векторы  $\Delta_{t_1}$  и  $\Delta_{t_2}$  взаимно не коррелированы при  $t_1 \neq t_2$ , а  $\delta_t^{(i)}$  не коррелированы со всеми predeterminedными переменными системы, т.е.  $\mathbf{E}[\delta_t^{(i)}(x_t^{(j)} - \mathbf{E}x_t^{(j)})] = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Коэффициенты  $\beta_{ij}$  пронормированы с помощью условия  $\beta_{ii} = 1$ .

Таким образом, рассматривается система из  $\bar{m}$  уравнений, содержащая  $m$  эндогенных и  $k$  predeterminedных (т.е. экзогенных и лаговых эндогенных) переменных.

Прежде всего сформулируем условия идентифицируемости системы в целом в широком смысле, т.е. условия, обеспечивающие в принципе возможность состоятельного оценивания всех параметров структурной формы СОУ. Во-первых, для того чтобы мы могли уединить эндогенные переменные  $Y_t$ , выразив их через predeterminedные переменные  $X_t$  (т.е. осуществить переход к приведенной форме и установить соотношения, связывающие коэффициенты структурной и приведенной форм), необходимо потребовать, чтобы матрица  $\mathbf{B}$  была квадратной и обратимой (т.е. невырожденной). Так мы приходим к формулировке 1-го (необходимого) условия идентифицируемости системы в целом (в широком смысле).

**1-е условие (необходимое) идентифицируемости системы в целом (в широком смысле):** число уравнений системы ( $\bar{m}$ ) должно быть равно числу анализируемых эндогенных переменных ( $m$ ), а матрица  $\mathbf{B}$  должна быть невырожденной.

Тогда приведенная форма анализируемой системы будет иметь вид:

$$Y_t = \mathbf{P}X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.46)$$

где

$$\mathbf{P} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \quad - \quad (4.47)$$

матрица размерности ( $m \times k$ ) коэффициентов приведенной формы, а  $\varepsilon_t = (\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)}, \dots, \varepsilon_t^{(m)})'$  — вектор-столбец остатков.

Очевидно, необходимым условием возможности оценить все коэффициенты  $\pi_{ij}$  матрицы  $\mathbf{P}$  параметров приведенной формы (4.46) является требование, чтобы predeterminedные переменные  $X_t$  не были мультиколлинеарны. Итак,

**2-е условие (необходимое) идентифицируемости системы в целом (в широком смысле):** матрица наблюдений predetermined-

Скопировано с сайта <http://www.izdatelstvo.ru>  $\mathbf{X}_t = (x_t^{(j)})$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ . Разработка электронных библиотек <http://www.izdatelstvo.ru>

$(n \times k)$  должна иметь полный ранг  $k$  (очевидно, при этом число наблюдений  $n$  должно существенно превышать общее число анализируемых переменных  $m + k$ ).

На интуитивном уровне достаточно очевидна «перегруженность» модели (4.45) неизвестными значениями параметров  $\beta_{ij}$  и  $c_{iq}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; q = 1, 2, \dots, k$ ). Более того, можно доказать (см., например, [Джонстон (1980)], с. 357), что если не дополнить модель (4.45) никакими *априорными ограничениями* относительно числовых значений этих параметров, то ни одно из уравнений не может быть идентифицируемо. При этом априорные ограничения носят чаще всего *исключающий* характер, т. е. они определяют в каждом ( $i$ -м) уравнении «адреса»  $(i, j)$  и  $(i, q)$  тех коэффициентов, которые априори считаются нулевыми (априорные ограничения могут быть сформулированы и в виде определенных линейных связей, априори существующих между оцениваемыми коэффициентами). Поставим в соответствие каждому ( $i$ -му) уравнению системы (4.45)  $(m + k)$ -мерный булевский (т. е. состоящий только из нулей и единиц) вектор  $\gamma_i = (\gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_i^{(m)}; \gamma_i^{(m+1)}, \dots, \gamma_i^{(m+k+1)})$ , задающий исключающие априорные ограничения для параметров этого уравнения по следующему правилу: нулевые значения компонент  $\gamma_i^{(q)}$  определяют «адреса» отсутствующих в уравнении переменных, или, что то же, априори равных нулю параметров  $i$ -го уравнения структурной формы.

**3-е условие (необходимое) идентифицируемости системы в целом (в широком смысле):** среди исключающих априорных ограничений  $\gamma_i = (\gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_i^{(m+k)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , не должно быть одинаковых, структурная форма системы не должна содержать уравнений, одинаковых по составу входящих в него переменных.

Чтобы пояснить, к чему может приводить нарушение 3-го условия идентифицируемости системы, рассмотрим пример.

**Пример 4.5** (простейшая модель «спрос — предложение»). Пусть мы располагаем наблюдениями  $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t^{(1)}, \tilde{y}_t^{(2)})$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , характеризующими динамику среднедушевого дохода  $(\tilde{x}_t)$ , предложения некоторого товара  $\tilde{y}_t^{(1)}$ , спроса на него  $(\tilde{y}_t^{(3)})$  и цены на этот товар  $(\tilde{y}_t^{(2)})$ . Нам будет удобнее в дальнейшем оперировать не с самими наблюдаемыми переменными  $(\tilde{x}, \tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)}, \tilde{y}^{(3)})$ , а с их отклонениями от своих средних уровней, т. е., соответственно, с наблюдениями  $x_t = \tilde{x}_t - \bar{\tilde{x}}$ ,  $y_t^{(1)} = \tilde{y}_t^{(1)} - \bar{\tilde{y}}^{(1)}$ ,  $y_t^{(2)} = \tilde{y}_t^{(2)} - \bar{\tilde{y}}^{(2)}$  и  $y_t^{(3)} = \tilde{y}_t^{(3)} - \bar{\tilde{y}}^{(3)}$  (черта сверху означает усреднение соответствующей переменной по всем ее наблюдаемым значениям). Для *центрированных* таким образом переменных извест-

ные линейные уравнения спроса, предложения и равновесия запишутся в виде

$$\begin{cases} y_t^{(1)} = b_1 y_t^{(2)} + \delta_t^{(1)} & \text{— уравнение предложения,} & (4.48) \\ y_t^{(3)} = b_2 y_t^{(2)} + c x_t + \delta_t^{(2)} & \text{— уравнение спроса,} & (4.49) \\ y_t^{(1)} = y_t^{(3)} & \text{— уравнение равновесия,} & (4.50) \end{cases}$$

$$t = 1, 2, \dots, n,$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  и  $c$  — некоторые неизвестные коэффициенты, а каждая из последовательностей  $\{\delta_t^{(1)}\}$  и  $\{\delta_t^{(2)}\}$  ( $t = 1, 2, \dots, n$ ) представляет собой ряд взаимно не коррелированных случайных величин, имеющих нулевые средние значения и дисперсии, соответственно,  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$ , не зависящие от  $t$ . Кроме того, предполагается, что регрессионные остатки  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$  не коррелированы между собой, а также не коррелированы с переменной  $x_t$ .

Заметим, что в системе (4.48)–(4.50) значения цены ( $y^{(2)}$ ), спроса ( $y^{(3)}$ ) и предложения ( $y^{(1)}$ ) формируются как бы «внутри» нее, в процессе взаимодействия связей, описываемых этой моделью. В то же время значения среднедушевого дохода  $x$  поступают в систему как характеристики *внешней* среды, в которой взаимодействуют эти анализируемые связи. Поэтому в данной модели спрос, предложение и цена отнесены к эндогенным переменным, а доход — к экзогенным.

Желая несколько упростить модель, положим, что спрос  $y_t^{(3)}$  так же, как и предложение  $y_t^{(1)}$ , зависит *только* от цены товара  $y_t^{(2)}$  (т. е. не зависит от дохода). Тем самым мы воспользовались *двумя одинаковыми исключаящими априорными ограничениями* — и в первом, и во втором уравнениях системы «обнулили» коэффициент при доходе  $x$ . В результате получаем систему

$$\begin{cases} y_t^{(1)} = b_1 y_t^{(2)} + \delta_t^{(1)}, \\ y_t^{(3)} = b_2 y_t^{(2)} + \delta_t^{(2)}, \\ y_t^{(1)} = y_t^{(3)}. \end{cases}$$

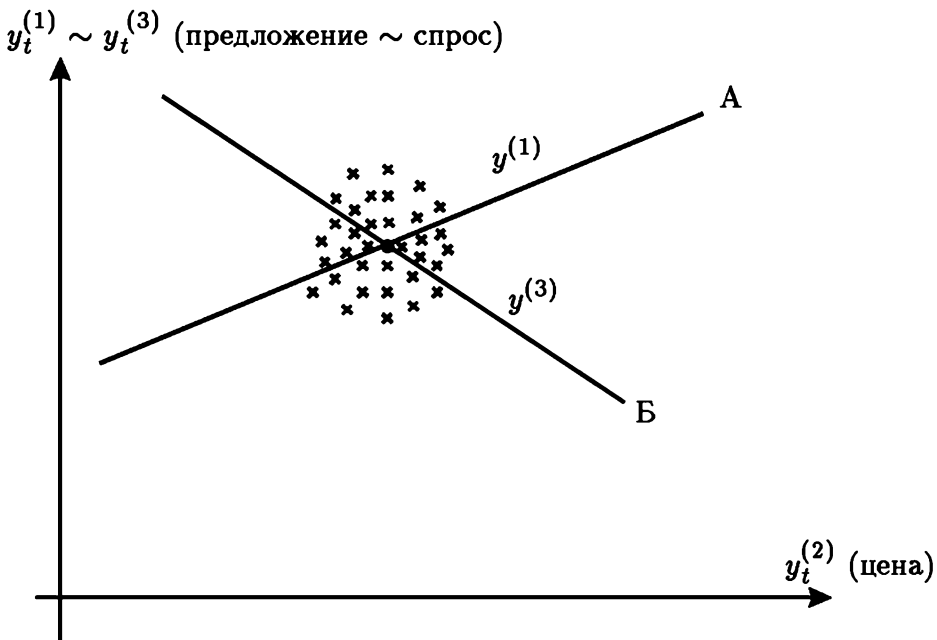
На плоскости, где по оси ординат откладываются значения предложения и спроса, а на оси абсцисс — значения цены, равновесие представляется как пересечение линий предложения (А) и спроса (Б), см. рис. 4.6. Поскольку мы собираем исходные статистические данные ( $y_t^{(2)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}$ ),  $t = 1, 2, \dots, n$ , в условиях равновесия, то различие в на-

и  $\delta_t^{(2)}$ , что, кстати, подтверждается и приведенной формой этой модели

$$y_t^{(1)} = \frac{1}{b_1 - b_2} (b_1 \delta_t^{(2)} - b_2 \delta_t^{(1)}),$$

$$y_t^{(2)} = \frac{1}{b_1 - b_2} (\delta_t^{(2)} - \delta_t^{(1)}),$$

так как правые части уравнений выражаются только в терминах случайных остатков модели. Очевидно, располагая только разбросанными около точки равновесия значениями случайных остатков  $\varepsilon_t^{(1)}$  и  $\varepsilon_t^{(2)}$  (см. (4.40)), мы ничего не можем сказать о самих функциях предложения (А) и спроса (Б). А это и значит, что мы не можем оценить параметры  $b_1$  и  $b_2$  в уравнениях (4.48) и (4.49), т. е. оба анализируемых регрессионных уравнения неидентифицируемы.



**Рис. 4.6.** Линии предложения (А), спроса (Б) и наблюдения (крестики), произведенные в условиях равновесия

Заметим, что к точно такому же результату мы пришли бы, если бы пошли по линии некоторого усложнения (а не упрощения) модели (4.48)–(4.50), введя в 1-е уравнение системы доход  $x$ . Это снова означало бы использование *идентичных* векторов априорных ограничений и снова привело бы нас к неидентифицируемости системы.

Далее формулируются и доказываются **два условия идентифицируемости отдельного уравнения системы (4.45):**

- *условие порядка (необходимое);*



от  $k - k_1$  последующих:

$$\Pi_{m \times k+1} = \begin{pmatrix} \Pi(1) & \vdots & \bar{\Pi}_X(1) \\ m_1 \times k_1 & \vdots & m_1 \times (k - k_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\Pi}_Y(1) & \vdots & \bar{\Pi}_{XY}(1) \\ (m - m_1) \times k_1 & \vdots & (m - m_1) \times (k - k_1) \end{pmatrix}$$

(под матрицами указаны их размерности).

Тогда мы можем записать приведенную форму (4.46) анализируемой СОУ в виде

$$\begin{pmatrix} Y_t(1) \\ \bar{Y}_t(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi(1) & \vdots & \bar{\Pi}_X(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\Pi}_Y(1) & \vdots & \bar{\Pi}_{XY}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t(1) \\ \bar{X}_t(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_t^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

где  $Y_t(1)$  и  $X_t(1)$  определены в (4.53), а  $\bar{Y}_t(1) = (y_t^{(m_1+1)}, \dots, y_t^{(m)})'$  и  $\bar{X}_t(1) = (x_t^{(k_1+1)}, \dots, x_t^{(k)})'$ .

Теперь выпишем вытекающее из (4.47') равенство первых  $m_1$  строк матриц  $\mathbf{B}\Pi$  и  $-\mathbf{C}$ :

$$\begin{pmatrix} \beta(1) \\ \mathbf{0}_{m-m_1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Pi(1) & \vdots & \bar{\Pi}_X(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\Pi}_Y(1) & \vdots & \bar{\Pi}_{XY}(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c(1) \\ \mathbf{0}_{k-k_1} \end{pmatrix}' \quad (4.55)$$

(векторы  $\beta(1)$  и  $c(1)$  определены в (4.52)).

Произведя перемножение матриц в левой части (4.55), получаем

$$\begin{cases} \beta'(1) \Pi(1) = -c'(1), & (4.56) \\ \beta'(1) \bar{\Pi}_X(1) = \mathbf{0}'_{k-k_1}. & (4.57) \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений, связывающих коэффициенты 1-й строки структурной формы СОУ с параметрами приведенной формы. Эта система, как мы видим, распалась на две подсистемы: (4.56) и (4.57). По-видимому, сначала надо попытаться решить подсистему (4.57) относительно коэффициентов  $\beta(1)$ , а затем, подставив найденные решения в (4.56), решить эту подсистему относительно параметров  $c(1)$ .

Поэтому определим, в первую очередь, условия, при которых подсистема (4.57) имеет хотя бы одно решение. Соотношения (4.57) представляются собой систему из  $k - k_1$  уравнений относительно  $\beta(1)$ .



с  $m_1 - 1$  неизвестными. Для того чтобы параметры  $\beta(1)$  в подсистеме (4.57) можно было бы выразить через элементы матрицы  $\bar{\Pi}_X(1)$ , необходимо, чтобы число уравнений в (4.57) было бы не меньше числа неизвестных, т. е.

$$k - k_1 \geq m_1 - 1.$$

Таким образом, мы пришли к следующему **необходимому** условию идентифицируемости отдельного уравнения системы.

**Условие порядка (необходимое):** число исключенных (при спецификации модели) из  $i$ -го уравнения системы предопределенных переменных (т. е. число  $(k - k_i)$ ) должно быть не меньше числа включенных в него эндогенных переменных, уменьшенного на единицу. Заметим, что выполнение условия  $k - k_i = m_i - 1$  является необходимым условием *точной* идентифицируемости  $i$ -го уравнения, в то время как при  $k - k_i > m_i - 1$  уравнение будет *сверхидентифицируемым*. Из анализа подсистемы уравнений (4.57) можно извлечь также **необходимое и достаточное** условие идентифицируемости 1-го уравнения СОУ. Известно, в частности, что для разрешимости системы (4.57) относительно  $\beta(1)$  необходимо и достаточно, чтобы матрица  $\bar{\Pi}_X(1)$  имела бы ранг, равный числу неизвестных (т. е.  $m_1 - 1$ ). Таким образом получаем следующее необходимое и достаточное условие идентифицируемости отдельного ( $i$ -го) уравнения.

**Условие ранга (необходимое и достаточное):** ранг матрицы  $\bar{\Pi}_X(i) = m_i - 1$ .

Следует отметить, что в отличие от *правила порядка*, которое может проверяться на стадии спецификации системы, соблюдение рангового условия мы можем проверить в общем случае только после вычисления матрицы  $\bar{\Pi}_X(i)$ , т. е. после применения обычного МНК к приведенной форме (4.54) анализируемой системы. Правда, в отдельных простых случаях это можно сделать и до применения МНК, просто анализируя элементы матрицы  $\bar{\Pi}_X(i)$ , выраженные через параметры структурной формы  $\beta_{ij}$  и  $c_{kl}$  (что мы и продемонстрируем сейчас на примере).

**Пример 4.5 (продолжение).** Исключая из модели (4.48)–(4.50) балансовое тождество и решая полученную систему относительно  $y_t^{(1)}$  и  $y_t^{(2)}$ , получаем *приведенную форму* модели в виде:

$$\begin{aligned} y_t^{(1)} &= \pi_1 x_t + \varepsilon_t^{(1)}, \\ y_t^{(2)} &= \pi_2 x_t + \varepsilon_t^{(2)}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.58}$$

где

$$\varepsilon_t^{(1)} = \frac{b_1 \delta_t^{(2)} - b_2 \delta_t^{(1)}}{b_1 - b_2}, \quad \varepsilon_t^{(2)} = \frac{\delta_t^{(2)} - \delta_t^{(1)}}{b_1 - b_2}. \quad (4.58'')$$

В рамках сделанных выше предположений о постоянстве дисперсий  $D\delta_t^{(1)}$  и  $D\delta_t^{(2)}$  и о некоррелированности  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$  между собой и с экзогенной переменной  $x_t$  из (4.58'') следует, что случайные остатки  $\varepsilon_t^{(1)}$  и  $\varepsilon_t^{(2)}$  приведенной формы также имеют не зависящие от  $t$  дисперсии, не коррелированы между собой и с экзогенной переменной  $x_t$  в уравнениях (4.58). Следуя определениям 4.12–4.13, попробуем ответить на вопрос об идентифицируемости параметров  $b_1, b_2$  и с структурной формы, т. е. о возможности их однозначного выражения через параметры  $\pi_1$  и  $\pi_2$  приведенной формы. Поделив первое из уравнений (4.58') на второе, получаем

$$b_1 = \frac{\pi_1}{\pi_2}. \quad (4.59)$$

Однако соотношений (4.58') оказывается недостаточно для того, чтобы определить из них значения коэффициентов  $b_2$  и с второго уравнения структурной формы. Это значит, что первое уравнение структурной формы анализируемой СОУ идентифицируемо, а второе и вся система — неидентифицируемы.

Чтобы пояснить ситуацию со *сверхидентифицируемостью* параметра структурной формы, несколько видоизменим рассматриваемую модель (4.48)–(4.50). Полагая, что и ставка процента  $\tilde{x}_t^{(2)}$  может влиять на спрос, мы решили дополнить наши наблюдения за среднедушевым доходом ( $\tilde{x}_t$ ), предложением некоторого товара ( $\tilde{y}_t^{(1)}$ ) и ценой на него ( $\tilde{y}_t^{(2)}$ ) регистрацией во времени этой величины. Тогда, как и прежде, переходя от значений самих анализируемых величин к их *отклонениям от средних* (соответственно  $x_t, y_t^{(1)}, y_t^{(2)}$  и  $x_t^{(2)}$ ) и вводя в модель еще одну экзогенную переменную ( $x_t^{(2)}$ ) в виде аргумента функции спроса (т. е. в уравнение (4.49)), мы получаем после исключения балансового тождества структурную форму СОУ в виде:

$$y_t^{(1)} = b_1 y_t^{(2)} + \delta_t^{(1)} \quad \text{— уравнение предложения;} \quad (4.48a)$$

$$y_t^{(1)} = b_2 y_t^{(2)} + c_1 x_t^{(1)} + c_2 x_t^{(2)} + \delta_t^{(2)} \quad \text{— уравнение спроса,} \quad (4.49a)$$

$$t = 1, 2, \dots, n,$$

в которой для удобства доход (в отклонениях от среднего) и коэффициент при нем мы теперь обозначаем, соответственно,  $x_t^{(1)}$  и  $c_1$ . *Структурные параметры этой системы*: число уравнений равно общему числу эндогенных переменных и равно  $m = 2$ ; общее число предопределенных переменных  $k = 2$ ; число эндогенных и предопределенных переменных  $n = 2$ .

включенных в 1-е уравнение, соответственно,  $m_1 = 2$ ,  $k_1 = 0$ ; число эндогенных и predetermined переменных, включенных во 2-е уравнение, соответственно,  $m_2 = 2$ ,  $k_2 = 2$ ; матрица  $\mathbf{B}$  коэффициентов при эндогенных переменных (при канонической записи системы)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ -\frac{1}{b_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, 1-е условие идентифицируемости будет выполненным, если потребовать  $\det \mathbf{B} \neq 0$ , т. е.  $b_2 \neq b_1$  (и  $b_2 \neq 0$ ).

Для проверки 2-го условия надо убедиться в том, что наблюдения  $x_t^{(1)}$  и  $x_t^{(2)}$  ( $t = 1, 2, \dots, n$ ) не связаны пропорциональной зависимостью, т. е. что  $x_t^{(2)} \neq \lambda x_t^{(1)}$ .

Очевидно и выполнение 3-го общего условия идентифицируемости системы, т. е. векторы исключаяющих ограничений первого ( $\gamma_1$ ) и второго ( $\gamma_2$ ) уравнений системы различны, а именно:  $\gamma_1 = (1, 1, 0, 0)$ ;  $\gamma_2 = (1, 1, 1, 1)$ .

Теперь сосредоточимся на проверке идентифицируемости *отдельного* (например, 1-го) уравнения системы. *Правило порядка* (4-е условие) выполняется со *строгим* знаком неравенства, т. е. число исключенных в 1-м уравнении predetermined переменных равно двум ( $k - k_1 = 2 - 0$ ), а число включенных в него эндогенных переменных, уменьшенное на единицу, равно единице ( $m_1 - 1 = 2 - 1$ ). Это означает, что 1-е уравнение системы является *сверхидентифицируемым*, т. е. его структурные параметры (в данном случае это один параметр  $b_1$ ) допускают *неоднозначное* выражение через параметры приведенной формы. Этот факт в анализируемом примере легко проверить непосредственно. Действительно, решение системы (4.48 а)–(4.49а) относительно  $y_t^{(1)}$  и  $y_t^{(2)}$  дает нам приведенную форму

$$\begin{aligned} y_t^{(1)} &= \pi_{11} x_t^{(1)} + \pi_{12} x_t^{(2)} + \varepsilon_t^{(1)}, \\ y_t^{(2)} &= \pi_{21} x_t^{(1)} + \pi_{22} x_t^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \frac{b_1 c_1}{b_1 - b_2}, & \pi_{12} &= \frac{b_1 c_2}{b_1 - b_2}, \\ \pi_{21} &= \frac{c_1}{b_1 - b_2}, & \pi_{22} &= \frac{c_2}{b_1 - b_2}, \end{aligned}$$

а  $\varepsilon_t^{(1)}$  и  $\varepsilon_t^{(2)}$  такие же, как в (4.58"). Мы видим, что структурный коэффициент  $\pi_{11}$  может быть определен по параметрам приведенной формы

двумя различными способами, которые дают, вообще говоря, два разных результата.

1-й вариант:  $b_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}}$ ;

2-й вариант:  $b_1 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$ .

Для полноты картины проверим выполнение *необходимого и достаточного* условия идентифицируемости 1-го уравнения так называемого *рангового условия*, хотя мы уже знаем, что 1-е уравнение сверхидентифицируемо.

В нашем случае матрица  $\bar{\Pi}_X(1)$ , имеющая размерность  $m_1 \times (k - k_1) = 2 \times 2$ , совпадает со всей матрицей  $\Pi$ , т. е.

$$\bar{\Pi}_X = \begin{pmatrix} \frac{b_1 c_1}{b_1 - b_2} & \frac{b_1 c_2}{b_1 - b_2} \\ \frac{c_1}{b_1 - b_2} & \frac{c_2}{b_1 - b_2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что строки этой матрицы связаны пропорциональной зависимостью (2-я строка получается из 1-й делением на  $b_1$ ), так что ранг матрицы  $\bar{\Pi}_X(1)$  равен единице, что и требуется в ранговом условии (т. е. в нашем случае  $m_1 = 2$  и, следовательно, ранг  $\bar{\Pi}_X(1) = m_1 - 1 = 1$ ).

#### 4.4.4. Методы статистического оценивания неизвестных значений параметров СОУ

В данном пункте речь идет только о той части проблемы идентификации СОУ, которая связана с методами статистического оценивания неизвестных значений параметров  $\beta_{ij}$  и  $c_{iq}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; q = 1, 2, \dots, k$ ) в уравнениях (4.45) по имеющимся в нашем распоряжении наблюдениям

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(m)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(k)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Мы будем предполагать, что число наблюдений  $n$  «много больше», чем  $m + k$  ( $n \gg m + k$ ), матрица  $\mathbf{B}$  в (4.45) невырождена и что предопределенные переменные  $x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(k)}$  не мультиколлинеарны, т. е. матрица  $\mathbf{X}$  имеет полный ранг  $k$ . Среди столбцов матрицы  $\mathbf{X}$  может присутствовать столбец, состоящий из одних единиц (если в правую часть модели (4.45) включен свободный член). Другие структурные предположения о

$\Delta_t$ , будут формулироваться в ходе изложения того или иного метода статистического оценивания.

Мы уже убедились в том, что независимо от того, хотим ли мы оценить *только одно* из уравнений системы (4.45) или же намерены оценить *все* уравнения этой системы, в общем случае мы оказываемся в ситуации, когда известные нам методы регрессионного анализа (МНК, различные версии ОМНК) не обеспечивают удовлетворительную процедуру оценивания. Причина подобной ситуации заключается в том, что при отсутствии специальных предположений о структуре СОУ (например, о ее *рекурсивном характере*, см. ниже) в анализируемом уравнении среди объясняющих переменных присутствует одна или несколько эндогенных переменных, *которые коррелируют с регрессионными остатками*. Правда, существует достаточно простой, так называемый *косвенный метод наименьших квадратов*, когда с помощью обычного МНК, примененного к каждому отдельному уравнению приведенной формы (4.46), сначала оцениваются элементы  $\pi_{ij}$  матрицы  $\Pi$ , а затем, используя соотношение (4.47) (в которое вместо матрицы  $\Pi$  подставляется ее оценка  $\hat{\Pi}$ ), определяются значения оценок  $\hat{\beta}_{ij}$  и  $\hat{c}_{iq}$  параметров структурной формы. Но *этот метод применим лишь к точно идентифицируемым уравнениям*.

Переходя к описанию специальных методов оценивания структурных параметров модели (4.45), разделим их на два класса: методы, позволяющие оценивать каждое отдельное уравнение системы (4.45) поочередно, и методы, предназначенные для оценивания всех уравнений сразу. Правда, существует специальный тип СОУ — так называемые *рекурсивные системы*, для которых при определенном выборе порядка и взаимосвязей оцениваемых отдельных уравнений системы процедура МНК приводит к состоятельному оцениванию всех ее уравнений. С точки зрения задач статистического оценивания этот тип СОУ является простейшим, поэтому мы с него и начнем.

### Идентификация рекурсивных систем

Во многом потому, что *рекурсивные* СОУ относительно просты для решения задачи статистического оценивания параметров структурной формы, в большом числе прикладных работ (может быть, в большей их части!) при спецификации модели стараются построить ее так, чтобы она удовлетворяла свойству рекурсивности. Для этого действуют следующим образом<sup>10</sup>. В качестве 1-го уравнения системы специфицируют

<sup>10</sup> Следует, правда, признать, что в ряде публикаций ведущих эконометристов (в том числе, например, в работах Х. Волда) делаются серьезные попытки дать *содержательное (исходящее из сущности реальных экономических систем)* обоснование спецификации и использования именно рекурсивных СОУ. Скопировано с сайта <http://www.infonomer.ru/> Разработка электронных библиотек <http://www.infonomer.ru/> Право.Информ.2008.рф

соотношение, в котором присутствует *только одна эндогенная переменная*  $y^{(1)}$  (соответственно и индексируют ее первым номером). Так что 1-е уравнение системы содержит  $m_1 = 1$  эндогенных переменных и какое-то количество  $k_1$  predetermined переменных. Второе уравнение системы может содержать *не более двух* эндогенных переменных; это, если необходимо, эндогенная переменная  $y^{(1)}$  («участница» 1-го уравнения) и, кроме нее, *еще только одна* эндогенная переменная (обозначим ее  $y^{(2)}$ ). При комплектации состава и числа  $k_2$  predetermined переменных руководствуются содержательными соображениями и «правилом порядка» (см. «условие порядка» в предыдущем пункте). В третье уравнение, кроме уже участвовавших во 2-м уравнении эндогенных переменных  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$ , можно включить *еще опять только одну эндогенную переменную*  $y^{(3)}$  и т. д. В результате мы получим модель вида (4.45), в которой матрица  $\mathbf{B}$  является *нижней треугольной матрицей*, т. е.  $\beta_{ij} = 0$  при  $j > i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$  (при сохранении условия нормировки  $\beta_{ii} = 1$ ). Оказывается, если для систем такого вида дополнительно потребовать взаимную некоррелированность случайных остатков  $\delta_t^{(i_1)}$  и  $\delta_t^{(i_2)}$  при всех  $t$  и для всех  $i_1 \neq i_2$  ( $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, m$ ), то оценки структурных параметров в каждом отдельном уравнении системы с помощью прямого метода наименьших квадратов будут состоятельными, а при нормальности  $\delta_t^{(i)}$  — и асимптотически эффективными. Под прямым МНК понимается следующая процедура, последовательно примененная к  $i$ -му уравнению системы ( $i = 1, 2, \dots, m$ ): с помощью обычного МНК строятся оценки коэффициентов регрессии  $y_t^{(i)}$  по всем включенным в это уравнение эндогенным и predetermined переменным.

Достаточно естественно выглядит приведенная выше схема спецификации модели в виде СОУ при описании процесса формирования равновесных цен и количеств предлагаемых на рынке товаров. Рассмотрим пример.

**Пример 4.6.** Пусть  $y_t^{(1)}$  — цена некоторого товара в момент времени  $t$ , а  $y_t^{(2)}$  — объем продаж этого товара в тот же момент времени. Естественно предположить, что объем продаж  $y_t^{(2)}$  зависит от цены  $y_t^{(1)}$  и от объема продаж в предыдущий момент времени  $y_{t-1}^{(2)}$ . В свою очередь, цена товара  $y_t^{(1)}$  зависит от объема его продаж в предыдущий момент времени (т. е. от  $y_{t-1}^{(2)}$ ). В данной схеме цена  $y_t^{(1)}$  и объем продаж

их аргументации основаны на тезисе, что большинство реальных механизмов формирования рассматриваемых в модели экономических показателей функционирует в рекурсивном (а не одновременном) режиме. Так, например, трудно представить себе рыночные механизмы, одновременно формирующие цены и количества предлагаемых товаров (см. ниже пример 4.6).

$y_t^{(2)}$  играют роль эндогенных переменных, а лаговой переменной  $y_{t-1}^{(2)}$  естественно отвести роль единственной предопределенной переменной  $x_t$  (т. е.  $x_t = y_{t-1}^{(2)}$ ).

В результате анализируемая модель будет описана системой

$$\begin{cases} y_t^{(1)} + c_{11}x_t = \delta_t^{(1)}, \\ \beta_{21}y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + c_{21}x_t = \delta_t^{(2)}, \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (4.60)$$

Первое уравнение системы без дополнительных ограничений является идентифицируемым, так как приведенная форма модели (4.60) имеет вид

$$\begin{cases} y_t^{(1)} = -c_{11}x_t + \delta_t^{(1)} = \pi_{11}x_t + \delta_t^{(1)}, \\ y_t^{(2)} = (\beta_{21}c_{11} - c_{21})x_t + (\delta_t^{(2)} - \beta_{21}\delta_t^{(1)}) = \pi_{21}x_t + \varepsilon_t^{(2)}, \end{cases} \quad (4.60a)$$

где  $c_{11} = -\pi_{11}$ , а  $\beta_{21}c_{11} - c_{21} = \pi_{21}$ .

Однако если дополнительно потребовать некоррелированность остатков  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$ , т. е. диагональности ковариационной матрицы остатков

$$\Sigma_{\Delta} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(1)}) & \text{cov}(\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}) \\ \text{cov}(\delta_t^{(2)}, \delta_t^{(1)}) & \text{cov}(\delta_t^{(2)}, \delta_t^{(2)}) \end{pmatrix},$$

то коэффициенты  $\beta_{21}$  и  $c_{21}$  2-го уравнения (4.60) могут быть состоятельно оценены с помощью обычного МНК, примененного к уравнению регрессии  $y_t^{(2)}$  по  $y_t^{(1)}$  и  $x_t$ . Действительно, перепишем 2-е уравнение (4.60) в виде

$$y_t^{(2)} = -\beta_{21}y_t^{(1)} - c_{21}x_t + \delta_t^{(2)}, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку объясняющая переменная  $y_t^{(1)} = -c_{11}x_t + \delta_t^{(1)}$  в правой части этого уравнения не коррелирована с  $\delta_t^{(2)}$  (так как ни  $x_t$ , ни  $\delta_t^{(1)}$  не коррелированы по условию с  $\delta_t^{(2)}$ ), то в соответствии с общей теорией КЛММР (см. гл. 7 в [Айвазян (2010)]) МНК-оценки параметров  $\beta_{21}$  и  $c_{21}$  будут состоятельными.

**З а м е ч а н и е.** Очень важным моментом в правильной спецификации модели, рассмотренной в примере 4.6, является *выбор продолжительности такта времени*. Действительно, продавец устанавливает цены, а покупатель на них реагирует. При этом торговые запасы будут либо накапливаться, либо рассасываться. Продавец среагирует на эту динамику и т. д. Если выбрать в качестве такта времени *один день*, то сделанные нами в модели примера 4.6 допущения выглядят естественными, поскольку последовательность *причинных связей*

$y_{t-1}^{(2)} \rightarrow y_t^{(1)} \rightarrow y_t^{(2)}$  является *линейной* цепью (т. е. не содержит никаких петель обратной связи). Это позволяет нам, в частности, предположить возмущения, влияющие на спрос ( $\delta_t^{(2)}$ ) и предложение ( $\delta_t^{(1)}$ ), независимыми. Однако если бы публиковались, скажем, только недельные данные о *средней* недельной цене ( $\bar{y}_t^{(1)}$ ) и *среднем* объеме дневных продаж ( $\bar{y}_t^{(2)}$ ), то вынужденное агрегирование соответствующих возмущений  $\bar{\delta}_t^{(1)}$  и  $\bar{\delta}_t^{(2)}$  в системе (4.60) делает эти возмущения взаимно коррелированными, а саму модель — неидентифицированной. Введение же в модель дополнительных переменных в целях достижения идентифицируемости модели (если бы такие переменные существовали), как правило, превращает рекурсивную модель в обычную СОУ со всеми вытекающими отсюда проблемами ее оценивания.

Перейдем к описанию процедуры статистического оценивания структурных параметров структурной формы *общей* рекурсивной модели СОУ. Пусть анализируется система из  $m$  стохастических уравнений с  $m$  эндогенными переменными  $Y_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(m)})'$  и  $k$  predetermined переменными  $X_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)})'$

$$BY_t + CX_t = \Delta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.61)$$

где  $\mathbf{B}$  —  $(m \times m)$ -матрица коэффициентов  $\beta_{ij}$  при эндогенных переменных ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ;  $\beta_{ii} = 1$  — условие нормировки),  $\mathbf{C}$  —  $(m \times k)$ -матрица коэффициентов  $c_{ij}$  при predetermined переменных ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ ), а вектор  $\Delta_t = (\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, \dots, \delta_t^{(m)})^\top$  — вектор-столбец возмущений (или случайных остатков), *не коррелированных с predetermined переменными*.

**Определение 4.16.** Система одновременных уравнений (4.61) называется *чисто рекурсивной*, если:

(i) матрица  $\mathbf{B}$  является *нижней треугольной*, т. е.

$$\beta_{ij} = 0 \quad \text{при } j > i \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, m - 1;$$

(ii) ковариационная матрица  $\Sigma_\Delta$  случайных остатков  $\Delta_t$  *диагональна* и не зависит от  $t$ , т. е.

$$\Sigma_\Delta = \mathbf{E}(\Delta_t \Delta_t^\top) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{mm} \end{pmatrix}.$$

*Иногда при спецификации модели удобнее ориентироваться на*



(ii<sup>a</sup>) случайные возмущения  $\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, \dots, \delta_t^{(m)}$  обладают тем свойством, что  $\delta^{(q)}$  не коррелирует со всеми «предшествующими» эндогенными переменными, т. е. с  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(q-1)}$  ( $q = 2, 3, \dots, m$ ).

Если выполняется только условие (i), то система называется *формально рекурсивной*, или просто *рекурсивной*.

Выпишем теперь явный вид МНК-оценок структурных коэффициентов  $i$ -го уравнения системы (4.61). Пусть  $j_1 < j_2 < \dots < j_{m_i-1}$  и  $q_1 < q_2 < \dots < q_{k_i}$  — номера, соответственно, эндогенных (кроме переменной  $y^{(i)}$ ) и predetermined переменных, участвующих в  $i$ -м уравнении системы (в силу ее рекурсивности, очевидно,  $m_i \leq i$ ). Тогда  $i$ -е уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_t^{(i)} = & -\beta_{ij_1} y_t^{(j_1)} - \beta_{ij_2} y_t^{(j_2)} - \dots - \beta_{ij_{m_i-1}} y_t^{(j_{m_i-1})} \\ & - c_{iq_1} x_t^{(k_1)} - \dots - c_{iq_{k_i}} x_t^{(q_{k_i})} + \delta_t^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$t = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим  $Y^{(l)}$  и  $X^{(s)}$ , соответственно,  $l$ -й столбец матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $s$ -й столбец матрицы  $\mathbf{X}$ . Пусть  $\Delta^{(i)} = (\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \dots, \delta_n^{(i)})'$ ,  $\Theta^{(i)} = -(\beta_{ij_1}, \dots, \beta_{ij_{m_i-1}}; c_{iq_1}, \dots, c_{iq_{k_i}})^\top$  — вектор-столбец, составленный из коэффициентов правой части (4.62), а

$$\mathbf{Z}^{(i)} = (Y^{(j_1)} \dots Y^{(j_{m_i-1})} X^{(q_1)} \dots X^{(q_{k_i})}) -$$

матрица размерности  $n \times (m_i - 1 + k_i)$ , составленная из столбцов, отобранных из матриц  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{X}$ . Тогда уравнение (4.62) может быть представлено в виде

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{Z}^{(i)} \Theta^{(i)} + \Delta^{(i)}, \quad (4.62')$$

а МНК-оценки коэффициентов  $\Theta^{(i)}$  в соответствии с общим результатом (4.22) из [Айвазян (2010)] можно вычислить по формуле

$$\hat{\Theta}^{(i)} = (\mathbf{Z}^\top(i) \mathbf{Z}(i))^{-1} \mathbf{Z}^\top(i) \mathbf{Y}^{(i)}. \quad (4.63)$$

При этом, конечно, необходимо, чтобы матрица  $\mathbf{Z}^{(i)}$  имела бы полный ранг (т. е.  $\text{ранг } \mathbf{Z}^{(i)} = m_i - 1 + k_i$ ) или, что то же, матрица  $\mathbf{Z}'(i) \mathbf{Z}(i)$  должна быть невырожденной.

#### 4.4.5. Оценивание уравнений структурной формы СОУ

**Косвенный метод наименьших квадратов.** Косвенный МНК (КМНК) предназначен для оценивания параметров *отдельного* уравнения структурной формы системы и может дать результат (без сочетания с другими методами, например, с двухшаговым методом наименьших квадратов) только в применении к *точно идентифицируемо-*

Итак, рассмотрим систему (4.45) и ее приведенную форму (4.46), в которой (см. (4.47))

$$\Pi = -B^{-1}C$$

матрица коэффициентов  $\pi_{ij}$  предопределенных переменных ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$ ), переменные  $X_t$  не мультиколлинеарны, а

$$\varepsilon_t = B^{-1}\Delta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.64)$$

вектор-столбец случайных остатков, не коррелированных с предопределенными переменными  $X_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(p)})'$  по условию (так как все компоненты вектора  $\Delta_t$  не коррелированы с  $X_t$ ).

Наша цель — оценить параметры  $i$ -го уравнения системы (4.45). Для анализа  $i$ -го уравнения воспользуемся общей схемой (4.51)–(4.55), которая была рассмотрена при выводе условий идентифицируемости отдельного уравнения системы.

Процедуру статистического оценивания параметров  $i$ -го уравнения системы (4.45) разобьем на два этапа.

На 1-м этапе оцениваем с помощью обычного МНК все параметры  $\pi_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p$ ) приведенной формы (4.46), последовательно (и автономно) решая эту задачу для каждого отдельного уравнения системы (4.46). Хорошие свойства получаемых МНК-оценок  $\hat{\pi}_{ij}$  (их состоятельность, а в случае нормальности  $\delta_t^{(k)}$  — и их эффективность) обеспечиваются тем, что в модели (4.46)–(4.47)–(4.64) выполняются все условия классической линейной модели множественной регрессии.

На 2-м этапе используются соотношения (4.56)–(4.57), связывающие структурные параметры  $i$ -го уравнения системы (4.61) с параметрами  $\pi_{ij}$  приведенной формы. В случае точной (или сверх-) идентифицируемости  $i$ -го уравнения структурной формы (т. е. при выполнении условий порядка и ранга или только условия порядка со знаком *строгого* неравенства) его параметры  $\beta(i)$  и  $c(i)$  однозначно (или неоднозначно) определяются из системы (4.56)–(4.57) по значениям  $\pi_{ij}$ . Подставив в эти соотношения вместо  $\pi_{ij}$  их оценки  $\hat{\pi}_{ij}$  и решив систему уравнений (4.56)–(4.57) относительно  $\beta(i)$  и  $c(i)$ , мы получим состоятельные оценки  $\hat{\beta}(i)$  и  $\hat{c}(i)$  параметров  $i$ -го уравнения системы (4.45).

В случае неидентифицируемости анализируемого уравнения структурной формы (т. е. при невыполнении условия порядка идентифицируемости) число взаимно независимых связей между  $\beta(i)$ ,  $c(i)$  и  $\pi_{ij}$ , содержащихся в системе (4.56)–(4.57), будет меньше общего числа  $m_i + k_i - 1$  неизвестных. Поэтому без дополнительной информации мы не сможем из (4.56)–(4.57) определить значения структурных коэффициентов  $\beta(i)$  и  $c(i)$ .

и  $c(i)$ . Один из самых распространенных способов получения необходимой дополнительной информации в данном случае, который позволяет получать оценки параметров неидентифицируемого уравнения структурной формы, — это *двухшаговый метод наименьших квадратов*. Однако прежде чем переходить к его рассмотрению, проанализируем процесс оценивания параметров структурной формы на нашем примере 4.5.

**Пример 4.5** (продолжение).

Попробуем сначала формально воспользоваться обычным методом наименьших квадратов, примененным в отдельности к каждому из уравнений (4.48) и (4.49) (при исключенном балансовом тождестве (4.50)), и проанализируем состоятельность полученных оценок.

1) *Несостоятельность обычных МНК-оценок параметров уравнений структурной формы*. Начнем с уравнения (4.48) и воспользуемся формулой для вычисления МНК-оценки в простейшем варианте модели регрессии с единственной объясняющей переменной (в уравнении (4.48) ее роль выполняет цена товара  $y^{(2)}$ ):

$$\hat{b}_{1 \text{ МНК}} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^{(1)} y_t^{(2)}}{\sum_{t=1}^n (y_t^{(2)})^2}. \quad (4.65)$$

Как обычно это делается при исследовании свойств несмещенности и состоятельности оценки, подставим в правую часть (4.65) вместо переменной  $y_t^{(1)}$  ее модельное выражение из (4.48):

$$\hat{b}_{1 \text{ МНК}} = \frac{\sum_{t=1}^n (b_1 y_t^{(2)} + \delta_t^{(1)}) y_t^{(2)}}{\sum_{t=1}^n (y_t^{(2)})^2} = b_1 + \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \delta_t^{(1)} y_t^{(2)}}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t^{(2)})^2}. \quad (4.66)$$

Исследуем поведение (при  $n \rightarrow \infty$ ) 2-го слагаемого в правой части (4.66), поскольку от него зависят свойства асимптотической несмещенности и состоятельности оценки  $\hat{b}_{1 \text{ МНК}}$ . Если принять естественное допущение о существовании пределов (при  $n \rightarrow \infty$ ) числителя и знаменателя этого отношения, то в силу закона больших чисел будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \delta_t^{(1)} y_t^{(2)} \right) = \mathbf{E}(\delta_t^{(1)} y_t^{(2)}) = \text{cov}(\delta_t^{(1)}, y_t^{(2)}), \quad (4.67)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t^{(2)})^2 \right] = \mathbf{E}(y_t^{(2)})^2 = \mathbf{D}y_t^{(2)} \quad (4.68)$$

(в этих соотношениях учтено, что по построению  $\mathbf{E}\delta_t^{(1)} = \mathbf{E}y_t^{(2)} = 0$  при всех  $t$ , а сходимость пределов понимается «по вероятности»). Остается выразить значения  $\text{cov}(\delta_t^{(1)}, y_t^{(2)})$  и  $\mathbf{D}y_t^{(2)}$  в терминах параметров модели. Для этого воспользуемся выражением  $y_t^{(2)}$  из второго соотношения приведенной формы (4.58) анализируемой СОУ (с учетом (4.58') и (4.58'')):

$$\begin{aligned} \text{cov}(\delta_t^{(1)}, y_t^{(2)}) &= \mathbf{E} \left[ \delta_t^{(1)} \left( \pi_2 x_t + \frac{\delta_t^{(2)} - \delta_t^{(1)}}{b_1 - b_2} \right) \right] = \\ &= \frac{c}{b_1 - b_2} \text{cov}(\delta_t^{(1)}, x_t) + \frac{\text{cov}(\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}) - \mathbf{D}\delta_t^{(1)}}{b_1 - b_2} = -\frac{\sigma_1^2}{b_1 - b_2}; \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}y_t^{(2)} &= \mathbf{E} \left( \frac{cx_t + (\delta_t^{(2)} - \delta_t^{(1)})}{b_1 - b_2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{(b_1 - b_2)^2} (c^2 \mathbf{D}x_t + \mathbf{D}\delta_t^{(1)} + \mathbf{D}\delta_t^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Теперь мы можем вычислить предельное выражение (при  $n \rightarrow \infty$ ) для  $\hat{b}_{1\text{МНК}}$ , вернувшись к (4.66) и учтя (4.67)–(4.70):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{b}_{1\text{МНК}} = b_1 + \frac{-\frac{\sigma_1^2}{b_1 - b_2}}{\frac{c^2 \mathbf{D}x_t + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}{(b_1 - b_2)^2}} = b_1 - (b_1 - b_2) \frac{\sigma_1^2}{c^2 \mathbf{D}x_t + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Мы видим, что обычная МНК-оценка  $\hat{b}_{1\text{МНК}}$  параметра  $b_1$  имеет в общем случае (т.е. при  $b_1 \neq b_2$  и  $\sigma_1^2 \neq 0$ ) асимптотически неустраняемое смещение, а следовательно, она не является ни несмещенной, ни (что более важно) состоятельной. Поскольку результат отрицательный, оценивание 2-го уравнения системы с помощью обычного МНК, очевидно, не имеет смысла.

2) *Использование косвенного метода наименьших квадратов.* При переходе к приведенной форме (4.58)–(4.58')–(4.58'') было подмечено, что регрессионные остатки в уравнениях (4.58) удовлетворяют условиям классической модели регрессии. Следовательно, оценки параметров  $\pi_1$  и  $\pi_2$  могут быть получены с помощью обычного метода наименьших квадратов, и при этом они будут несмещенными и состоятельными. Но в случае идентифицируемости параметров структурной формы они по определению могут быть выражены через параметры приведенной формы. Поэтому если в эти выражения мы вместо параметров  $\pi_j$  подставим их МНК-оценки  $\hat{\pi}_j$ , то получим (в соответствии с теоремой Слуцкого) состоятельные оценки для соответствующих идентифицируемых параметров структурной формы. Такой способ оценивания идентифицируемых параметров структурной формы выше назван *косвенным методом*.

наименьших квадратов. В нашем примере идентифицируемым является только 1-е уравнение. В соответствии с (4.59) получаем состоятельную оценку косвенного метода наименьших квадратов для параметра  $b_1$ :

$$\hat{b}_{1\text{МНК}} = \frac{\hat{\pi}_{1\text{МНК}}}{\hat{\pi}_{2\text{МНК}}}, \quad (4.71)$$

где  $\hat{\pi}_{j\text{МНК}}$  — обычные МНК-оценки параметров  $\pi_j$  в уравнениях (4.58) приведенной формы анализируемой СОУ.

3) *Использование метода инструментальных переменных.* Причина непригодности обычного метода наименьших квадратов в оценивании параметров 1-го уравнения структурной формы, как мы знаем (см. п. 7.2 в [Айвазян (2010)]), — в коррелированности объясняющей переменной (в нашем случае —  $y_t^{(2)}$ ) с регрессионными остатками (в нашем случае — с  $\delta_t^{(1)}$ ). В соответствии с рекомендациями п. 7.2 из [Айвазян (2010)] в уравнении (4.48) в качестве инструментальной переменной естественно использовать доход  $x$ , поскольку:

- $x_t$  не коррелирован по условию с  $\delta_t^{(1)}$ ;
- $x_t$  по построению достаточно сильно коррелирован с  $y_t^{(2)}$  (что, в частности, подтверждается осмысленностью рассмотрения 2-го уравнения приведенной формы (4.58)).

Тогда в соответствии с (7.11') из [Айвазян (2010)] оценка  $\hat{b}_{1x}$  параметра  $b_1$  по методу инструментальных переменных будет

$$\hat{b}_{1x} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^{(1)} x_t}{\sum_{t=1}^n y_t^{(2)} x_t}. \quad (4.72)$$

Если принять во внимание, что МНК-оценки  $\hat{\pi}_j$  параметров  $\pi_j$  уравнений приведенной формы (4.58) имеют вид

$$\hat{\pi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^{(1)} x_t}{\sum_{t=1}^n x_t^2}, \quad \hat{\pi}_2 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^{(2)} x_t}{\sum_{t=1}^n x_t^2},$$

то сравнение оценки (4.71), полученной с помощью косвенного метода наименьших квадратов, с оценкой (4.72), полученной с помощью метода инструментальных переменных, приводит к выводу, что в данном

## Оценивание неидентифицируемых уравнений структурной формы СОУ: двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК)

Пусть, как и прежде,  $i$ -е уравнение системы (4.45) представлено в форме (4.62), и пусть

$$\mathbf{Y}(i) = (Y^{(j_1)} Y^{(j_2)} \dots Y^{(j_{m_i-1})}) -$$

матрица размерности  $(n \times (m_i - 1))$ , составленная из соответствующих  $m_i - 1$  столбцов матрицы  $\mathbf{Y}$ ,

$$\mathbf{X}(i) = (X^{(q_1)} X^{(q_2)} \dots X^{(q_{k_i})}) - \quad (4.35)$$

матрица размерности  $(n \times k_i)$ , составленная из соответствующих  $k_i$  столбцов матрицы  $\mathbf{X}$ , а  $\mathbf{X}_{\text{ост}}(i)$  — матрица размерности  $(n \times (k - k_i))$ , составленная из тех столбцов матрицы  $\mathbf{X}$ , которые остались после отбора из нее столбцов для матрицы  $\mathbf{X}(i)$ . Тогда анализируемое ( $i$ -е) уравнение системы (4.62) можно представить в виде

$$\mathbf{Y}(i) = \mathbf{Y}(i) b_{-}(i) + \mathbf{X}(i) c_{-}(i) + \Delta(i), \quad (4.73)$$

где  $b_{-}(i) = (-\beta_{ij_1}, -\beta_{ij_2}, \dots, -\beta_{ij_{m_i-1}})'$ ,  $c_{-}(i) = (-c_{iq_1}, -c_{iq_2}, \dots, -c_{iq_{k_i}})'$  и, как и прежде,  $\Delta(i) = (\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \dots, \delta_n^{(i)})'$ .

**1-й шаг 2МНК.** С помощью обычного МНК строится регрессия выступающих в роли предикторов в уравнении (4.73) *эндогенных* переменных  $\mathbf{Y}(i)$  по *всем* predetermined переменным  $\mathbf{X}$ . В результате получаем регрессионную аппроксимацию  $\hat{\mathbf{Y}}(i)$  эндогенных переменных  $\mathbf{Y}(i)$  в виде линейной комбинации всех predetermined переменных в форме

$$\hat{\mathbf{Y}}(i) = \mathbf{X} \hat{\Theta}_{Y_i/X}, \quad (4.74)$$

где  $\hat{\Theta}_{Y_i/X} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}(i)$ , а  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(i) : \mathbf{X}_{\text{ост}}(i))$  — матрица размерности  $(n \times k)$  наблюдаемых значений *всех* predetermined переменных, составленная из матриц  $\mathbf{X}(i)$  и  $\mathbf{X}_{\text{ост}}(i)$ .

**2-й шаг 2МНК.** С помощью обычного МНК строится регрессия эндогенной переменной  $Y^{(i)}$  по  $\hat{\mathbf{Y}}(i)$  и  $\mathbf{X}(i)$ . Другими словами, в уравнении (4.73) объясняющие переменные  $\mathbf{Y}(i)$  заменяются на их аппроксимации  $\hat{\mathbf{Y}}(i)$ , выраженные формулой (4.74). Реализация МНК в данном случае, проведенная в соответствии с общей теорией классической линейной модели множественной регрессии (см. п. 4.2 в [Айвазян (2010)]), приводит к следующей системе нормальных уравнений относительно

оценок  $\hat{b}_-(i)$  и  $\hat{c}_-(i)$  неизвестных параметров, соответственно,  $b_-(i)$  и  $c_-(i)$ :

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}'(i) \cdot \hat{Y}(i) & \vdots & \hat{Y}'(i) \cdot X(i) \\ \dots & \dots & \dots \\ X'(i) \cdot \hat{Y}(i) & \vdots & X'(i) \cdot X(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_-(i) \\ \hat{c}_-(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}'(i) \cdot Y(i) \\ X'(i) \cdot Y(i) \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Заметим, что квадратная матрица  $A$ , являющаяся первым сомножителем в левой части соотношения (4.75) (она составлена из матриц  $\hat{Y}'(i)\hat{Y}(i)$ ,  $\hat{Y}'(i)X(i)$ ,  $X'(i)\hat{Y}(i)$  и  $X'(i)X(i)$ ), имеет размерность  $(m_i - 1 + k_i) \times (m_i - 1 + k_i)$  и может оказаться вырожденной в силу мультиколлинеарности, возникающей (по построению) между объясняющими переменными  $\hat{Y}(i)$  и  $X(i)$  в случае  $X(i) \equiv X$ . В этих случаях явные выражения оценок  $\hat{b}_-(i)$  и  $\hat{c}_-(i)$  из (4.75) получить невозможно. Однако объединение соотношений (4.75) и системы (4.56)–(4.57) даст нам систему линейных уравнений относительно  $\hat{b}_-(i)$  и  $\hat{c}_-(i)$  (т. е. относительно неизвестных параметров  $i$ -го уравнения структурной формы), которая позволит вычислить значения всех этих параметров. В остальных же случаях матрица  $A$  обратима и, следовательно, мы имеем возможность получить явные выражения оценок, а именно:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_-(i) \\ \hat{c}_-(i) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \hat{Y}'(i)Y(i) \\ X'(i)Y(i) \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

где  $(m_i - 1 + k_i) \times (m_i - 1 + k_i)$  — матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \hat{Y}'(i)\hat{Y}(i) & \vdots & \hat{Y}'(i)X(i) \\ \dots & \dots & \dots \\ X'(i)\hat{Y}(i) & \vdots & X'(i)X(i) \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

или, что то же,

$$A = \begin{pmatrix} Y'(i)X(X'X)^{-1}X'Y(i) & \vdots & \hat{Y}'(i)X(i) \\ \dots & \dots & \dots \\ X'(i)\hat{Y}(i) & \vdots & X'(i)X(i) \end{pmatrix}. \quad (4.77')$$

Заметим, что первые  $m_i - 1$  компонент вектора-столбца, являющегося вторым сомножителем в правой части (4.76), могут быть также представлены в терминах исходных наблюдений, а именно:

В задачах анализа точности 2МНК-оценок отдельного уравнения СОУ важную роль играет ковариационная матрица  $\Sigma$  этих оценок. Можно показать (см., например, [Джонстон (1980)], с. 383), что при большом числе наблюдений (т.е. асимптотически по  $n \rightarrow \infty$ ) матрица  $\Sigma$  может быть оценена (в случае невырожденности матрицы  $\mathbf{A}$ ) с помощью матрицы

$$\widehat{\Sigma} = s^2 \mathbf{A}^{-1}, \quad (4.79)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  определяется соотношениями (4.77) или (4.77'), а

$$s^2 = \frac{1}{n - m_i - 1 - p_i} (Y^{(i)} - \mathbf{Y}(i)\hat{b}_-(i) - \mathbf{X}(i)\hat{c}_-(i))' \times (4.80) \\ \times (Y^{(i)} - \mathbf{Y}(i)\hat{b}_-(i) - \mathbf{X}(i)\hat{c}_-(i)).$$

**Пример 4.5 (продолжение).**

Снова вернемся к рассмотренному выше примеру, в котором анализировалась модель спроса и предложения. Чтобы обойти главное препятствие в применении обычного МНК к *отдельному неидентифицируемому уравнению* (в данном примере это было уравнение, описывающее зависимость спроса  $y_t^{(1)}$  от цены  $y_t^{(2)}$  и дохода  $x_t$ :  $y_t^{(1)} = b_2 y_t^{(2)} + c x_t + \delta_t^{(2)}$ ) — коррелированность играющей роль предиктора эндогенной переменной  $y_t^{(2)}$  со случайными остатками  $\delta_t^{(2)}$ , — на 1-м шаге строится регрессия эндогенной переменной-предиктора  $y_t^{(2)}$  по предопределенной переменной  $x_t$ . В результате получаем оцененное регрессионное уравнение  $y_t^{(2)} = \hat{\theta}_{y^{(2)}/x} x_t + \varepsilon_t$ . На 2-м шаге в правую часть анализируемого уравнения вместо эндогенной переменной  $y_t^{(2)}$  вставляется ее регрессионное выражение через  $x_t$ , в результате чего получаем уравнение

$$y_t^{(1)} = (b_2 \hat{\theta}_{y^{(2)}/x} + c) x_t + (\delta_t^{(2)} + b_2 \varepsilon_t).$$

После этого к данному уравнению применяется обычный МНК в целях состоятельного оценивания коэффициента  $\theta_{y^{(1)}/x} = b_2 \hat{\theta}_{y^{(2)}/x} + c$  (очевидно, вести речь об *отдельном* оценивании коэффициентов  $b_2$  и  $c$  в уравнении  $y_t^{(1)} = b_2 x_t^{(2)} + c x_t + (\delta_t^{(2)} + b_2 \varepsilon_t)$ , в котором  $x_t^{(2)} = \hat{\theta}_{y^{(2)}/x} x_t$ , не имеет смысла, так как переменные  $\tilde{x}_t$  и  $x_t$  связаны чистой мультиколлинеарностью по построению). Получив оценку  $\hat{\theta}_{y^{(1)}/x}$  параметра

$\theta_{y^{(1)}/x} = b_2 \hat{\theta}_{y^{(2)}/x} + c$ , мы к имеющимся уже двум соотношениям, связывающим параметры структурной и приведенной форм (вытекающим из общей формулы (4.47)), добавляем еще одно:  $\theta_{y^{(1)}/x} = b_2 \hat{\theta}_{y^{(2)}/x} + c$ .





ее выборочное среднеквадратическое отклонение. В результате получаем матрицу  $\tilde{\mathbf{X}}_{\text{ост}}(i)$ .

2) По наблюдениям стандартизированной матрицы  $\tilde{\mathbf{X}}_{\text{ост}}(i)$  строятся главные компоненты  $U^{(l)} = (u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_n^{(l)})'$ ,  $l = 1, 2, \dots, k - k_i$  (см., например, п. 3.4 в [Айвазян (2010)]).

3) Из  $k - k_i$  построенных главных компонент  $U^{(l)}$  отбирается сравнительно небольшое число  $q$  ( $q \leq 4$ ) наиболее информативных с точки зрения точности аппроксимации значений  $Y^{(i)}$  в виде функции от  $\mathbf{X}(i)$  и  $U^{(l_1)}, U^{(l_2)}, \dots, U^{(l_q)}$ . В качестве критерия информативности можно использовать, например, величину коэффициента детерминации  $R^2$ , определяющего степень тесноты связи между  $Y^{(i)}$ , с одной стороны, и набором  $\mathbf{X}(i), U^{(l_1)}, \dots, U^{(l_q)}$  — с другой.

Иначе говоря, главные компоненты  $U^{(l_1^0)}, \dots, U^{(l_q^0)}$  отбираются из общего числа  $k - k_i$  в соответствии с условием<sup>12</sup>

$$U^{(l_1^0)}, U^{(l_2^0)}, \dots, U^{(l_q^0)} \rightarrow \max_{l_1, l_2, \dots, l_q} R_{Y^{(i)} \cdot (\mathbf{X}(i), U^{(l_1)}, \dots, U^{(l_q)})}^2.$$

4) В качестве 1-го шага 2МНК строится регрессия  $\mathbf{Y}(i)$  по  $\mathbf{X}(i), U^{(l_1^0)}, U^{(l_2^0)}, \dots, U^{(l_q^0)}$  (а не по  $\mathbf{X}(i), \mathbf{X}_{\text{ост}}(i)$ , как это рекомендовано в обычном 2МНК).

**З а м е ч а н и е.** Иногда строят главные компоненты по *всей* матрице  $\mathbf{X}$ , и тогда аппроксимация  $\mathbf{Y}(i)$  осуществляется только по  $k$  главным компонентам этой матрицы, причем  $k$  должно подбираться с учетом условия порядка идентифицируемости уравнения. Тем самым обходится неудобство этого метода, возникающее при необходимости оценивания сразу нескольких (а тем более — всех) уравнений системы. В вышеизложенном варианте тогда придется строить главные компоненты для каждого уравнения в отдельности. Однако существуют работы, демонстрирующие преимущества (в точности) именно изложенного выше метода по сравнению с подходом, в котором главные компоненты строятся по всей матрице  $\mathbf{X}$  для всех уравнений системы.

В заключение отметим, что эконометрическая теория и практика свидетельствуют о том, что 2МНК, наряду с методом инструментальных переменных, является, пожалуй, наиболее важным и широко применяемым методом оценивания параметров *отдельного уравнения* структурной формы СОУ.

<sup>12</sup>В эконометрической литературе и практике предлагались и использовались и другие критерии отбора главных компонент: критерий минимизации мультиколлинеарности между  $\mathbf{X}(i)$  и  $U^{(l_1)}, \dots, U^{(l_q)}$ ; критерий максимальной дисперсии, когда отбираются главные компоненты, соответствующие максимальным характеристическим числам (см., например, [Джонстон Дж. (1980)], с. 393–395). Однако предложен Скопировано с сайта <http://www.knirp.ru> представляется более предпочтительным. Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.рф>



параметров

$$\Theta(i) = (-\beta_{ij_1}, \dots, -\beta_{ij_{m_1-1}}; -c_{ik_1}, \dots, -c_{ik_{p_i}})', \quad (4.82)$$

составленный из векторов  $b_-(i)$  и  $c_-(i)$ . Тогда мы можем записать уравнение (4.73) в виде

$$Y^{(i)} = Z(i)\Theta(i) + \Delta(i). \quad (4.73')$$

В 2МНК мы обходили неприятности, связанные с взаимной коррелированностью объясняющих переменных  $Y(i)$  и остатков  $\Delta(i)$ , подстановкой в уравнение (4.73) вместо  $Y(i)$  их регрессионного выражения через  $X$  (см. формулу (4.74)). Оказывается, можно добиться того же и прийти к 2МНК-оценкам (4.76), действуя формально несколько иным способом. А именно, домножим все члены уравнения (4.73') слева на матрицу  $X'$ :

$$X'Y^{(i)} = (X'Z(i))\Theta(i) + X'\Delta(i), \quad (4.82)$$

или, что то же,

$$\tilde{Y}^{(i)} = \tilde{Z}(i)\Theta(i) + \tilde{\Delta}(i), \quad (4.82')$$

где

$$\tilde{Y}^{(i)} = X'Y^{(i)}, \quad (4.83)$$

$$\tilde{Z}(i) = X'Z(i), \quad (4.84)$$

$$\tilde{\Delta}(i) = X'\Delta(i). \quad (4.85)$$

Можно показать, что в уравнении (4.82') объясняющие переменные  $\tilde{Z}(i)$  не коррелированы с остатками  $\tilde{\Delta}(i)$  и что ковариационная матрица  $\Sigma_{\tilde{\Delta}(i)}$  остатков  $\tilde{\Delta}(i)$  имеет вид

$$\Sigma_{\tilde{\Delta}(i)} = E(\tilde{\Delta}(i)\tilde{\Delta}'(i)) = \sigma_{ii}(X'X), \quad (4.86)$$

где  $\sigma_{ii} = D\delta_t^{(i)}$ .

Соотношение (4.82') (и эквивалентное ему (4.82)) можно рассматривать как *обобщенную линейную модель множественной регрессии*, в которой  $\tilde{Y}^{(i)}$  играет роль вектора наблюдений зависимой переменной,  $\tilde{Z}(i)$  — матрица наблюдений объясняющих переменных,  $\Theta(i)$  — вектор-столбец оцениваемых параметров, а  $\tilde{\Delta}(i)$  — вектор-столбец регрессионных остатков с заданной (с точностью до постоянного множителя  $\sigma_{ii}$ ) ковариационной матрицей<sup>14</sup>. Тогда в соответствии с формулой

<sup>14</sup>Если в состав predetermined переменных  $X$  входят помимо *неслучайных экзогенных* переменных лаговые *эндогенные* переменные (которые по своей природе являются *стохастическими*), то, как известно (см. [Айвазян (2010)], п. 7.1), обобщенный метод наименьших квадратов будет продолжать давать тем не менее *состоятельные оценки параметров*, если эти *стохастические предикторы не коррелированы* с регрессионными остатками (что и имеет место в нашем случае).  
 Скопировано с сайта [http://www.разработка.ру](http://www.razrabotka.ru)  
 Разработка электронных библиотек  
 http://www.разработка.ру

ОМНК-оценок получаем:

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{\text{омнк}}(i) &= [\tilde{\mathbf{Z}}'(i)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\tilde{\mathbf{Z}}(i)]^{-1}\tilde{\mathbf{Z}}'(i)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\tilde{\mathbf{Y}}^{(i)} \\ &= [\mathbf{Z}'(i)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}(i)]^{-1}\mathbf{Z}'(i)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^{(i)}.\end{aligned}\quad (4.87)$$

Сравнение правых частей формул (4.87) и (4.76) с учетом соотношений (4.77'), (4.81) и (4.82) приводит к заключению об эквивалентности 2МНК-оценок и оценок (4.87).

**3-й шаг 3МНК.** От отдельных уравнений (4.82) вернемся ко всей СОУ (4.61). С этой целью, составив уравнения (4.82) для  $i = 1, 2, \dots, m$ , объединим их в одной обобщенной линейной модели множественной регрессии вида

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{X}'\mathbf{Y}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}'\mathbf{Y}^{(m)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{Z}(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}'\mathbf{Z}(2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}'\mathbf{Z}(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta(1) \\ \Theta(2) \\ \vdots \\ \Theta(m) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\Delta(1) \\ \mathbf{X}'\Delta(2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}'\Delta(m) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.88)$$

Матрица ковариаций  $\Sigma_{\tilde{\Delta}}$  вектора случайных остатков  $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}'(1), \tilde{\Delta}'(2), \dots, \tilde{\Delta}'(m))'$   $= (\Delta'(1)\mathbf{X}:\Delta'(2)\mathbf{X}:\dots:\Delta'(m)\mathbf{X})'$  будет иметь вид

$$\Sigma_{\tilde{\Delta}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \sigma_{12}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \dots & \sigma_{1m}\mathbf{X}'\mathbf{X} \\ \sigma_{21}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \sigma_{22}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \dots & \sigma_{2m}\mathbf{X}'\mathbf{X} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \sigma_{m2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \dots & \sigma_{mm}\mathbf{X}'\mathbf{X} \end{pmatrix} = \Sigma_{\Delta} \otimes \mathbf{X}'\mathbf{X}, \quad (4.89)$$

где через  $\sigma_{ij}$  обозначена ковариация случайных остатков  $i$ -го и  $j$ -го уравнений структурной формы (она по условию не зависит от  $t$ , т. е.  $\sigma_{ij} = \text{cov}(\Delta_t^{(i)}, \Delta_t^{(j)}) = \mathbf{E}(\delta_t^{(i)}\delta_t^{(j)})$ ),  $\Sigma_{\Delta} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$ , а символ  $\otimes$  означает *кронекерово перемножение матриц* (см. п. П2.8 в Приложении 2).

Чтобы воспользоваться обобщенным методом наименьших квадратов в одновременном оценивании параметров  $\Theta(1), \Theta(2), \dots, \Theta(m)$  обобщенной линейной модели множественной регрессии (4.88), необходимо знать ковариационную матрицу остатков  $\Sigma_{\tilde{\Delta}}$ . Из (4.89) видно, что для этого нам необходимо знать матрицу  $\Sigma_{\Delta}$  ковариаций случайных воз-

шага трехшагового метода наименьших квадратов как раз и заключается в том, что для построения оценки  $\hat{\Sigma}_\Delta$  неизвестной матрицы  $\Sigma_\Delta$  используются 2МНК-оценки  $\hat{\Theta}_{2\text{МНК}}(i)$  параметров  $\Theta(i)$ , а именно:  $(i, j)$ -й элемент  $\sigma_{ij}$  этой матрицы оценивается по формуле

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n} (Y^{(i)} - Z(i)\hat{\Theta}_{2\text{МНК}}(i))'(Y^{(j)} - Z(j)\hat{\Theta}_{2\text{МНК}}(j)), \quad (4.90)$$

где  $Z(l)$  и  $\hat{\Theta}_{2\text{МНК}}(l)$  определены соотношениями, соответственно, (4.81) и (4.76) (или (4.87)), а  $Y^{(l)} = (y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \dots, y_n^{(l)})'$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$ .

После этого мы можем воспользоваться формулой обобщенного метода наименьших квадратов, примененного к модели (4.88):

$$\hat{\Theta}_{3\text{МНК}} = (\tilde{Z}'\hat{\Sigma}_\Delta^{-1}\tilde{Z})^{-1}\tilde{Z}'\hat{\Sigma}_\Delta^{-1}\tilde{Y}, \quad (4.91)$$

где

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{\Theta}(1) \\ \hat{\Theta}(2) \\ \vdots \\ \hat{\Theta}(m) \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} X'Y^{(1)} \\ X'Y^{(2)} \\ \vdots \\ X'Y^{(m)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Sigma}_\Delta = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11}X'X & \hat{\sigma}_{12}X'X & \dots & \hat{\sigma}_{1m}X'X \\ \hat{\sigma}_{21}X'X & \hat{\sigma}_{22}X'X & \dots & \hat{\sigma}_{2m}X'X \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\sigma}_{m1}X'X & \hat{\sigma}_{m2}X'X & \dots & \hat{\sigma}_{mm}X'X \end{pmatrix},$$

$\hat{\sigma}_{ij}$  определены формулой (4.90), а

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} X'Z(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X'Z(2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X'Z(m) \end{pmatrix}$$

(напомним, что  $Z(i)$  и  $\Theta(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , определены соотношениями, соответственно, (4.81) и (4.82)).

Как уже было упомянуто, процедура 3МНК обеспечивает лучшую по сравнению с двухшаговым методом эффективность оценок лишь в случае, когда матрица  $\Sigma_\Delta$  не является диагональной, т. е. когда случайные остатки  $\delta_t^{(i)}$ , входящие в различные структурные уравнения, коррелируют друг с другом. Если матрица ковариаций  $\Sigma_\Delta$  для структурных остатков может быть приведена (соответствующим упорядочением уравнений системы) к *блочно-диагональному виду*, то всю процедуру трехшагового оценивания лучше применять *отдельно к каждой группе уравнений, соответствующих одному блоку*. Тем самым существенно

## Другие методы оценивания СОУ и некоторые общие рекомендации

Помимо методов статистического оценивания СОУ, описанных выше, в эконометрической литературе и практике существуют и другие процедуры. Так, если дополнительно постулировать *нормальность структурных возмущений*  $\delta_t^{(i)}$ , то для оценки отдельного уравнения наряду с 2МНК может быть использован *метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией*, или, что то же, *метод наименьшего дисперсионного отношения*<sup>15</sup>. Для одновременной оценки всех параметров системы в рамках тех же условий нормальности  $\delta_t^{(i)}$  разработан также *метод максимального правдоподобия с полной информацией*<sup>16</sup>. В расширении класса методов оценивания СОУ можно идти также по линии введения целых *параметрических семейств методов*, когда при конкретном выборе значения свободного параметра этого семейства мы приходим к тому или иному уже известному методу как к частному случаю<sup>17</sup>.

Мы оставили эти методы за рамками учебника, поскольку трудоемкость их вычислительной реализации, по меньшей мере, не уступает описанным выше косвенному, двухшаговому и трехшаговому методам наименьших квадратов. В то же время они требуют дополнительных модельных ограничивающих предположений. Поэтому они реже других методов применяются в эконометрической практике.

В заключение приведем несколько общих рекомендаций по построению и статистическому анализу СОУ.

1) Прежде всего следует провести процедуру исключения из СОУ всех уравнений, являющихся тождествами.

2) В ходе этапа «спецификация модели» надо стремиться к обеспечению выполнения условий идентифицируемости отдельных уравнений и системы в целом. Если среди конечных прикладных целей моделирования ставится задача *интервального* прогноза значений эндогенных переменных (см. ниже, п. 4.4.6), то следует стремиться к обеспечению нормальности и взаимной независимости (по  $t$ ) случайных возмущений  $\delta_t^{(i)}$ .

3) Приступая к статистическому оцениванию СОУ, следует приме-

<sup>15</sup>Метод впервые предложен в работе: Anderson T. W., Rubin H. Estimation of the Parameters of a Singl Equation in a Complete System of Stochastic Equations // Ann. Math. Statistics. Vol. 20 (1949). P. 46–63

<sup>16</sup>См.: Hood W. C., Koopmans T. C. (eds). Studies in Econometric Method. New York, 1953.

<sup>17</sup>См.: Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. (Пер. с англ.). М.: Скопировано с сайта <http://www.pravo.infoform2000.ru> 1971. С. 281–282. Разработка электронных библиотек <https://pravo.infoform2000.pf>

нить, в первую очередь, 2МНК последовательно ко всем уравнениям системы и использовать полученные оценки структурных параметров для оценки ковариационной матрицы  $\Sigma_{\Delta}$  структурных остатков (см. формулу (4.90)).

4) По полученной оценке  $\hat{\Sigma}_{\Delta}$  ковариационной матрицы  $\Sigma_{\Delta}$  проверить гипотезу о ее диагональной (или блочно-диагональной) структуре. Если гипотеза о диагональности  $\Sigma_{\Delta}$  *не отвергается*, то использовать полученные ранее 2МНК-оценки структурных параметров  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  для вычисления оценок  $\hat{\Pi}$  параметров приведенной формы по формуле  $\hat{\Pi} = -\hat{B}^{-1}\hat{C}$  и далее — для прогноза и имитационных расчетов.

5) Если гипотеза о диагональности матрицы  $\Sigma_{\Delta}$  отвергается, то следует использовать полученную ранее оценку  $\hat{\Sigma}_{\Delta}$  для реализации процедуры 3МНК.

6) Если в процессе статистического анализа оценки  $\hat{\Sigma}_{\Delta}$  выяснится, что блочно-диагональная структура матрицы  $\Sigma_{\Delta}$  не противоречит имеющимся наблюдениям, то процедуру 3МНК следует применить отдельно к каждой группе уравнений СОУ, соответствующих тому или иному блоку матрицы  $\Sigma_{\Delta}$ .

#### 4.4.6. Точечный и интервальный прогноз значений эндогенных переменных

Можно выделить два основных типа конечных прикладных целей, преследуемых при построении эконометрических моделей в виде СОУ. Один из них связан с получением сведений о структурных параметрах модели и (или) коэффициентах приведенной формы. Это бывает обычно в ситуациях, когда интересующие исследователя параметры модели имеют четкую экономическую интерпретацию (они могут играть роль различных эластичностей, мультипликаторов, характеристик «склонности к сбережениям» и т. п.). Другой тип конечных прикладных целей заключается в стремлении осуществить с помощью анализируемой СОУ *условный прогноз эндогенных переменных* (при определенных условиях, накладываемых на значения предопределенных переменных), произвести многовариантные (в соответствии с различными вариантами условий) *сценарные расчеты*, показывающие, как себя будут вести эндогенные переменные при различных условиях, касающихся значений предопределенных переменных.

Если интерес сосредоточен на *структурных* параметрах  $B$  и  $C$ , то следует воспользоваться состоятельными методами их оценивания (2МНК, 3МНК) и по той же исходной информации *оценить точность примененных процедур* (либо с помощью *аналитических* методов, т. е. выводятся статистически оценивания ковариационную матрицу, используемую для прогноза и имитационных расчетов).



зуемых оценок параметров, см., например, (4.79)–(4.80), либо с помощью разного рода *компьютерно-имитационных методов*, о последних см. ниже).

Если же нас могут удовлетворить коэффициенты  $\Pi$  приведенной формы (сами по себе или как средство получения *точечного* прогноза эндогенных переменных по формуле  $\hat{Y}_{n+\tau} = \hat{\Pi}X_{n+\tau}$ , где  $X_{n+\tau}$  — заданные для момента времени  $n + \tau$  значения предопределенных переменных, а  $\tau$  — «глубина» прогноза), то анализ точности полученных оценок и (или) прогноза можно проводить одним из двух способов. В первом из них (более сложном) отправным пунктом служат состоятельные оценки  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  (структурных параметров  $B$  и  $C$ ) и их ковариационные матрицы  $\Sigma_{\hat{B}}$  и  $\Sigma_{\hat{C}}$ , а точнее, — состоятельные оценки  $\hat{\Sigma}_{\hat{B}}$  и  $\hat{\Sigma}_{\hat{C}}$  этих матриц. По ним строят оценки  $\hat{\Pi} = -\hat{B}^{-1}\hat{C}$  (см. (4.47)) и стараются вывести общий вид состоятельной оценки  $\hat{\Sigma}_{\hat{\Pi}}$  ковариационной матрицы  $\Sigma_{\hat{\Pi}}$ . Решение последней задачи составляет *аналитическую* базу для решения задачи построения *интервального* прогноза для эндогенных переменных  $Y$  и *интервальных* оценок для параметров приведенной формы  $\Pi$ . Этот путь анализа точности точечного прогноза  $\hat{Y}_{n+\tau}$  и точечных оценок  $\hat{\Pi}$  считается более предпочтительным в ситуациях, когда есть основания полагать, что спецификация модели в ее структурной форме осуществлена правильно<sup>18</sup>. Однако сопутствующие этому пункту громоздкость вывода вида ковариационной матрицы  $\Sigma_{\hat{\Pi}}$  и связанные с этим аналитико-вычислительные сложности побудили нас не включать подробное описание данного подхода в учебник (интересующийся читатель может обратиться непосредственно к работам: 1) *Goldberger A. S., Nagar A. L., Odeh H. S. The Covariance Matrices of Reduced-Form Coefficients and of Forecasts for a Structural Econometric Model // Econometrica. Vol. 29 (1961). P. 556–573*; 2) *Humans S. H. Simultaneous Confidence Intervals in Econometric Forecasting // Econometrica. Vol. 36 (1968). P. 18–30*).

Мы же остановимся здесь подробнее на относительно более простом пути построения интервальных прогнозов для эндогенных переменных и для отдельных параметров приведенной формы. Этот путь основан на непосредственном вычислении оценок  $\hat{\Pi}$  коэффициентов приведенной формы  $\Pi$  с помощью *обыкновенного метода наименьших квадратов*, примененного к каждому уравнению системы (4.46). Состоятельность и несмещенность этих оценок обеспечиваются стандартными модельными допущениями, относящимися к системе (4.45), а их ковариационная матрица выводится на базе фундаментальных соотношений классиче-

<sup>18</sup> См. *Klein L. R. The Efficiency of Estimation in Econometric Models // Cowles*  
Скопировано с сайта <http://www.право.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек  
Под редакцией Р. Барффа, № 157, Yale University, 1960. <https://право.информ2000.рф>

ского МНК.

Итак, по исходным статистическим данным анализируется приведенная форма СОУ вида

$$Y_t = \Pi X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.92)$$

где  $Y_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(m)})'$  и  $X_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)})'$  — векторы наблюдаемых в момент времени  $t$  значений, соответственно, эндогенных и предопределенных переменных,  $\Pi = (\pi_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m; \\ j=1,2,\dots,k}}$  — матрица коэффициентов приведенной формы, а случайные остатки  $\varepsilon_t = (\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)}, \dots, \varepsilon_t^{(m)})'$  имеют нулевые средние значения, постоянные (не зависящие от времени) дисперсии и не коррелированы с предопределенными переменными  $X_t$ .

Заметим, что модель (4.92) состоит из  $m$  обобщенных линейных моделей множественной регрессии вида

$$Y^{(i)} = \mathbf{X} \Pi(i) + \varepsilon(i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.92')$$

где  $Y^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})'$ ,  $\Pi(i) = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{ik})'$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Pi'$ ,  $\varepsilon(i) = (\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \dots, \varepsilon_n^{(i)})'$ , а  $\mathbf{X}$  — матрица наблюдений предопределенных переменных.

Даже при взаимной коррелированности остатков  $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \dots, \varepsilon_n^{(i)}$  (а они могут быть таковыми в нашем случае, если не потребовать некоррелированности структурных возмущений  $\delta_{t_1}^{(i)}$  и  $\delta_{t_2}^{(j)}$  разных уравнений для разных моментов времени) обычные оценки наименьших квадратов  $\hat{\pi}_{\text{МНК}}(i)$  параметров  $\pi(i)$  в уравнении (4.92') являются *состоятельными* (см. п. 5.2 в [Айвазян (2010)]). Применяя известную формулу для вычисления МНК-оценок, получаем

$$\hat{\Pi}_{\text{МНК}}(i) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'Y^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.93)$$

Матрицу, составленную из столбцов  $\hat{\Pi}_{\text{МНК}}(1), \hat{\Pi}_{\text{МНК}}(2), \dots, \hat{\Pi}_{\text{МНК}}(m)$ , очевидно, можно записать в виде

$$\left( \hat{\Pi}_{\text{МНК}}(1) \quad \hat{\Pi}_{\text{МНК}}(2) \quad \dots \quad \hat{\Pi}_{\text{МНК}}(m) \right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}, \quad (4.94)$$

где матрица  $\mathbf{Y}$  составлена из столбцов  $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(m)}$ , т. е. является *матрицей наблюдаемых значений эндогенных переменных*. Но матрица, стоящая в левой части (4.94), есть не что иное, как МНК-оценка для  $\Pi'$ , следовательно, вместо (4.94) мы можем записать

или, транспонируя обе части этого соотношения (воспользовавшись правилом транспонирования произведения матриц, см. Приложение 2), получаем:

$$\hat{\Pi}_{\text{МНК}} = \mathbf{Y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \quad (4.95)$$

**Точечный прогноз эндогенных переменных**  $\hat{Y}_{n+\tau}$  на  $\tau$  тактов времени вперед, т. е. точечная оценка значений  $Y_{n+\tau}$  по заданным значениям предопределенных переменных  $X_{n+\tau}$ , опирающийся на наблюдаемые значения этих переменных до момента времени  $t = n$  (т. е. на исходные данные), строится с помощью формулы

$$\hat{Y}_{n+\tau} = \hat{\Pi}_{\text{МНК}} X_{n+\tau}, \quad (4.96)$$

где матрица МНК-оценок  $\hat{\Pi}_{\text{МНК}}$  коэффициентов приведенной формы модели (4.45) определена соотношением (4.95). Заметим, что *истинные* значения эндогенных переменных в прогнозируемый период будут равны в соответствии с (4.92)

$$Y_{n+\tau} = \mathbf{\Pi} X_{n+\tau} + \varepsilon_{n+\tau}.$$

Следовательно, ошибка  $\hat{\varepsilon}(\tau)$  прогноза (4.96) может быть выражена в виде

$$\hat{\varepsilon}(\tau) = \hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau} = (\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \mathbf{\Pi}) X_{n+\tau} - \varepsilon_{n+\tau}. \quad (4.97)$$

А поскольку  $\mathbf{E}\hat{\Pi}_{\text{МНК}} = \mathbf{\Pi}$  (в силу свойства несмещенности МНК-оценок в обобщенной линейной модели множественной регрессии) и  $\mathbf{E}\varepsilon_{n+\tau} = \mathbf{0}_m$ , то, применяя к (4.97) операцию усреднения  $\mathbf{E}$ , убеждаемся в несмещенности прогноза (4.96), т. е. в том, что  $\mathbf{E}\hat{\varepsilon}(\tau) = \mathbf{0}_m$ .

**Интервальный прогноз эндогенных переменных**  $Y_t$  или построение *совместных* доверительных интервалов для различных сочетаний компонент этого вектора на  $\tau$  тактов времени вперед возможны, если мы будем знать (сможем оценить) ковариационную матрицу ошибок прогноза  $\hat{\varepsilon}(\tau) = \hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau}$ , т. е. матрицу

$$\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)} = \mathbf{E}(\hat{\varepsilon}(\tau)\hat{\varepsilon}'(\tau)) = \mathbf{E}[(\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})(\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})']. \quad (4.98)$$

В условиях соблюдения стандартных модельных допущений, сформулированных, в частности, при описании модели (4.45), удастся получить несмещенную оценку  $\hat{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$  для ковариационной матрицы  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$  в виде

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}(\tau)} = [1 + X'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}X_{n+\tau}]\hat{\Sigma}_{\varepsilon}, \quad (4.99)$$

где матрица  $\hat{\Sigma}_{\varepsilon}$  является несмещенной оценкой ковариационной матрицы остатков приведенной формы  $\Sigma_{\varepsilon} = \mathbf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_t') = (s_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$  и задается формулой

$$\hat{\Sigma}_{\varepsilon} = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\Pi}'_{\text{МНК}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\Pi}'_{\text{МНК}}) \quad (4.100)$$

(вывод соотношения (4.99) дается ниже).

Теперь, если дополнительно предположить нормальный характер распределения случайных возмущений структурной ( $\delta_t^{(i)}$ ), а значит, и приведенной ( $\varepsilon_t^{(i)}$ ) форм анализируемой модели, мы располагаем всем необходимым для построения интервальных (как совместных — одновременно по набору эндогенных переменных, — так и по координатных — для каждой эндогенной переменной в отдельности) прогнозов.

Отклонения значений  $\hat{Y}_{n+\tau} = (\hat{y}_{n+\tau}^{(1)}, \hat{y}_{n+\tau}^{(2)}, \dots, \hat{y}_{n+\tau}^{(m)})'$  эндогенных переменных, спрогнозированных на  $\tau$  тактов времени вперед, от их истинных будущих значений  $Y_{n+\tau}$  с заданной доверительной вероятностью  $P = 1 - \alpha$  должны концентрироваться внутри эллипсоида рассеяния, определяемого уравнением

$$(\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})' \hat{\Sigma}_\varepsilon^{-1} (\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau}) \leq [1 + X'_{n+\tau} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} X_{n+\tau}] \times \frac{(n-p)m}{n-p-m+1} F_\alpha(m; n-p-m+1), \quad (4.101)$$

где  $X_{n+\tau} = (x_{n+\tau}^{(1)}, x_{n+\tau}^{(2)}, \dots, x_{n+\tau}^{(p)})'$  — заданные (на прогнозный период) значения предопределенных переменных, а  $F_\alpha(m; n-k-m+1)$  — 100 $\alpha\%$ -ная точка  $F$ -распределения с числами степеней свободы числителя и знаменателя, равными  $m$  и  $n-k-m+1$ <sup>19</sup>.

С практической точки зрения бывает удобнее знать гарантированные (одновременно для всех эндогенных переменных) пределы варьирования каждой из компонент  $y_{n+\tau}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), обозначенные на своей координатной оси  $0y^{(i)}$ . Геометрически эти по координатные интервалы определяются проекциями эллипсоида (4.101) на каждую из координатных осей  $0y^{(i)}$ . Хьюманс показал,<sup>20</sup> что эти проекции могут быть заданы соотношениями вида (одновременно выполняющимися для всех  $y_{n+\tau}^{(i)}$  с вероятностью  $P = 1 - \alpha$ ):

$$\begin{cases} \hat{y}_{n+\tau}^{(i)} - \sqrt{c_\alpha \hat{\sigma}_{ii}} \leq y_{n+\tau}^{(i)} \leq \hat{y}_{n+\tau}^{(i)} + \sqrt{c_\alpha \hat{\sigma}_{ii}}, \\ i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (4.101')$$

где

$$c_\alpha = [1 + X'_{n+\tau} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} X_{n+\tau}] \frac{(n-k)m}{n-k-m+1} F_\alpha(m; n-k-m+1),$$

<sup>19</sup>Этот вывод опирается на результат Хупера и Зельнера, которые показали, что статистика  $\frac{n-k-m+1}{(n-k)m} (\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})' \hat{\Sigma}_\varepsilon^{-1} (\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau})$  подчиняется  $F(m; n-k-m+1)$ -распределению. См.: Hooper J. W., Zellner A. The Error of Forecast for Multivariate Regression Models // Econometrica. Vol. 29 (1961). P. 544–555.

<sup>20</sup>См.: Humans S. H. Simultaneous Confidence Intervals in Econometric Forecasting. Скопировано с сайта <http://www.econometrics.com> (1968). P. 18–30. Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

а  $\hat{s}_{ii}$  —  $i$ -й диагональный элемент матрицы  $\hat{\Sigma}_\varepsilon$ , определенной соотношением (4.100).

Соотношения (4.101) и (4.101') задают *совместные* доверительные области (интервалы) для *всех* анализируемых эндогенных переменных одновременно. Если же нас интересует *интервальный прогноз одной отдельно взятой эндогенной переменной*  $y^{(i)}$ , выполняющийся с заданной вероятностью  $P = 1 - \alpha$ , то он определяется неравенствами

$$\left| y_{n+\tau}^{(i)} - \hat{y}_{n+\tau}^{(i)} \right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k) \sqrt{\hat{s}_{ii} \cdot [1 + X'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}X_{n+\tau}]}, \quad (4.102)$$

где  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k) = \sqrt{F_\alpha(1; n-k)} - 100\frac{\alpha}{2}\%$ -ная точка распределения Стьюдента с  $n-k$  степенями свободы. Из общих соображений следует ожидать (и это можно доказать строго математически), что ширина интервального прогноза (4.102) для *одной отдельно взятой эндогенной переменной* всегда существенно меньше, чем ширина интервального прогноза для той же самой переменной, получающаяся в рамках задачи построения *совместных доверительных интервалов* (4.101').

**Вывод формулы (4.99) для несмещенной оценки ковариационной матрицы ошибок прогноза.** Вернемся к задаче вычисления ковариационной матрицы ошибок прогноза  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$  (см. (4.98)) и построения ее несмещенной оценки  $\hat{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$ .

1) Подставим в правую часть (4.98) вместо ошибки прогноза  $\hat{Y}_{n+\tau} - Y_{n+\tau}$  ее выражение из (4.97):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)} &= \mathbf{E}\{[(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)X_{n+\tau} - \varepsilon_{n+\tau}][(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)X_{n+\tau} - \varepsilon_{n+\tau}]'\} = \\ &= \mathbf{E}\{[(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)X_{n+\tau}X'_{n+\tau}(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)'] + \mathbf{E}(\varepsilon_{n+\tau}\varepsilon'_{n+\tau}) - \\ &\quad - \mathbf{E}[\varepsilon_{n+\tau}X'_{n+\tau}(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)'] - \\ &\quad - \mathbf{E}[(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)X_{n+\tau}\varepsilon'_{n+\tau}]\}. \end{aligned} \quad (4.61')$$

Два последних члена в правой части этого выражения равны нулю. Действительно, рассмотрим, например, произведение  $\varepsilon_{n+\tau} \cdot [X'_{n+\tau} \times (\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)']$ . Его первый сомножитель ( $\varepsilon_{n+\tau}$ ) не коррелирован со вторым, так как  $\varepsilon_{n+\tau}$  не коррелированы и с предопределенными переменными  $X'_{n+\tau}$  (по условию), и с  $(\hat{\Pi} - \Pi)'$ , так как последнее выражение зависит только от *прошлых* (по отношению к моменту времени  $n + \tau$ ) наблюдаемых значений  $x_t^{(j)}$  и  $y_t^{(l)}$  ( $j = 1, 2, \dots, k; l = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, n$ ), см. формулу (4.95). А по условию случайные возмущения приведенной формы не коррелированы ни с предопределенными, ни с лагированными (т. е. измеренными в прошлом) значениями эндогенных переменных. В точности те же доводы относятся и к последнему члену

правой части соотношения (4.98'). Таким образом, получаем:

$$\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)} = \mathbf{E}[(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)X_{n+\tau}X'_{n+\tau}(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)'] + \Sigma_{\varepsilon}, \quad (4.103)$$

где  $\Sigma_{\varepsilon} = \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon'_t) = \mathbf{E}(\varepsilon_{n+\tau} \varepsilon'_{n+\tau})$  — ковариационная матрица остатков приведенной формы (она по условию не зависит от  $t$ );  $s_{ij} = \text{cov}(\varepsilon_t^{(i)} \times \varepsilon_t^{(j)}) = \mathbf{E}(\varepsilon_t^{(i)} \varepsilon_t^{(j)})$  —  $(i, j)$ -й элемент этой матрицы.

2) Займемся теперь приведением первого слагаемого правой части (4.103) к «работоспособному» виду, т.е. постараемся выразить его в терминах имеющихся у нас наблюдений. С этой целью вернемся к оценке  $\hat{\Pi}_{\text{МНК}}$  и подставим в правую часть соотношения (4.95) матрицу  $\mathbf{Y}$ , выраженную в терминах приведенной формы анализируемой модели, т.е.  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Pi' + \varepsilon$ , где матрица  $\varepsilon$  составлена из столбцов  $\varepsilon^{(i)} = (\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \dots, \varepsilon_n^{(i)})'$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\text{МНК}} &= \mathbf{Y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}\Pi' + \varepsilon)'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \\ &= \Pi\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \varepsilon'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \Pi + \varepsilon'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi = \varepsilon'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \quad (4.104)$$

Подставим это выражение в первое слагаемое правой части (4.103) и попробуем упростить получившееся выражение с учетом представления матрицы  $\varepsilon$  в виде  $\varepsilon = (\varepsilon(1) : \varepsilon(2) : \dots : \varepsilon(m))$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)X_{n+\tau}X'_{n+\tau}(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)'] &= \\ &= \mathbf{E}[\varepsilon'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}X_{n+\tau}X'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon] = \\ &= \mathbf{E} \left( \begin{array}{cccc} \varepsilon'(1)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(1) & \varepsilon'(1)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(2) & \dots & \varepsilon'(1)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(m) \\ \varepsilon'(2)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(1) & \varepsilon'(2)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(2) & \dots & \varepsilon'(2)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon'(m)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(1) & \varepsilon'(m)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(2) & \dots & \varepsilon'(m)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(m) \end{array} \right), \quad (4.105) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{M} = X'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$  — строка длины  $n$  (т.е. матрица размерности  $(1 \times n)$ ). Заметим, что все блоки матрицы, стоящей в правой части (4.105), являются *числами*, или, формально, матрицами размерности  $1 \times 1$ . А такие матрицы равны своему следу. Мы воспользуемся этим при вычислении блоков правой части (4.105), а также известным свойством коммутативности при вычислении следа произведения квадратных матриц (т.е.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , см. Приложение П2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varepsilon'(i)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(j)) &= \mathbf{E}[\text{tr}(\varepsilon'(i)\mathbf{M}'\mathbf{M}\varepsilon(j))] = \\ &= \mathbf{E}[\text{tr}(\mathbf{M}\varepsilon(j)\varepsilon'(i)\mathbf{M}')] = \text{tr}\{\mathbf{M}[\mathbf{E}(\varepsilon(j)\varepsilon'(i))]\mathbf{M}'\} = \\ &= \text{tr}(\mathbf{M}\text{cov}(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)})\mathbf{I}_n\mathbf{M}') = \text{cov}(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)}) \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}') = \end{aligned}$$

При выводе (4.106) мы воспользовались также следующими фактами:

- (i) значения  $\mathbf{M}$  неслучайны, так как выражаются только через наблюдаемые в прошлом и заданные на прогнозируемый момент значения предикторных переменных;
- (ii)  $\mathbf{M}\mathbf{M}' = [\mathbf{X}'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'][\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+\tau}] = \mathbf{X}'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \times \mathbf{X}_{n+\tau}$ ;

$$(iii) \mathbf{E}(\varepsilon^{(j)}\varepsilon'^{(i)}) = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(j)} \varepsilon_1^{(i)} & \varepsilon_1^{(j)} \varepsilon_2^{(i)} & \dots & \varepsilon_1^{(j)} \varepsilon_n^{(i)} \\ \varepsilon_2^{(j)} \varepsilon_1^{(i)} & \varepsilon_2^{(j)} \varepsilon_2^{(i)} & \dots & \varepsilon_2^{(j)} \varepsilon_n^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_n^{(j)} \varepsilon_1^{(i)} & \varepsilon_n^{(j)} \varepsilon_2^{(i)} & \dots & \varepsilon_n^{(j)} \varepsilon_n^{(i)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{cov}(\varepsilon^{(j)}, \varepsilon^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{cov}(\varepsilon^{(j)}, \varepsilon^{(i)}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \text{cov}(\varepsilon^{(j)}, \varepsilon^{(i)}) \end{pmatrix} = s_{ij}\mathbf{I}_n,$$

где  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица ( $n \times n$ ) (в данных выкладках использовались модельные допущения о равенстве нулю ковариаций вида  $\text{cov}(\varepsilon_{t_1}^{(i)}, \varepsilon_{t_2}^{(j)})$  при  $t_1 \neq t_2$ , а также независимость ковариаций  $\text{cov}(\varepsilon_t^{(i)}, \varepsilon_t^{(j)})$  от времени  $t$ ).

3) Теперь вернемся к матрице (4.103), подставим в нее правую часть (4.105) (с учетом (4.106)) и получим окончательный вид для матрицы  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$ . Действительно, после подстановки в правую часть (4.105) элементов этой матрицы, выраженных соотношениями (4.106), имеем:

$$\mathbf{E}[(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)\mathbf{X}_{n+\tau}\mathbf{X}'_{n+\tau}(\hat{\Pi}_{\text{МНК}} - \Pi)'] = \mathbf{X}'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+\tau}\Sigma_{\varepsilon}, \quad (4.107)$$

где матрица  $\Sigma_{\varepsilon}$  составлена из элементов  $s_{ij} = \text{cov}(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)})$ . Подставляя (4.107) в правую часть (4.103), получаем:

$$\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)} = [1 + \mathbf{X}'_{n+\tau}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+\tau}]\Sigma_{\varepsilon}. \quad (4.108)$$

4) Несмещенная оценка  $\hat{\Sigma}_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$  матрицы  $\Sigma_{\hat{\varepsilon}(\tau)}$  получается подстановкой в правую часть (4.108) вместо теоретической ковариационной матрицы  $\Sigma_{\varepsilon}$  ее несмещенной оценки (4.100). Вывод формулы (4.99) закон-

#### 4.4.7. Некоторые общие подходы к анализу точности оценивания и к сравнению методов и моделей

подавляющее большинство методов и моделей эконометрики базируется, как мы видели, на математическом аппарате *многомерного статистического анализа*. Соответственно, «болевы точки», «узкие места», словом, главные трудности этого аппарата как бы ретранслируются на эконометрический инструментарий. Среди этих главных трудностей в первую очередь следует упомянуть о проблемах, вынесенных в заглавие данного пункта учебника. Действительно, мы неоднократно видели, как непросто достаются результаты, связанные с *аналитическим* выводом характеристик точности статистически построенных методов и моделей, их прогностической силы (вывод формулы (4.99) в конце предыдущего пункта — последнее тому доказательство). Более того, даже тогда, когда нам удастся аналитический способ исследования качества методов статистического оценивания неизвестных значений параметров модели и построенных на их основе прогнозов, следует помнить, что, как правило, полученные результаты имеют *асимптотический* (по  $n \rightarrow \infty$ ) характер (свойство состоятельности оценок, например, или асимптотический вид ковариационных матриц и т. п.). В эконометрической же практике работают с *конечными* выборками (т. е. при существенно ограниченных  $n$ ), и поэтому *важно уметь проанализировать свойства различных способов оценивания и различных методов прогнозирования в условиях относительно малых выборок*. К сожалению, как правило, это не удастся сделать с помощью аналитических методов и приходится прибегать к разного рода *имитационно-компьютерным экспериментам*.

Ниже мы кратко остановимся на описании трех наиболее распространенных в эконометрической практике подходах такого типа.

**Метод Монте-Карло статистических испытаний.** Сущность метода статистических испытаний заключается в следующем. В компьютер закладываются все параметры анализируемой стохастической модели, после чего компьютер с помощью специальных датчиков случайных чисел *генерирует требуемое число выборок заданного объема*, которые, соответственно, интерпретируются как *наблюдения, произведенные над данной моделью*. Затем эти выборки используются в той статистической процедуре (в статистическом оценивании параметров анализируемой модели, в построении различного рода прогнозов и т. п.), качество которой мы хотим исследовать. Наличие большого числа сгенерированных компьютером выборок заданного объема  $n$  позволяет исследовать поведение интересующих нас выходных характеристик анализируемой процедуры (оценок  $\hat{\Theta}(n)$  или прогнозов  $\hat{Y}_t$  в  $t$ -м периоде).



редь, оценить их смещение и среднеквадратическую ошибку. Конечно, результаты такого исследования как бы «условно-локальны», т. е. зависят от тех численных значений параметров модели, которые мы заложили в компьютер и которые, соответственно, определяют специфику сгенерированных «наблюдений». Однако подобные эксперименты, проведенные в большом объеме и в широком диапазоне значений закладываемых в компьютер параметров, способны доставить исследователю ценную информацию.

Конкретизируем описанную процедуру применительно к анализу методов оценивания параметров СОУ и точности построенных на основании этой модели прогнозов. Итак, зададимся:

- 1) структурными параметрами СОУ, т. е. числом уравнений эндогенных переменных  $m$ , а также числом predetermined переменных  $k$ ;
- 2) конкретными значениями параметров  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  структурной формы;
- 3) вероятностными распределениями возмущений  $\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, \dots, \delta_t^{(m)}$  структурной формы;
- 4) требуемым объемом генерируемых выборок  $n$ ;
- 5) конкретными «наблюденными» значениями predetermined переменных  $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)}$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ ;
- 6) значениями predetermined переменных в прогнозный период времени (при анализе качества прогноза).

После этого:

- 7) с помощью компьютерного датчика случайных чисел моделируются случайные остатки  $\delta_t^{(1)}, \delta_t^{(2)}, \dots, \delta_t^{(m)}$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ ;
- 8) в соответствии с соотношениями приведенной формы  $Y_t = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} X_t + \mathbf{B}^{-1} \Delta_t$  вычисляются значения  $Y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ .

В результате п. 1)–8) сгенерирована 1-я выборка объема  $n$ :  $\{\mathbf{X}(1), \mathbf{Y}(1)\}$ .

Затем п. 7)–8) повторяются еще  $N - 1$  раз, в результате чего получаем еще  $N - 1$  выборок того же самого объема из той же самой генеральной совокупности (т. е. для той же самой модели).

Таким образом, в нашем распоряжении оказываются  $N$  выборок объема  $n$ , сгенерированных в рамках одной и той же модели:

По «наблюдениям» каждой ( $j$ -й) выборки строим интересующие нас выходные характеристики анализируемой процедуры (оценки параметров  $\hat{\mathbf{B}}(j)$ ,  $\hat{\mathbf{C}}(j)$ , прогнозы  $\hat{Y}_{n+\tau}(j)$  и т. п.). Сравниваем полученные оценки  $\hat{\mathbf{B}}(j)$ ,  $\hat{\mathbf{C}}(j)$  и прогнозы  $\hat{Y}_{n+\tau}(j)$  с имеющимися у нас истинными значениями, соответственно,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $Y_{n+\tau}$ : оцениваем среднюю (по всем выборкам) величину смещения, среднеквадратическую ошибку и другие интересующие нас характеристики качества анализируемой процедуры.

Проиллюстрируем применение метода Монте-Карло на примере.

**Пример 4.7** (заимствован из: *Simister L. T. Monte Carlo Studies of Simultaneous Equations System. Ph. D Thesis, University of Manchester, 1969*). Автор этой работы исследовал с помощью метода Монте-Карло влияние различных способов спецификации структурных остатков  $\delta_t^{(i)}$  системы из двух уравнений ( $i = 1, 2$ ) на точность прогноза, осуществляемого разными методами. Из методов, описанных выше в данной главе, сравнивались три процедуры:

- *МНК*, непосредственно примененный для оценивания параметров  $\beta$  и  $c$  каждого из двух структурных уравнений; затем на основании соотношения (4.46) определялись оценки параметров приведенной формы и строился прогноз для  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$  по формуле (4.96);
- *МНК без ограничений (МНК БО)* применялся непосредственно для оценивания параметров  $\pi$  приведенной формы, после чего строился прогноз для  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$  по формуле (4.96);
- *2МНК*, с помощью которого оценивались параметры структурной формы, по ним (с помощью (4.46)) — параметры приведенной формы, а затем строился прогноз по формуле (4.96).

В качестве возможных спецификаций структурных возмущений  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$  рассматривались четыре варианта:

- (i)  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$  ( $t = 1, 2, \dots, n$ ) образуют белый шум;
- (ii)  $\delta_t^{(1)}$  связаны автокорреляцией 1-го порядка с параметром  $\rho_1 = r(1) = 0,9$ , а  $\delta_t^{(2)}$  связаны автокорреляцией 1-го порядка с параметром  $\rho_2 = r(1) = 0,225$ ;
- (iii) на стандартные возмущения ( $i$ ) накладываются ошибки в измерении переменных модели (вариации ошибок составляли 10% и

- (iv) на случайные возмущения марковского типа (ii) накладываются ошибки (iii) в измерении анализируемых переменных.

В табл. 4.9 приведены результаты оценки с помощью метода Монте-Карло среднеквадратических ошибок прогнозов значений переменных  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$  для различных сочетаний «метод оценивания — вариант спецификации структурных возмущений модели». Величина среднеквадратической ошибки прогноза, получаемой при оценивании параметров модели с помощью 2МНК при спецификации остатков типа (i), принята за эталонную единицу в сравнении различных методов.

**Таблица 4.9.** Среднеквадратические ошибки прогнозов  $\hat{y}_{n+\tau}^{(1)}$  и  $\hat{y}_{n+\tau}^{(2)}$  при различных методах оценивания параметров модели

Метод оценивания	При прогнозе $y^{(1)}$				При прогнозе $y^{(2)}$			
	Вариант спецификации возмущений $\delta_t^{(1)}$				Вариант спецификации возмущений $\delta_t^{(2)}$			
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
2МНК	$\Delta$	1,47 $\Delta$	1,83 $\Delta$	2,25 $\Delta$	$\Delta'$	1,86 $\Delta'$	3,1 $\Delta'$	2,98 $\Delta'$
МНК	3,59 $\Delta$	1,36 $\Delta$	2,39 $\Delta$	2,74 $\Delta$	12,32 $\Delta'$	1,64 $\Delta'$	8,4 $\Delta'$	8,12 $\Delta'$
МНК БО	1,13 $\Delta$	2,98 $\Delta$	3,86 $\Delta$	2,36 $\Delta$	1,17 $\Delta'$	2,44 $\Delta'$	5,53 $\Delta'$	3,06 $\Delta'$

Из анализа табл. 4.9 следует, что 2МНК оказался самым точным во всех ситуациях, кроме случая автокоррелированных возмущений  $\delta_t^{(1)}$  и  $\delta_t^{(2)}$ . В последнем случае несколько неожиданно лучше других проявил себя обыкновенный метод наименьших квадратов, примененный в отдельности к каждому из двух уравнений структурной формы.

**Бутстреп-метод тиражирования наблюдений.** Этот метод получил весьма широкое распространение в последние три десятилетия в задачах статистического анализа, основанного на относительно малых выборках. Заложенная в его основание идея внешне выглядит несколько странной: метод предлагает тиражировать уже имеющиеся в нашем распоряжении наблюдения, генерируя их, как и в методе Монте-Карло, с помощью специальных компьютерных датчиков случайных чисел. Однако в методе Монте-Карло эти датчики «настраиваются» на экзогенно заданные параметры модели (там мы «на старте» не имели никаких наблюдений), в то время как в *бутстреп-процедурах* «настройка» датчиков определяется структурой и спецификой уже имеющейся в нашем распоряжении выборки. Грубо говоря, схема действия бутстреп-процедуры заключается в следующем: по имеющейся выборке строится некоторая оценка (параметрическая или непараметрическая) закона распределения анализируемой генеральной совокупности, а затем генерируются (в необходимом количестве) наблюдения, полученные из

этому закону распределения вероятностей. Как обрабатываются полученные таким образом «наблюдения» и какие с их помощью решаются задачи оценки качества модели или прогноза — это предмет для специального обсуждения, и мы оставляем его за рамками данного учебника<sup>21</sup>.

**Перекрестный анализ дееспособности модели** (или ПАД-процедура)<sup>22</sup>. Идеи этого подхода были сформулированы достаточно давно, однако высокую прикладную значимость и популярность различные версии ПАД-процедур обрели лишь с появлением современных вычислительных мощностей. Их сущность заключается в следующем.

Пусть мы решаем **проблему подбора модели** по имеющимся в нашем распоряжении исходным статистическим данным, *но не уверены в ее общем виде, в ее структуре*. Так, если речь идет о подборе регрессионной модели, то мы не знаем, является ли она линейной, степенной или еще какой-нибудь, нужно ли проводить линеаризующие преобразования переменных, каким выбрать значение «гребневого» параметра в методе ридж-регрессии и т. д. Если речь идет о модели временных рядов, то мы обычно испытываем затруднения в выборе структурных параметров  $p, q$  и  $k$  АРСС-моделей (см. п. 10.5.3 в [Айвазян (2010)]), параметров адаптации (сглаживания)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  в различных процедурах экспоненциального сглаживания (см. п. 10.6.2 в [Айвазян (2010)]) или параметров дисконтирования  $\lambda$  или  $\gamma$  в моделях распределенных лагов с геометрической структурой (см. п. 4.6 в данном учебнике). Аналогичные вопросы, связанные с подбором значений некоторых *свободных* (или *структурных*) параметров модели, возникают при построении и исследовании моделей дискриминантного или факторного анализа, систем одновременных уравнений и т. д. При этом под *свободными* (*структурными*) параметрами модели  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  мы в общем случае бу-

<sup>21</sup>Интересующемуся этой проблематикой читателю мы можем порекомендовать, например, книгу: *Б. Эфрон*. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. Пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1988.

<sup>22</sup>Здесь предложен вариант перевода английского названия этого подхода, впервые достаточно полно описанного как «*Cross-validation method*», по-видимому, в англо-язычной специальной литературе (см., например: *Stone C. Cross-validated choice and assesment of statistical predictions // Journ. Roy. Stat. Soc. Ser. B. Vol. 36 (1974). P. 111–147*). К сожалению, нет единой точки зрения на состав методов, объединяемых этим названием. Некоторые специалисты включают в рамки этого подхода и бутстреп-метод, и различные варианты метода «скользящего экзамена», который упоминается в п. 6.4 учебника (см.: *Hinkley D. V. Jackknife, bootstrap and other cross-validation methods. London; New York : Chapman and Hall, 1983*). Нам представляется, что из методических соображений удобнее несколько сузить столь широкое толкование «*Cross-validation*», акцентируя внимание на *многократных вычислительных «прогонах» уже оцененных моделей при различных вариантах значений* Скопировано с сайта <http://www.ips.uva.nl/> Разработка электронных библиотек <http://www.ips.uva.nl/> <http://www.ips.uva.nl/> <http://www.ips.uva.nl/>

дем понимать параметры, от которых зависит общий вид (структура) модели, но для которых не существует математически корректных процедур статистического оценивания. И пусть существует некоторый экзогенно заданный критерий качества модели

$$K(\Lambda; \hat{\Theta}; \mathbf{X}_{\text{экз}}), \quad (4.109)$$

значение которого зависит от значений использованных в модели свободных параметров  $\Lambda$ , статистических оценок неизвестных параметров модели  $\hat{\Theta}$  и состава «экзаменующей выборки»  $\mathbf{X}_{\text{экз}}$ , т. е. от состава тех экспериментальных (наблюдаемых) данных, на которых была проведена верификация построенной модели. В моделях регрессии и временных рядов в качестве критерия  $K$  чаще других используется среднеквадратическая ошибка прогноза, в моделях дискриминантного и кластерного анализов — доля неправильно расклассифицированных наблюдений из состава  $\mathbf{X}_{\text{экз}}$  и т. п.

Тогда общую схему процедуры перекрестного анализа дееспособности модели можно описать в виде реализации следующих двух этапов.

1-й этап. Все имеющиеся в нашем распоряжении наблюдения  $\mathbf{X}$  (исходные статистические данные, результаты эксперимента) случайным образом разбиваются на две части  $\mathbf{X}_{\text{об}}$  и  $\mathbf{X}_{\text{экз}}$ . Первая из них ( $\mathbf{X}_{\text{об}}$ ) используется для подбора («настройки») модели. Этот подбор обязательно включает в себя определение значений свободных параметров  $\Lambda$  и, если необходимо, статистическое оценивание параметров  $\Theta$ . Поэтому эту часть исходных статистических данных называют обычно «обучающей выборкой» (хотя, строго говоря, это может не совпадать с классическим понятием обучающей выборки, принятым в математической статистике). Данная стадия процедуры, в частности, включает в себя выдвижение и предварительную проверку рабочих гипотез о структуре модели, перебор различных вариантов моделей в целях «нащупывания» относительно устойчивых результатов и т. п. При этом перебор различных вариантов модели обычно включает в себя задание некоторой сетки возможных значений структурных параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и проведение полного цикла всех необходимых вычислений по идентификации модели для каждого фиксированного сочетания этих значений (т. е. оценку параметров  $\Theta$  и т. п.).

2-й этап. На этой стадии каждый из вычисленных на предыдущем этапе вариантов модели верифицируется (с помощью критерия (4.109) на данных «экзаменующей выборки»  $\mathbf{X}_{\text{экз}}$ ). Поскольку модели «настраивались» на данных  $\mathbf{X}_{\text{об}}$ , очевидно, значения критерия качества на данных  $\mathbf{X}_{\text{экз}}$  будут существенно менее оптимистичными, чем на данных  $\mathbf{X}_{\text{об}}$ . Из всех возможных значений структурных параметров  $\Lambda$  вы-

бирается такое  $(\Lambda_0)$ , при котором значение критерия  $K(\Lambda_0; \hat{\Theta}; \mathbf{X}_{\text{ЭКЗ}})$  оптимально. Заметим, что в современных процедурах метода ПАД при делении массива исходных данных  $\mathbf{X}$  на  $\mathbf{X}_{\text{Об}}$  и  $\mathbf{X}_{\text{ЭКЗ}}$  действуют так же, как и в методах скользящего экзамена (и в частности, в методе «складного ножа» — «jackknife», см. п. 6.4 в [Айвазян (2010)]): в составе  $\mathbf{X}_{\text{ЭКЗ}}$  оставляют *единственный* элемент, по остальным данным подбирают модель и вычисляют значение критерия  $K$  в этой единственной точке; затем в качестве  $\mathbf{X}_{\text{ЭКЗ}}$  берут другой элемент из  $\mathbf{X}$  и т.д. до тех пор, пока роль единственной «экзаменующей» точки не исполнят поочередно все элементы из массива исходных статистических данных  $\mathbf{X}$ . «Настройка» модели на обучающих данных  $\mathbf{X}_{\text{Об}}$  и последующая *перекрестная «перепроверка»* (верификация) модели на других (экзаменующих) данных  $\mathbf{X}_{\text{ЭКЗ}}$  с неперменным многовариантным перебором значений структурных параметров на 1-й стадии процедуры — в этом и состоит сущность метода перекрестного анализа дееспособности модели (кстати, в некоторых переведенных с английского на русский язык работах, относящихся к данной тематике, метод «Cross-validation» переведен как «перепроверка», см., например, упомянутую выше книгу Б. Эфрона).

## 4.5. Коинтеграция

Анализ связей, существующих между нестационарными временными рядами, может приводить к так называемым *ложным регрессиям*. В целях «остационаривания» таких рядов обычно используются следующие подходы:

- *исключение неслучайной составляющей («детрендирование»);* главным недостатком этого подхода является его неприменимость по отношению к временным рядам, природа нестационарности которых заключается не только в наличии неслучайной составляющей;
- *переход к последовательным разностям анализируемого временного ряда;*

к основным недостаткам этого подхода можно отнести:

- чувствительность к компонентам краткосрочного шума;
- тот факт, что это может приводить к смещенным оценкам в случае, если временные ряды имеют так называемое *долгосрочное равновесие*.

Granger (1987)]. Идея коинтеграции состоит в том, что две или более переменных могут изменяться синхронно так, что их разность (или, в более общем случае, некоторая линейная функция) является стационарным процессом (см. рис. 4.7, 4.8). В этом случае временные ряды называют *коинтегрированными*.

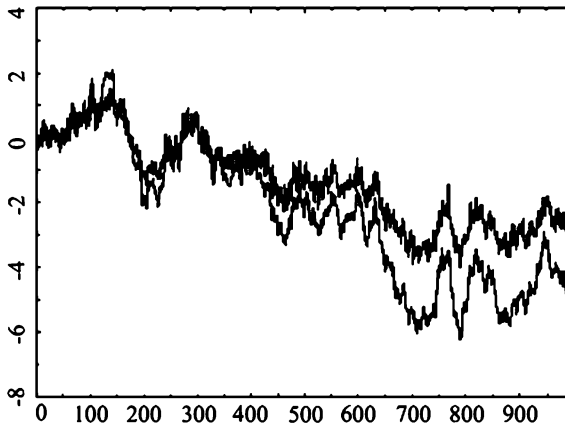


Рис. 4.7. Коинтегрированные временные ряды

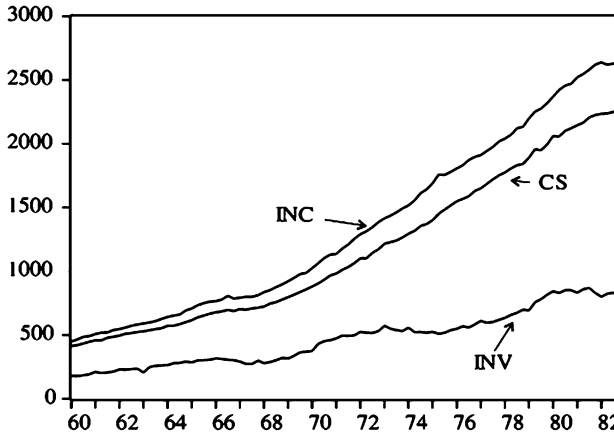


Рис. 4.8. Потребление, инвестиции, доходы в США

Коинтеграция может быть интерпретирована как статистическое выражение для природы равновесного соотношения: например,  $Y_{1t}$  и  $Y_{2t}$  могут быть связаны некоторым долгосрочным соотношением, от которого эти временные ряды могут отклоняться в краткосрочной перспективе, но к которому должны возвращаться в долгосрочной перспективе. Если переменные безгранично расходятся (т. е. имеют нестационарные остатки), то говорят, что отсутствует равновесное соотношение. Примерами возможной коинтеграции являются:

- цены акций и дивиденды;
- обменные курсы и уровни внутренних, внешних цен;
- долгосрочные и краткосрочные процентные ставки;
- деньги, уровень цен и доход;

Более формальное определение коинтеграции представлено ниже:

**Определение 4.17** (коинтеграция по Энглу — Гранжеру). Компоненты многомерных временных рядов  $Y_t$  размерности  $m \times 1$  являются коинтегрированными порядка  $(d, b)$  (это обозначается  $Y_t \sim CI(d, b)$ ,  $b$  и  $d$  — некоторые неотрицательные целые числа), если

- все компоненты  $Y_t$  являются рядами интегрируемости порядка  $d$ , т. е.  $Y_{jt} \sim I(d)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
- существует вектор  $\gamma$  (коинтегрирующий вектор) размерности  $m \times 1$ , для которого линейная комбинация

$$Z_t = \gamma' Y_t \sim I(d - b), \quad 0 < b \leq d,$$

т. е. ряд  $Z_t$  имеет интегрируемость порядка  $d - b$ .

(определение понятия порядка интегрируемости одномерного нестационарного ряда см. в сноске 5 в п. 4.3.5).

В качестве типичного примера коинтегрированных временных рядов можно привести ряды

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \beta Y_{2t} + u_{1t}, \\ Y_{2t} &= Y_{2,t-1} + u_{2t}, \end{aligned}$$

где  $u_{1t}$  и  $u_{2t}$  — некоррелированные процессы, каждый из которых является белым шумом. Линейная комбинация этих двух интегрированных переменных может быть стационарным процессом. Очевидно  $Y_{1t} \sim I(1)$ ,  $Y_{2t} \sim I(1)$ , тогда  $u_{1t} = Y_{1t} - \beta Y_{2t} \sim I(0)$ , так что  $Y_{1t}$  и  $Y_{2t}$  оказываются коинтегрированными.

Типичным примером подбора вектора  $\gamma$  при  $Y_{1t} \sim I(1)$  и  $Y_{2t} \sim I(1)$  является:

$$\gamma = (1, -\beta)' \Rightarrow \gamma' Y_t = Y_{1t} - \beta Y_{2t} = u_{1t} \sim \text{белый шум.}$$

Альтернативным и более гибким для работы определением является определение, данное в работе [Lütkepohl (1993)]:



процесс  $Y_t$  размерности  $m \times 1$  называется интегрированным порядка  $d$ ,  $Y_t \sim I(d)$ , если его разность  $d$ -го порядка,  $\Delta^d Y_t$ , является стационарным процессом, а разность  $d-1$ -го порядка,  $\Delta^{d-1} Y_t$ , нестационарным.  $I(d)$ -процесс  $Y_t$  называют коинтегрированным, если существует линейная комбинация  $Z_t = \gamma' Y_t$ , которая является интегрированным процессом с порядком, меньшим, чем  $d$ .

Заметим, что второе определение не требует, чтобы все элементы  $Y_t$  являлись интегрированными порядка  $d$ , но если лишь одна из компонент является  $I(d)$ , а все другие являются интегрированными процессами порядка, не превосходящего  $d$  (например,  $I(0)$ ), тогда многомерный процесс будет  $I(d)$ .

#### 4.5.1. Представление коинтегрированных систем

В этом разделе мы предположим, что процесс  $Y_t$  размерности  $m \times 1$  является коинтегрированным. Рассмотрим различные эквивалентные представления для такой системы. Эти представления позволят нам более глубоко взглянуть на динамику системы.

#### Многомерное разложение Бевриджа — Нельсона

Далее мы рассмотрим случай, когда векторный процесс  $Y_t$  размерности  $m \times 1$  является  $I(1)$  и сгенерирован при помощи векторной модели скользящего среднего бесконечного порядка (в англоязычной версии — *Vector Moving Average Model* ( $\infty$ ), или  $VMA(\infty)$ -модель) для первых разностей  $\Delta Y_t$ ,

$$\Delta Y_t = \delta + u_t = \delta + \Psi(L)\varepsilon_t, \quad (4.110)$$

где  $u_t$  имеет нулевое среднее и является  $I(0)$ , а  $\delta = \mathbf{E}(\Delta Y_t)$  — вектор констант. Кроме того, отметим, что линейный процесс  $u_t$  с нулевым средним является  $VMA(\infty)$ -процессом

$$u_t = \Psi(L)\varepsilon_t, \quad \Psi(L) = \Psi_0 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \dots,$$

если выполняются следующие два условия:

$$\text{матрица } \Psi(1) = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \dots \neq \mathbf{0}_{m \times m} \quad (4.111)$$

(но не обязательно полного ранга) и

$$\text{матрицы } \Psi_j = \{\psi_{j,kl}\} \text{ суммируемы первого порядка,}$$

что означает:  $\sum_{j=0}^{\infty} j |\psi_{j,kl}| < \infty$  для всех  $k, l = 1, \dots, m$ . Причину включения последнего предположения мы увидим позже.

Запишем модель для  $Y_t$  в виде:

$$Y_t = Y_0 + \delta t + \sum_{s=0}^t u_s. \quad (4.112)$$

Пользуясь соотношением:  $\Psi(L) = \Psi(1) + \Delta\alpha(L)$ , где

$$\alpha(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j L^j,$$

$$\alpha_j = -(\Psi_{j+1} + \Psi_{j+2} + \dots) \text{ для } j = 0, 1, \dots,$$

мы можем записать:

$$u_t = \Psi(L)\varepsilon_t = \Psi(1)\varepsilon_t + \eta_t + \eta_{t-1}, \quad (4.113)$$

где  $\eta_t = \alpha(L)\varepsilon_t$  — это  $I(0)$ -процесс с нулевым средним, а  $\alpha(L)$  абсолютно суммируемо. Если мы заменим  $u_t$  в (4.112) на (4.113), то получим многомерное разложение Бевеиджа — Нельсона.

**Определение 4.18** (многомерное разложение Бевеиджа — Нельсона). Пусть  $Y_t$  описывается (4.110), тогда  $Y_t$  может быть представлено в виде:

$$Y_t = \underbrace{\delta \cdot t}_{\text{детерминированный тренд}} + \underbrace{\Psi(1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t)}_{\text{стохастический тренд}} + \underbrace{\eta_t}_{\text{стационарный процесс}} - \underbrace{\eta_0 + Y_0}_{\text{начальные условия}}, \quad (4.114)$$

где:

$$\Psi(1) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j,$$

$$\eta_t = \alpha(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j},$$

$$\alpha_j = -(\Psi_{j+1} + \Psi_{j+2} + \Psi_{j+3} + \dots)$$

а существование  $\alpha_j$  обеспечивается неравенством  $\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot |\Psi_{j \cdot kl}| < \infty$ , справедливым при всех  $k, l = 1, \dots, m$ . Представление многомерного ряда  $Y_t$  в виде (4.114) называется многомерным разложением Бевеиджа — Нельсона.

Таким образом, если  $\Psi(1) = \mathbf{0}$ , тогда в уравнении (4.114) исчезает стохастический тренд и процесс  $Y_t$  не будет  $I(1)$ .

Если  $(m \times 1)$ -мерный процесс  $Y_t$  является коинтегрированным с помощью  $h$  коинтегрирующих соотношений, определенных в форме  $(m \times h)$  матрицы  $\Gamma$ , тогда  $(h \times 1)$ -мерный процесс  $\Gamma'Y_t$  является *тренд-стационарным*, т. е. стационарным с точностью до наличия неслучайной составляющей. Для того чтобы увидеть это, умножим слева обе части (4.114) на  $\Gamma'$ , получим:

$$\Gamma'Y_t = \Gamma'\delta \cdot t + \Gamma'\Psi(1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t) + \Gamma'\eta_t + \Gamma'(Y_0 - \eta_0).$$

Из полученного выражения для  $\Gamma'Y_t$  следует, что  $\Gamma'Y_t$  —  $h \times 1$ -мерный процесс. Более того, мы можем получить необходимое условие для коинтегрируемости:

$$\Gamma'\Psi(1) = \mathbf{0}, \quad (4.115)$$

которое обеспечивает исчезновение стохастического тренда. К сожалению, при отсутствии стохастического тренда процесс не всегда является стационарным, поскольку начальное условие  $\Gamma'(Y_0 - \eta_0)$  может быть коррелировано с  $\Gamma'\eta_t$ . Процесс будет тренд-стационарным только в случае, если  $\Gamma'(Y_0 - \eta_0) = \mathbf{0}$ . Далее мы будем предполагать, что начальное значение  $Y_0$  может быть выбрано таким образом, что либо выполняется равенство  $\Gamma'(Y_0 - \eta_0) = \mathbf{0}$ , либо не возникает проблема корреляции. Для стационарности необходимо предположить, что  $\Gamma'$  выбрано таким образом, что выполняется следующее условие:

$$\Gamma'\delta = \mathbf{0}. \quad (4.116)$$

Отметим, что ненулевые элементы матрицы  $\Gamma$  коинтегрирующих векторов  $\Gamma$  определяют то, какие элементы  $Y_t$  являются частью коинтегрирующего соотношения. Если  $Y_t$  коинтегрирован, то может существовать несколько линейно независимых коинтегрирующих векторов. Их число  $h$  называют *коинтеграционным рангом*. Пространство, натянутое на коинтегрирующие вектора (множество точек в  $\mathbb{R}^m$ , принадлежащих линейному подпространству, составленному из линейных комбинаций коинтегрирующих векторов), называют *коинтеграционным пространством*.

Более того, отметим, что из уравнения (4.115) следует, что  $h$  строк матрицы  $\Psi(1)$  линейно зависимы. Поэтому детерминант  $\Psi(L)$  равен нулю при  $L = 1$ , т. е.

$$\det(\Psi(1)) = 0, \quad (4.117)$$

а ранг  $\Psi(1)$  равен  $m - h$ ,

Это означает, что коинтеграционный ранг может быть вычислен как  $m - \text{rank}[\Psi(1)]$ .

Важным следствием условия (4.117) является то, что  $\Psi(L)$  необратим: таким образом, коинтегрированная система  $Y_t$  никогда не может быть представлена процессом векторной авторегрессии конечного порядка, VAR( $p$ )-процессом. Поэтому, если нам дан вектор интегрированных временных рядов  $Y_t$ , о которых мы знаем, что они коинтегрированы, то специфицирование первых разностей  $\Delta Y_t$  в качестве VAR( $p$ )-процесса является некорректным.

Кроме того, из условий (4.115) и (4.116) следует, что  $\delta$  должно быть линейной комбинацией столбцов матрицы  $\Psi(1)$ . Это означает, что ранг матрицы, составленной из  $\delta$  и  $\Psi(1)$ , равен  $m - h$ ,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \delta \\ \Psi(1) \end{bmatrix} = m - h,$$

т. е. коинтеграционный ранг равен  $h$ .

Следующее следствие состоит в том, что коинтеграционный ранг никогда не может быть равным  $m$ , так как иначе  $\text{rank}[\Psi(1)] = 0$  и в этом случае  $\Psi(1) = 0$ , что противоречит условию (4.111).

Наконец, рассмотрим ковариационную матрицу для  $\Delta Y_t$ , которая может быть найдена с использованием уравнения:

$$\Delta Y_t = \delta + \Psi(L)\varepsilon_t$$

и выражения для  $\Psi(1)$ . Таким образом, ковариационная матрица для  $\Delta Y_t$  определяется выражением:

$$\Sigma_{\Delta Y_t} = \Psi(L)\Omega\Psi'(L) = \Psi(1)\Omega\Psi'(1),$$

где  $\Omega$  — ковариационная матрица  $\varepsilon_t$ .

Если  $Y_t$  является коинтегрируемым векторным процессом, то детерминант матрицы  $\Psi(1)$  равен нулю (см. (4.117)), поэтому детерминант матрицы  $\Sigma_{\Delta Y_t}$  также равен нулю. Это означает, что ковариационная матрица  $\Delta Y_t$  является сингулярной. Отсюда следует: *коинтеграция и ковариационная матрица VMA( $\infty$ )-процесса  $\Delta Y_t$  является положительно определенной тогда и только тогда, когда  $Y_t$  не является коинтегрируемым векторным процессом.*

Перед тем как продолжить изложение, рассмотрим пример, иллюстрирующий некоторые из описанных выше результатов.

**Пример 4.8** (коинтеграция для двумерного процесса) пример заимствован из [Hayashi (2000)]. Рассмотрим следующий двумерный VMA(1)-процесс:

$$\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

В этом случае мы имеем:

$$\Psi(L) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Psi_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Psi_1} L = \begin{pmatrix} 1-L & \gamma L \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Легко показать 1-суммируемость  $\Psi_j$  и равенство:

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Анализируемый вектор  $u_t$  — линейная  $I(0)$ -система с нулевым средним;  $u_{1,t}$  является  $I(0)$ -процессом, если  $\gamma \neq 0$ , иначе  $u_{1,t}$  —  $I(1)$ -процесс;  $u_{2t}$  является  $I(0)$ -процессом. Линейной  $I(0)$ -системой является любая сумма  $\delta + u_t$ . Следовательно, векторный  $I(1)$ -процесс  $Y_t$  определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

или в терминах компонент вектора  $Y_t$ :

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{1,0} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{2,s} \\ \sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s} \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\alpha(L) = -\Psi_1$ ,

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} - \gamma \varepsilon_{2,t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\Psi(1)(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^t \varepsilon_{1,s} \\ \sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s} \\ \sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s} \end{pmatrix},$$

многомерное представление Бевеиджа — Нельсона имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_t &= \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \gamma \sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s} \\ \sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} - \gamma \varepsilon_{2,t} \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,0} - \gamma \varepsilon_{2,0} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Таким образом, если  $\Psi(1) = 0$ , то стохастический тренд исчезает из уравнения (4.118), и процесс  $Y_t$  не будет  $I(1)$ -процессом.

Более того, матрица

имеет ранг, равный единице. Поэтому коинтеграционный ранг равен  $1(=2-1)$ . Все коинтегрирующие вектора могут быть записаны в виде:  $[c, -c\gamma'] \neq 0$ , где  $c \neq 0$ . Кроме того, предположение о том, что коинтегрирующий вектор исключает детерминированный тренд, может быть записано как:  $c\delta_1 - c\gamma\delta_2 = 0$ .

### Треугольное представление Филлипса

Кроме описанного выше  $VMA(\infty)$ -представления, имеются другие удобные представления. Одно из них предложено в работе [Phillips (1991)]. Идея этого представления состоит в построении нового базиса  $\tilde{\Gamma}$ , линейная оболочка которого совпадает с  $\Gamma$  и который представим в форме составной матрицы

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} I_h \\ \dots \\ -A_{m-h,h} \end{bmatrix}_{m \times h},$$

где  $I_h$  — единичная матрица размерности  $h \times h$ , а  $A_{m-h,h}$  — матрица коэффициентов, соответствующих переупорядочиванию строк матрицы  $\Gamma$ . Тогда — это, соответственно:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ \dots \\ Y_{2t} \end{bmatrix}_{m \times h},$$

где  $Y_{1t}$  и  $Y_{2t}$  имеют размерности  $(h \times 1)$  и  $((m-h) \times 1)$ , соответственно. Более подробное описание переупорядочивания и процедуры разделения матрицы см. в работе [Hamilton (1994)].

Умножая многомерное представление Бевериджа — Нельсона (4.114) на  $\tilde{\Gamma}$ , получаем:

$$Y_{1t} = A'Y_{2t} + \mu_1 + Z_t^* \quad (\text{первая часть}), \quad (4.119)$$

где  $\mu_1 = \tilde{\Gamma}'(Y_0 - \eta_0)$ ,  $Z_t^* = \tilde{\Gamma}'\eta_t$  и  $\tilde{\Gamma}'\delta = 0$ . Кроме того,  $\tilde{\Gamma}'\Psi(1) = 0$ . Поскольку  $\eta_t$  — стационарный временной ряд, то и ряд  $Z_t^*$  тоже будет стационарным. Система (4.119) содержит  $h$  коинтегрирующих регрессий и позволяет получить первую часть треугольного представления Филлипса. Вторая часть определяется последними  $m-h$  строками  $Y_t$  (возможно переупорядоченными) в уравнении (4.110), которое имеет вид:

$$\Delta Y_{2t} = \delta_{2t} + \Psi_2(L)\varepsilon_t, \quad (m-h \times 1) \quad (\text{вторая часть}), \quad (4.120)$$

где  $\Psi_2(L)$  — это лаговый полином размерности  $((m-h) \times m)$ ; размерности  $\delta_{2t}$  равна  $(m-h \times 1)$ .

Если указанная выше система имеет в точности  $h$  коинтегрирующих соотношений, тогда вектор  $Y_{2t}$  размерности  $((m - h) \times 1)$  является  $I(1)$  и не имеет коинтегрирующих соотношений. Это представление оказывается весьма полезным при оценивании.

**Пример 4.8** (продолжение) коинтеграция для двумерного процесса. В нашей двумерной системе коинтеграционный ранг равен 1. Коинтегрирующий вектор равен  $(1, -\gamma)'$ . Таким образом,  $Z_t^*$  и  $\mu$  равны

$$\begin{aligned} Z_t^* &= (1, -\gamma)\eta_t = \varepsilon_{1,t} - \gamma\varepsilon_{2,t} \\ \mu &= (1, -\gamma)(Y_0 - \eta_0) = (Y_{1,0} - \gamma Y_{2,0}) - (\varepsilon_{1,0} - \gamma\varepsilon_{2,0}). \end{aligned}$$

Следовательно, треугольное представление имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \mu + \gamma Y_{2,t} + (\varepsilon_{1,t} - \gamma\varepsilon_{2,t}) \\ \Delta Y_{2,t} &= \delta_2 + \varepsilon_{2,t}. \end{aligned}$$

### Представление общего тренда Стока — Ватсона

Применяя многомерное разложение Бевериджа — Нельсона (4.114) ко второй части треугольного представления Филлипса (4.120), получим:

$$Y_{2t} = \delta_2 \cdot t + \Psi_2(1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t) + \eta_{2t} + (Y_{2,0} - \eta_{2,0}),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_2(1) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{2,j}, \\ \eta_{2,t} &= \alpha_2(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2,j}\varepsilon_{t-j}, \\ \alpha_{2,j} &= -(\Psi_{2,j+1} + \Psi_{2,j+2} + \Psi_{2,j+3} + \dots) \end{aligned}$$

и

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{2,j}| < \infty.$$

Поскольку  $\varepsilon_t$  — белый шум, то  $\Psi_2(1)\varepsilon_t$  также является белым шумом. А следовательно,

$$\xi_{2t} \equiv \Psi_2(1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t)$$

— случайное блуждание. Таким образом, справедливо следующее представление:

$$Y_{2t} = \delta_2 \cdot t + \xi_{2t} + \eta_{2t} + \mu_2, \quad \text{Разработка электронных библиотек}$$

где  $\mu_2 = Y_{2,0} - \eta_{2,0}$ . Подставляя уравнение (4.121) в первую часть треугольного представления Филлипса (4.119), получим:

$$Y_{1t} = \tilde{\mu}_1 + A'(\delta_2 \cdot t + \xi_{2t}) + \tilde{\eta}_{1t}, \quad (4.122)$$

где  $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + A'\mu_2$  и  $\tilde{\eta}_{1t} = Z_t^* + A'\eta_{2t}$ .

Уравнения (4.121) и (4.122) определяют представление общего тренда, впервые полученное в работе [Stock, Watson (1988)]. Система  $Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}$  включает стационарную компоненту:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1t} \\ \eta_{2t} \end{bmatrix},$$

линейные комбинации

$$A'(\delta_2 \cdot t),$$

общих *детерминированных* трендов  $\delta_2 \cdot t$  с количеством слагаемых, не превышающим  $(m - h)$ , а также линейные комбинации

$$A'(\xi_{2,t})$$

общих *стохастических* трендов  $\xi_{2t}$  с количеством слагаемых, не превышающим  $(m - h)$ .

**Пример 4.8 (продолжение)** коинтеграция для двумерного процесса. Двумерный стохастический тренд определяется суммой  $\sum_{s=1}^t \varepsilon_{2,s}$  (см. уравнение (4.118)).

### Представление в виде векторной авторегрессии

Выше мы рассмотрели случай, когда система  $Y_t$ , определяемая представлением в виде векторной авторегрессии бесконечного порядка (VMA( $\infty$ )),

$$\Delta Y_t = \delta + \Psi(L)\varepsilon_t. \quad (4.123)$$

является коинтегрированной. При этом в случае коинтегрированной системы не существует VAR( $p$ )-представления (где  $p$  — некоторое натуральное число) для ее первых разностей  $\Delta Y_t$ . Однако предположим, что существует коинтегрированная  $m$ -мерная VAR( $p$ )-система для  $Y_t$  с  $h$  коинтегрирующими соотношениями, которая имеет вид:

$$Y_t = \alpha + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (4.124)$$



Умножая VMA( $\infty$ )-представление (4.123) на  $\Phi_p(L)$ , получим:

$$(1 - L)\Phi_p(L)Y_t = \Phi_p(1)\delta + \Phi_p(L)\Psi(L)\varepsilon_t.$$

Подставляя VAR( $p$ )-представление (4.124) в это уравнение, получим:

$$(1 - L)\varepsilon_t = \Phi_p(1)\delta + \Phi_p(L)\Psi(L)\varepsilon_t, \quad (4.125)$$

при этом следует учитывать, что  $(1 - L)\alpha = \Delta\alpha = 0$ . Таким образом, уравнение (4.125) должно выполняться для всех  $\varepsilon_t$ . Откуда следует, что

$$\Phi_p(1)\delta = 0$$

и

$$(1 - L)I_m = \Phi_p(L)\Psi(L). \quad (4.126)$$

Решая эти уравнения относительно  $\Psi(L)$ , получим:

$$\Psi(L) = \Phi_p(L)^{-1}(1 - L).$$

Таким образом, вопрос состоит в том, чтобы определить условия на  $\Phi_p(L)$ , при которых  $\Psi(L)$  является 1-суммируемым и имеет ранг, равный  $m - h$  ( $\text{rank}[\Psi(1)] = m - h$ ). Заметим, что эти условия обеспечивают наличие коинтеграции (с  $h$  коинтегрирующими соотношениями) для VMA( $\infty$ )-представления.

Необходимое условие, получаемое из уравнения (4.126) в предположении  $L = 1$ , имеет вид:

$$\Phi_p(1)\Psi(1) = 0. \quad (4.127)$$

Поскольку из условий для VMA( $\infty$ )-представления  $\Psi(1)$  имеет ранг  $(m - h)$ , то ранг  $\Phi_p(1)$  не превосходит  $h$ .

**VAR-представление.** Необходимым и достаточным условием для того, чтобы VAR( $p$ )-процесс размерности  $m$  был коинтегрированной системой I(1) с коинтегрирующим рангом  $h$ , является разложимость  $\Phi_p(L)$  в форме:

$$\Phi_p(L) = U(L)M(L)V(L),$$

где  $U(L)$  и  $V(L)$  — матричные лаговые операторы размерности  $(m \times m)$ , корни которых находятся вне единичного круга, а  $M(L)$  — матричный лаговый оператор размерности  $m \times m$  следующего вида:

$$M(L) = \begin{bmatrix} (1 - L)I_{m-h} & 0_{m-h \times h} \\ 0_{h \times m-h} & I_h \end{bmatrix},$$

где первые  $(m - h)$  диагональных элементов равны  $(1 - L)$ , а остальные диагональных элементов равны 1.

Используя это утверждение, можно показать, что ранг  $\Phi_p(1)$  равен в точности  $h$ . Учитывая, что

$$\Phi_p(1) = U(1)M(1)V(1),$$

а  $U(1)$  и  $V(1)$  — невырождены (так как все корни матричных многочленов  $U(L)$  и  $V(L)$  находятся вне единичного круга), ранг  $\Phi_p(1)$  равен рангу  $M(1)$ , который, в свою очередь, равен  $h$ ,

$$\text{rank}[\Phi_p(1)] = h.$$

Тогда мы можем выразить так называемое *условие редуцированного ранга* в форме:

$$\Phi_p(1) = \mathbf{B}\Gamma', \quad (4.128)$$

где  $\mathbf{B}$  и  $\Gamma$  — матрицы размерности  $(m \times h)$ , ранги которых равны  $h$ . Поскольку ранг матрицы  $\mathbf{B}$  равен количеству ее столбцов, то, учитывая (4.127), получим:

$$\Gamma'\Psi(1) = 0$$

и

$$\Gamma'\delta = 0,$$

что означает  $\Gamma$  — коинтегрирующая матрица.

### Представление в форме векторных моделей коррекции остатками — ВМКО (в англоязычной версии: Vector Error Correction Model, или VEC-модели)

Аналогично одномерному  $AR(p)$ -процессу,  $VAR(p)$ -система (4.124) может быть записана как:

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \zeta_1 \Delta Y_{t-1} + \zeta_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t,$$

где

$$\rho = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_p$$

и

$$\zeta_j = -(\Phi_{j+1} + \Phi_{j+2} + \dots + \Phi_p), \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, p-1. \quad (4.129)$$

Вычитая  $Y_{t-1}$  из обеих частей уравнения, получим VEC-представление:

где

$$\zeta_0 = \rho - I_n = -(I_n - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_p) = -\Phi_p(1). \quad (4.131)$$

В предположении наличия в точности  $h$  коинтегрирующих соотношений мы можем воспользоваться условием редуцированного ранга (4.128). В результате получим:

$$\zeta_0 = -\Phi_p(1) = -\mathbf{B}\Gamma',$$

так что уравнение (4.130) примет вид:

$$\Delta Y_t = \alpha - \mathbf{B}\Gamma'Y_{t-1} + \zeta_1\Delta Y_{t-1} + \zeta_2\Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1}\Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t,$$

где  $\Gamma'Y_t$  — тренд-стационарный временной ряд.

Обозначив

$$Z_t = \Gamma'Y_t,$$

мы приходим к так называемому *представлению в форме VEC-модели*:

$$\Delta Y_t = \alpha - \mathbf{B}Z_{t-1} + \zeta_1\Delta Y_{t-1} + \zeta_2\Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1}\Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t.$$

Заметим, что если  $\mathbf{B}Z_{t-1}$  было бы равным нулю, то для разностей первого порядка  $\Delta Y_t$  мы получили бы VAR-процесс. Но равенство  $\mathbf{B}Z_{t-1}$  нулю невозможно, так как  $Y_t$  — коинтегрированный вектор.  $\mathbf{B}$  — матрица *коэффициентов нагрузки или коррекции*, поскольку она определяет, каким образом флуктуации (ошибки, отклонения от среднего или отклонения от долгосрочного соотношения равновесия) стационарного процесса  $Z_t$  корректируют изменения в переменных  $Y_t$ , т. е.  $\Delta Y_t$ . Напомним, что  $Z_t$  — стационарный вектор, выражающий  $h$  коинтегрирующих соотношений между элементами  $Y_t$ .

Название «коррекция остатками» (см. [Davidson et al. (1978)]) отражает наличие слагаемого  $-\mathbf{B}Z_{t-1}$ .  $Z_{t-1} \neq 0$  — отклонение от долгосрочного равновесия. В отсутствие этого слагаемого такая коррекция отсутствует и система перестает быть коинтегрированной.

Отметим, что матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\Gamma$  не определены однозначно, поскольку для любой невырожденной матрицы  $F$  (размерности  $(h \times h)$ ) справедливо равенство:  $\mathbf{B}\Gamma' = \mathbf{B}FF^{-1}\Gamma'$ . Следовательно, для процедуры оценивания необходимы  $h^2$  идентификационных ограничений. Например, если  $h = 1$ , то  $\Gamma' = (\gamma_1, \gamma_2)$  должна быть нормирована. В результате нормировки мы получим  $(1, -b)$ , где  $b = -\gamma_2/\gamma_1$ .

**Пример 4.8 (окончание):** коинтеграция для двумерного процесса. Выше, пользуясь векторной моделью скользящего среднего (VMA-  
Скопировано с сайта <http://www.ips.uva.nl> Разработка электронных библиотек  
Модель М. Мы получили представление общего тренда и треугольное  
<http://www.ips.uva.nl> <http://www.ips.uva.nl>

представление. Теперь мы получим представление в форме VAR-модели и VEC-модели.

Для VAR-представления воспользуемся тем, что равенство  $\Phi(L)\Psi(L) = (1 - L)I_m$  выполняется при

$$\Phi(L) = I_2 - \Phi_1 L,$$

где

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, VMA-модель может быть представлена в виде VAR-модели конечного порядка. Для такого VAR-представления мы имеем

$$\Phi(1) = I_2 - \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представление в форме VEC-модели можно получить, записывая VAR-модель с

$$\mathbf{B} = [1, 0]', \quad \mathbf{\Gamma} = [1, -\gamma] \quad (\text{например}).$$

В результате получим:

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1,t} \\ \Delta Y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\delta_2 + \alpha_1 - \gamma\alpha_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 - \gamma\delta_2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Z_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где  $Z_t = \mathbf{\Gamma}'Y_t = Y_{1,t} - \gamma Y_{2,t}$ .

Детерминированный тренд исчезает в случае, если  $\delta_1 = \gamma\delta_2$ , т. е. если коинтегрирующий вектор исключает этот детерминированный тренд.

Указанные выше различные представления для коинтегрированных процессов могут быть объединены в следующей теореме.

**Теорема о представлении Гранжера.** Рассмотрим  $I(1)$  векторный процесс  $Y_t$  размерности  $m \times 1$ , первые разности  $\Delta Y_t$  которого сгенерированы VMA( $\infty$ )-процессом

$$\Delta Y_t = \delta + \Psi(L)\varepsilon_t,$$

где  $\varepsilon_t$  — многомерный белый шум с положительно определенной ковариационной матрицей  $\Omega$ ; элементы  $\{\Psi_j\}$  лагового полинома  $\Psi(L)$  1-суммируемы, т. е.  $\{j\Psi_j\}_{j=0}^{\infty}$  абсолютно суммируемы. Более того, мы требуем, чтобы значение лагового полинома в «единице» не было равно нулю, т. е.

Предположим, что существует в точности  $h$  коинтегрирующих соотношений среди элементов  $Y_t$ . Это значит, что существует матрица  $\Gamma$  размерности  $(m \times h)$  с линейно независимыми столбцами, такая, что вектор  $Z_t = \Gamma' Y_t$  размерности  $(h \times 1)$  является стационарным, причем

$$\Gamma' \Psi(1) = 0.$$

В этом случае  $VMA(\infty)$ -процесс может быть записан в форме треугольного разложения Филлипса и в форме разложения общего тренда Стока — Ватсона.

Более того, если процесс может быть представлен в виде  $VAR(p)$ -процесса конечного порядка (условия такого представления см. выше, в «*VAR-представлении*»), то существует матрица  $B$  размерности  $(m \times h)$ , для которой выполняется условие редуцированного ранга

$$\Phi_p(1) = B\Gamma'$$

и, кроме того, существуют матрицы  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{p-1}$ , размерность которых  $(m \times m)$ , такие, что справедливо  $VEC$ -представление

$$\Delta Y_t = \alpha - BZ_{t-1} + \zeta_1 \Delta Y_{t-1} + \zeta_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t.$$

#### 4.5.2. Процедуры оценивания моделей коинтеграции

Все предложенные подходы оценивания моделей коинтеграции могут быть разделены на два семейства.

##### 1. Подходы одного уравнения:

- 2-шаговый подход Энгла — Гранжера ([Engle, Granger (1987)]);
- 3-шаговый подход Энгла — Гранжера — Йю ([Engle, Yoo (1991)]);
- подход динамического МНК (ДМНК) Стока — Ватсона ([Stock, Watson (1993)]);
- подход авторегрессионно распределенных лагов (АРЛ) Песарана — Шина ([Pesaran, Shin, Smith (1998)]).

##### 2. Многомерные VAR-модели (более чем одно коинтеграционное соотношение):

- $VECM$ -методология Йохансена,  $ML$ -подход ([Johansen (1988)])

В этом разделе мы коротко рассмотрим вопрос о том, как оценивать коинтеграционную систему, имеющую VEC-представление:

$$\Delta Y_t = \alpha + \zeta_0 Y_{t-1} + \zeta_1 \Delta Y_{t-1} + \zeta_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t,$$

где  $\zeta_0 = -\mathbf{B}\Gamma'$  удовлетворяет условию редуцированного ранга. Выпишем логарифмическую функцию правдоподобия для гауссовского  $m$ -мерного VAR( $p$ )-процесса

$$Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

для которого  $\varepsilon_t (t = 1, 2, \dots)$  — независимые, одинаково распределенные случайные величины, подчиняющиеся  $(\mathbf{0}; \mathbf{\Omega})$ -нормальному распределению. Эта функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln L(\Pi, \mathbf{\Omega}) = & -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) + \frac{T}{2} \ln(\det(\mathbf{\Omega}^{-1})) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \{(Y_t - \Pi' X_t)' \mathbf{\Omega}^{-1} (Y_t - \Pi' X_t)\}, \end{aligned} \quad (4.132)$$

где

$$X_t = \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \dots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix},$$

а

$$\Pi' = [c \quad \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_p] \text{ — параметры.}$$

Поскольку уравнения (4.129) и (4.131) задают взаимнооднозначное соответствие между  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p)$  и  $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{p-1})$ , то логарифмическая функция правдоподобия для VEC-системы принимает такой же вид, как (4.132), в котором

$$X_t = \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ \Delta Y_{t-1} \\ \Delta Y_{t-2} \\ \dots \\ \Delta Y_{t-p+1} \end{bmatrix}$$

и

Оценка методом максимума правдоподобия параметров VEC-представления коинтеграции  $(\alpha, \zeta_0, \dots, \zeta_{p-1})$  максимизирует целевую функцию при выполнении условия редуцированного ранга, т. е.  $-\zeta_0 = \mathbf{B}\Gamma'$  для некоторых матриц полного ранга  $\Gamma$  и  $\mathbf{B}$ , размерность которых  $(m \times h)$ . Это ограничение обеспечивает наличие  $h$  коинтегрирующих соотношений в  $I(1)$ -системе.

## Алгоритм Йохансена

В этом разделе мы опишем основные шаги для вычисления оценок максимума правдоподобия при помощи алгоритма Йохансена. Для более детального ознакомления см. [Hamilton (1994)], гл. 20.

Алгоритм Йохансена можно разделить на три этапа.

1. На первом этапе сначала при помощи метода наименьших квадратов (МНК) мы оцениваем следующую  $m$ -мерную VAR( $p-1$ )-систему:

$$\Delta Y_t = \pi_0 + \Pi_1 \Delta Y_{t-1} + \Pi_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \Pi_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + u_t$$

и вычисляем вектор МНК-остатков  $\hat{u}_t$ , размерность которого  $(m \times 1)$ . Затем с помощью МНК оцениваем модель:

$$Y_t = \xi_0 + \Xi_1 \Delta Y_{t-1} + \Xi_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \Xi_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + v_t \quad (4.133)$$

и снова вычисляем вектор МНК-остатков  $\hat{v}_t$ , размерность которого  $m \times 1$ .

2. На втором этапе сначала вычисляем выборочные ковариационные матрицы остатков  $u_t$  и  $v_t$ :

$$\hat{\Sigma}_{uu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t',$$

$$\hat{\Sigma}_{vv} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{v}_t \hat{v}_t', \quad (4.134)$$

$$\hat{\Sigma}_{uv} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{v}_t' = \hat{\Sigma}'_{vu}. \quad (4.135)$$

Далее мы находим собственные значения  $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_m$  из характеристического уравнения

и связанные с ними собственные вектора  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_h$ , из которых формируется матрица  $\hat{\Gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_h)$ .

Оказывается, что максимальное значение логарифмической функции правдоподобия при ограничении, состоящем в том, что существуют  $h$  коинтегрирующих соотношений, равно:

$$\ln L_C(\zeta_0) = -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) - \frac{mT}{2} - \frac{T}{2} \ln(\det(\hat{\Sigma}_{uu})) - \frac{T}{2} \sum_{t=1}^h \ln(1 - \hat{\lambda}_t). \quad (4.137)$$

3. Наконец, мы находим необходимые оценки максимального правдоподобия для  $(\alpha, \zeta_0, \dots, \zeta_{p-1}, \Omega)$ .

Мы знаем, что задание базиса для коинтегрированной системы не единственно. Йохансен предложил нормализовать  $\hat{\gamma}_i$  таким образом, чтобы  $\hat{\gamma}'_i \hat{\Sigma}_{vv} \hat{\gamma}_i = 1$ . Заметим, что это может быть сделано при помощи стандартных статистических программ, взяв, например,  $\tilde{\gamma}_i = \frac{\hat{\gamma}_i}{\sqrt{\hat{\gamma}'_i \hat{\Sigma}_{vv} \hat{\gamma}_i}}$ . Тогда оценки метода максимума правдоподобия равны:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_0 &= \hat{\Sigma}_{uv} \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}', \\ \hat{\zeta}_i &= \hat{\Pi}_i - \hat{\zeta}_0 \hat{\Xi}, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, p-1, \\ \hat{\alpha} &= \hat{\pi}_0 - \hat{\zeta}_0 \hat{\xi}_0, \\ \hat{\Omega} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( (\hat{u}_t - \hat{\zeta}_0 \hat{v}_t)(\hat{u}_t - \hat{\zeta}_0 \hat{v}_t)' \right), \end{aligned}$$

где  $\hat{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_h)$ .

### Детерминированные тренды

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на  $\alpha$  и, в общем случае, на детерминированную составляющую. Наличие детерминированных компонент в VEC-моделях является во многом определяющим, поскольку их учет заставляет менять процедуры статистического тестирования, для которых используются другие критические значения.

Рассмотрим следующую общую модель, учитывающую детерминированную компоненту:

$$\Delta Y_t = \mathbf{B}\Gamma' Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + T D_t + \varepsilon_t$$



$$\text{то есть: } \Delta Y_t = \mathbf{B}\Gamma'Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + a_0 + a_1 t + \varepsilon_t.$$

Пусть матрица  $\mathbf{B}_\perp$ , размерность которой  $(m \times (m - h))$ , является ортогональным дополнением линейного подпространства столбцов матрицы  $\mathbf{B}$ , т. е.  $\mathbf{B}'\mathbf{B}_\perp = 0$  и  $\text{rank}(\mathbf{B}_\perp) = m - h$ . После некоторых матричных преобразований получим следующий результат:

$$\mathbf{B}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}' + \mathbf{B}_\perp(\mathbf{B}'\mathbf{B}_\perp)^{-1}\mathbf{B}_\perp' = \mathbf{I}_m.$$

Как следствие, детерминированная компонента может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t &= \mathbf{B} \underbrace{(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'a_0}_{a_0^*} + \mathbf{B}_\perp \underbrace{(\mathbf{B}'\mathbf{B}_\perp)^{-1}\mathbf{B}_\perp'a_0}_{a_0^{**}} + \\ &+ \mathbf{B} \underbrace{(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'a_1 t}_{a_1^*} + \mathbf{B}_\perp \underbrace{(\mathbf{B}'\mathbf{B}_\perp)^{-1}\mathbf{B}_\perp'a_1 t}_{a_1^{**}} = \\ &= \mathbf{B}a_0^* + \mathbf{B}_\perp a_0^{**} + \mathbf{B}a_1^* t + \mathbf{B}_\perp a_1^{**} t, \end{aligned}$$

и мы можем идентифицировать пять возможных случаев в соответствии с различными типами ограничений на параметры.

- **Случай 1:**  $a_0 = a_1 = 0$ . Отсутствие детерминированных компонент в данных, и все свободные члены в коинтеграционных соотношениях равны нулю. Этот случай встречается редко, свободные члены в коинтеграционных соотношениях необходимы для учета единиц измерения:

$$\Delta Y_t = \mathbf{B}\Gamma'Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

- **Случай 2:**  $a_1 = 0$  и  $\mathbf{B}'a_0 = 0$ . Отсутствует тренд в данных и отсутствует тренд в коинтеграционном соотношении ( $a_1=0$ ), но свободный член в коинтеграционных соотношениях быть может, поскольку  $\mathbf{B}'a_0 \neq 0$ . А значит,

$$\Delta Y_t = \mathbf{B}(\Gamma'Y_{t-1} + a_0^*) + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

- **Случай 3:**  $a_1 = 0$  и компоненты вектора  $a_0$  не связаны заданными условиями. Это означает, что может быть линейный тренд в уровнях  $Y_t$  (т. е. константа в первых разностях), но в коинтеграционных соотношениях тренд отсутствует. Однако, в коинтеграционных соотношениях может быть свободный член. Таким образом,

$$\Delta Y_t = \mathbf{B}(\Gamma' Y_{t-1}) + a_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t,$$

$$\Delta Y_t = \mathbf{B}(\Gamma' Y_{t-1} + a_0^*) + \mathbf{B}_\perp a_0^{**} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

- **Случай 4:** компоненты вектора  $a_0$  не связаны заданными условиями, а  $\mathbf{B}'_\perp a_1 = 0$ . Поскольку  $\mathbf{B}'_\perp a_1 = 0$ , то в модели имеются ограничения, исключающие квадратические тренды в уровнях  $Y_t$ . Однако если  $\mathbf{B}' a_1 \neq 0$ , то коинтеграционные соотношения могут иметь линейные тренды, так же как и свободные члены. Из того, что  $\mathbf{B}'_\perp a_0 \neq 0$ , следует наличие линейных трендов в уровнях  $Y_t$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= \mathbf{B}(\Gamma' Y_{t-1} + a_1^* t) + a_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t = \\ &= \mathbf{B}(\Gamma' Y_{t-1} + a_0^* + a_1^* t) + \mathbf{B}_\perp a_0^{**} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

- **Случай 5:**  $a_0$  и  $a_1$  не связаны заданными условиями. Тогда модель содержит линейный тренд в разностях  $\Delta Y_t$ , и квадратичный тренд в уровнях  $Y_t$  (это весьма нереалистичный случай).

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= \mathbf{B}(\Gamma' Y_{t-1}) + a_0 + a_1 t + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t = \\ &= \mathbf{B}(\Gamma' Y_{t-1} + a_0^* + a_1^* t) + \mathbf{B}_\perp a_0^{**} + \mathbf{B}_\perp a_1^{**} t + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

### 4.5.3. Спецификация модели и тестирование

В случае, когда все временные ряды  $Y_{tj}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , стационарны, можно специфицировать для  $Y_t$  модель из класса VAR( $p$ )-моделей, рассмотренных в разделе 4.2. В случае, когда все временные ряды  $Y_{tj}$ ,

$j = 1, \dots, m$  являются интегрированными порядка  $d$ , нам необходимо выяснить, являются ли они коинтегрированными или нет. Это можно сделать при помощи тестов на коинтеграцию, рассмотренных ниже. Если оказывается, что  $Y_t$  не является коинтегрированным вектор-процессом, то можно специфицировать VAR( $p$ )-модель для его разностей  $d$ -го порядка. Если же вектор-процесс оказался коинтегрированным, то для него используется одно из представлений для коинтегрированных систем, описанных выше.

### Тест Энга — Гранжера для остатков

Предположим, что вектор-процесс  $Y_t$ , размерность которого  $(m \times 1)$ , является  $I(1)$ . Основной целью является выяснение того, является ли  $Y_t$  коинтегрированным вектор-процессом с  $h \geq 1$  коинтегрирующими соотношениями или это не так, что означало бы  $h = 0$ . Тест Энга — Гранжера для остатков состоит из двух шагов.

1. На первом шаге осуществляется регрессия  $Y_{t1}$  на константу  $\mu$  и остальные  $m - 1$  компонент  $Y_t$ , для удобства обозначенных вектором  $Y_t^{(2)}$ , размерность которого  $((m - 1) \times 1)$ :

$$Y_{t1} = \mu + \alpha' Y_t^{(2)} + Z_t, \quad (4.138)$$

где интересующая нулевая и альтернативная гипотезы состоят в следующем:

$$H_0 : h = 0 \quad \text{против} \quad H_1 : h \geq 1.$$

Регрессия (4.138) будет коинтегрирующей регрессией, если  $h \geq 1$ , а  $Y_{t1}$  будет частью коинтегрирующего соотношения. В этом случае временной ряд остатков  $Z_t$  будет стационарным. Оценки  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\alpha}$  параметров  $\mu$  и  $\alpha$ , полученные при помощи метода наименьших квадратов, будут состоятельными. Кроме того, мы имеем:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t^2 \xrightarrow{p} \mathbf{E}[Z_t^2].$$

В случае  $h = 0$ , т. е. если между компонентами вектора  $Y_t$  отсутствуют коинтегрирующие соотношения, МНК-оценки  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\alpha}$  не являются состоятельными, а  $Z_t$  является интегрированным временным рядом и имеет стохастический тренд. Этот феномен впервые был отмечен в работе [Granger, Newbold (1974)] и назван ложной регрессией: даже если  $Y_{t1}$  не связано с  $Y_t^{(2)}$ ,  $t$ - и  $F$ -статистики для

размера выборок  $T$ . Таким образом, параметры  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\alpha}$  оказываются всегда значимо отличными от нуля (при условии, что выборка достаточно большая). В случае коинтеграции  $Y_{t1}$  и  $Y_t^{(2)}$  отличие тестовых статистик от соответствующих пороговых значений становится еще более значимым. Причиной этого является то, что в случае, когда  $h = 0$ ,  $Z_t$  имеет стохастический тренд, тогда как в случае  $h \geq 1$  это не так. В частности, можно показать, что оценка дисперсии ошибок отвечает следующему вероятностному закону (доказательство см. в [Hamilton (1994)]):

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t^2 \xrightarrow{d} \left( \lambda^2 \int_0^1 W(r)^2 dr \right) \cdot T, \quad (4.139)$$

где  $W(r)$  — стандартное броуновское движение, а  $\lambda$  — параметр, зависящий от автоковариации для  $Z_t$  и  $Z_{t-1}$ .

Основная идея доказательства последнего свойства состоит в том, что числитель  $F$ -статистики зависит от квадратов компонент  $Y_t^{(2)}$ , и он увеличивается со скоростью  $O(T^2)$ , а ее знаменатель равен  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t^2$ . Поскольку при  $h = 0$  сумма  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t^2$  растет как  $O(T)$  (в то время как при  $h \geq 1$  — сумма стационарна), то соответствующая  $F$ -статистика растет со скоростью  $O(T)$ , когда  $h = 0$ , и со скоростью  $O(T^2)$ , когда  $h \geq 1$ . Как следствие, коэффициент детерминации  $R^2$  коинтегрирующей регрессии  $Y_{t1}$  по  $Y_t^{(2)}$  сходится к 1 при  $h \geq 1$ , тогда как при  $h = 0$   $R^2$  принимает умеренные значения.

Кроме того, из (4.139) следует, что при  $h = 0$  параметры  $\mu$  и  $\alpha$  не могут быть состоятельно оценены при использовании МНК, поскольку процедура минимизации расходится, тогда как при  $h \geq 1$  МНК-оценки  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\alpha}$  будут состоятельными, поскольку процедура минимизации сходится.

2. На втором этапе применяется тест на наличие единичного корня для МНК-остатков

$$Z_t = Y_{t1} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}' Y_t^{(2)}.$$

В результате мы выясним, действительно ли  $Z_t$  является интегрированным рядом или нет. Для этого можно применить для  $Z_t$  расширенный тест Дики — Фуллера или тест Филлипса — Перрона: к сожалению, критические значения данного текста отличаются от критических значений расширенного теста Дики — Фуллера, по-

$\hat{\alpha}$ . А следовательно, от размерности  $m$  вектора  $Y_t$ . Только в случае, когда известен коинтегрирующий вектор  $(1, -\gamma)'$ , нам нет необходимости оценивать  $\mu$  и  $\alpha$ , и тогда могут быть использованы критические значения стандартного теста.

Критические значения для расширенного теста Дики — Фуллера и теста Филлипса — Перрона, примененные к остаткам, могут быть найдены из табл. 4.10, представленной ниже. При этом мы должны учитывать размерность  $Y_t^{(2)}$ , т.е. учитывать число регрессоров в уравнении (4.138). Кроме того, необходимо различать следующие три случая.

- **Отсутствуют сдвиги.** В случае, когда  $E[\Delta Y_{t1}] = 0$  и  $E[\Delta Y_t^{(2)}] = 0$ , отсутствует сдвиг в каждой из компонент вектора  $Y_t$ . В этом случае нам необходимо брать критические значения из столбцов таблицы (а), учитывая при этом, что число регрессоров (константу не включая) равно  $(m - 1)$ .
- **Имеется сдвиг в  $Y_t^{(2)}$ .** В случае, когда отсутствуют ограничения на  $E[\Delta Y_{t1}]$ , а  $E[\Delta Y_t^{(2)}] \neq 0$ , сдвиг может иметь любая из компонент  $Y_t$ , а компонента  $Y_t^{(2)}$  должна иметь сдвиг всегда. В этом случае нам необходимо брать критические значения из столбцов таблицы (в), учитывая при этом, что число регрессоров (константу не включая) равно  $(m - 1)$ .
- **Имеется сдвиг в  $Y_{t1}$ , но отсутствует в  $Y_t^{(2)}$ .** В случае, когда  $E[\Delta Y_{t1}] \neq 0$ , а  $E[\Delta Y_t^{(2)}] = 0$ , то имеется сдвиг только в  $Y_{t1}$ , но не в  $Y_t^{(2)}$ . В этом случае нам необходимо брать критические значения из столбцов таблицы (в), учитывая, что размерность системы равна  $m$ .

Альтернативная гипотеза приведенного выше теста состоит в том, что  $Y_{t1}$  не является частью коинтегрирующего соотношения, которое может существовать между переменными, формирующими  $Y_t^{(2)}$ . Следовательно, результаты теста зависят от того, какая переменная берется в качестве  $Y_{t1}$ . Более того, приведенный выше подход не позволяет определить число коинтегрирующих соотношений  $h$  в случае, когда нулевая гипотеза, состоящая в том, что  $h = 0$ , отвергается. Кроме того, отсутствуют какие-либо статистические тесты для коинтеграционных векторов (долгосрочная модель), поскольку стандартные ошибки недоуверены, а оценки долгосрочной модели имеют смещение в условиях малых выборок.

**Таблица 4.10.** Критические значения t-статистик расширенного теста Дики — Фуллера, рассчитанные для остатков коинтеграционного соотношения

Оцениваемая регрессия: $Y_{1t} = \mu + a'Y_{2t}$				
Число регрессоров, исключая константу ( $m - 1$ )	1%	2.50%	5%	10%
	(а) регрессоры без сдвига			
1	-3.96	-3.64	-3.37	-3.07
2	-4.31	-4.02	-3.77	-3.45
3	-4.73	-4.37	-4.11	-3.83
4	-5.07	-4.71	-4.45	-4.16
5	-5.28	-4.98	-4.71	-4.43
(b) некоторые регрессоры имеют сдвиг				
1	-3.96	-3.67	-3.41	-3.13
2	-4.36	-4.07	-3.8	-3.52
3	-4.65	-4.39	-4.16	-3.84
4	-5.04	-4.77	-4.49	-4.2
5	-5.36	-5.02	-4.74	-4.46

Источники: Phillips P., Ouliaris S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration // *Econometrica*. Vol. 58. P. 165–193; Fuller W. (1996). *Introduction to Statistical Time Series* (2ed. ed) New York, Wiley.

В работе [Banerjee et al. (1998)] предложена альтернативная процедура, которая позволяет получить более надежный, чем указанный выше, тест на коинтеграцию и одновременно иметь менее смещенные оценки для долгосрочного соотношения между переменными. Общий коинтеграционный тест строится на модели коррекции остатками (МКО) следующего вида:

$$\Delta Y_{t1} = \delta(L)\Delta Y_{t-1.1} + \omega(L)\Delta Y_t^{(2)} + \gamma Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}.$$

Модель может быть оценена при помощи метода наименьших квадратов. Мы тестируем нулевую гипотезу о том, что  $\gamma < 0$ , используя стандартную t-статистику, для которой были рассчитаны специальные таблицы в условиях различных предположений. Указанная выше модель может быть оценена при помощи нелинейного МНК, уменьшающего смещение регрессоров:

$$\Delta Y_{t1} = \delta(L)\Delta Y_{t-1.1} + \omega(L)\Delta Y_t^{(2)} + \gamma_1 Y_{t-1.1} - \gamma_1 \mu - \gamma_1 \alpha Y_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_{1t}.$$

Тем не менее упомянутые выше подходы и другие тесты типа Энгла — Гранжера обладают некоторыми существенными недостатками.

- все компоненты вектора  $Y_t^{(2)}$  предполагаются экзогенными;
- отсутствуют статистические тесты для коинтеграционных векторов (долгосрочная модель), поскольку стандартные ошибки недо-стоверны;
- оценки долгосрочной модели оказываются смещенными в услови-ях малых выборок;
- эти модели не учитывают наличия коинтеграционных векторов между более чем двумя переменными;
- пошаговая процедура тестирования приводит к увеличению оши-бок;
- одномерные коинтеграционные тесты могут накладывать некор-ректные ограничения на краткосрочный характер изменения пе-ременных.

Далее описывается тест, который позволяет решить большинство из этих проблем — *тест Йохансена на наличие коинтеграции*.

## Тест Йохансена

Рассмотрим  $m$ -мерное VEC-представление коинтеграционной системы, которое имеет вид:

$$\Delta Y_t = \alpha + \zeta_0 Y_{t-1} + \zeta_1 \Delta Y_{t-1} + \zeta_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t. \quad (4.140)$$

Многое зависит от ранга матрицы  $\zeta_0$ . В связи с этим условия на матрицу  $\zeta_0$  могут приводить к разным возможностям:

- *ранг  $h = m$* : все переменные в  $Y_t$  являются  $I(0)$  (неинтересный случай);
- *ранг  $h = 0$* : отсутствуют линейные комбинации компонент  $Y_t$ , которые были бы  $I(0)$ , отсутствует коинтеграция, и  $\zeta_0$  составлена из нулей;
- $1 \leq \text{ранг } h \leq (m - 1)$ : существует не более  $(m - 1)$  коинтеграционных соотношений  $\Gamma' Y_{t-1}$ , т. е. имеется  $h$  линейно независимых комбинаций компонент вектора  $Y_t$ , каждая из которых является  $I(0)$ . Или, что эквивалентно, существует  $(m - h)$  нестационарных векторов, формирующих  $I(1)$  стохастические тренды.

Например, рассмотрим вектор  $[q \ p \ y \ i]$ , составленный из «денег — цен — доходов — процентных ставок», которые предполагаются  $I(1)$ . Экономическая теория предлагает следующее долгосрочное уравнение спроса на деньги:

$$q - p = c + \alpha y - \gamma i.$$

Таким образом, если мы рассмотрим регрессионное уравнение для  $q$ , то получим:

$$q - p - \alpha y + \gamma i = c + \varepsilon \sim I(0).$$

Но мы можем также получить его в терминах  $y$ :

$$y - (1/\alpha)q + (1/\alpha)p - (\gamma/\alpha)i = -c/\alpha - \varepsilon/\alpha \sim I(0).$$

Подобная процедура может быть реализована для  $p$  и  $i$ . Однако четыре переменных ( $m = 4$ ) имеют единственный *линейно независимый коинтеграционный вектор* ( $h = 1 < 4$ ). Отметим, что, в общем случае, переменные могут быть объяснены при помощи дополнительных переменных (например,  $y$  и фискальная политика,  $i$  и монетарная политика, и т. д.).

Оценка коинтеграционного ранга  $h$  производится при помощи теста отношения правдоподобия. Поскольку  $h$  равняется числу ненулевых собственных чисел для матрицы  $\zeta_0 = -\Phi(1)$ , то тест строится на оценках этих собственных чисел, полученных как решение уравнения (4.136). Существует две версии теста.

1. **Тест наибольшего собственного значения**, который проверяет для любого выбранного натурального значения  $h_0$  гипотезу

$$H_0 : h \leq h_0 \quad \text{против} \quad H_1 : h = h_0 + 1$$

и строится на базе оценки  $(h_0 + 1)$ -го наибольшего собственного значения матрицы  $\zeta_0$ .

2. **Тест следа**. Этот тест проверяет для любого выбранного натурального значения  $h_0$  гипотезу

$$H_0 : h \leq h_0 \quad \text{против} \quad H_1 : h > h_0$$

и строится на базе суммы  $(m - h_0)$  оцененных наименьших собственных значений матрицы  $\zeta_0$ .

Тесты реализуются последовательно для  $h_0 = 0, 1, \dots, m - 1$ . При справедливости  $H_0$  обе статистики описываются при помощи винеровского процесса, и их критические значения могут быть затабулированы.

Из уравнения (4.137) можно увидеть, что максимальное значение логарифмической функции правдоподобия при ограничении, состоящем в



том, что имеется  $h$  коинтеграционных соотношений, т. е. при справедливости нулевой гипотезы, равно:

$$\ln L_{0,C}(\zeta_0) = -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) - \frac{mT}{2} - \frac{T}{2} \ln(\det(\hat{\Sigma}_{uu})) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^h \ln(1 - \hat{\lambda}_i).$$

Максимальное значение логарифмической функции правдоподобия при справедливости альтернативной гипотезы  $H_1$ , состоящей в том, что имеется  $m$  коинтегрирующих соотношений, равно:

$$\ln L_{1,C}(\zeta_0) = -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) - \frac{mT}{2} - \frac{T}{2} \ln(\det(\hat{\Sigma}_{uu})) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^m \ln(1 - \hat{\lambda}_i).$$

В последнем случае любая линейная комбинация компонент вектора  $Y_t$  будет стационарным временным рядом, а  $Y_{t-1}$  будет входить в уравнение (4.140) без каких-либо ограничений на  $\zeta_0$ . Отметим, что случай  $h = m$  отвечает стационарной системе в уровнях  $Y_t$ .

Статистика теста отношения правдоподобия для проверки гипотезы  $H_0$  против  $H_1$ , т. е. так называемого **теста следа**, определяется выражением:

$$LR_h = 2 \cdot (\ln L_{1,C} - L_{0,C}) = -T \sum_{i=h+1}^m \ln(1 - \hat{\lambda}_i).$$

Следовательно, мы можем проверить наличие или отсутствие коинтеграционных соотношений и в случае их наличия протестировать гипотезу о числе таких соотношений с использованием последовательности тестов следа в соответствии со схемой, указанной в табл. 4.11.

**Таблица 4.11.** Схема последовательности тестов следа для проверки существования коинтеграции

Статистика теста следа	Нулевая гипотеза	Число коинтеграционных соотношений при $H_0$
$LR_{tr}(0 m) = -T \sum_{i=1}^m \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$	$H_0 : \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = \lambda_m = 0$	0
⋮	⋮	⋮
$LR_{tr}(h m) = -T \sum_{i=h+1}^m \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$	$H_0 : \lambda_{h+1} = \dots = \lambda_{m-1} = \lambda_m = 0$	$h$
⋮	⋮	⋮
$LR_{tr}(m-2 m) =$ $= -T \sum_{i=1}^m \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$	$H_0 : \lambda_{m-1} = \lambda_m = 0$	$m-2$
Скопировано с сайта http://www.knkn.ru/2000/04/	$H_0 : \lambda_m = 0$	Разработка электронных библиотек https://право.информ.рф

Первое отклонение нулевой гипотезы показывает, что число коинтегрирующих соотношений равно числу, указанному в предыдущей строке. Ниже (см. табл. 4.12) приводятся результаты реализации этого теста, осуществленной на данных примера, заимствованного из пакета E-views.

**Таблица 4.12** Пример в Eviews-тест следа (Йохансен)

Диапазон времени регистрации данных: 1959:06 1989:12

Общее число наблюдений: 367

Допущение о линейности детерминированного тренда

Используемые лаги: от 1 до 4

Значение $h$ (проверяется гипотеза $H_0 : h = h_0$ при альтернативе $H_1 : h > h_0$ )	Собственное значение	Критическая статистика теста следа	5%-ное критическое значение	1%-ное критическое значение
0 **	0,102191	53,7974	29,68	35,65
не более 1	0,03444	14,2355	15,41	20,04
не более 2	0,00373	1,3724	3,76	6,65

\*\* означает отклонение гипотезы  $H_0$  при уровне значимости критерия, равном 0,05 (5%).

Результаты теста указывают на наличие одного коинтегрированного соотношения при уровнях значимости критерия, равных и 5%, и 1%.

Рассмотрим два крайних случая. Первый из них, когда  $h = 0$ , т. е. отсутствуют коинтегрирующие соотношения между компонентами вектора  $Y_t$ , а система  $Y_t$  является коинтегрированной. Второй случай, когда  $Y_t$  является скалярным процессом, т. е.  $m = 1$ , и  $h = m - 1 = 0$ . Тогда мы можем использовать тест Йохансена в качестве теста на наличие единичных корней.

Наконец, рассмотрим случай, когда мы тестируем гипотезу  $H_0$  о наличии  $h$  коинтегрирующих соотношений против гипотезы  $H_1$  о наличии  $(h + 1)$  коинтегрирующих соотношений. Для проверки  $H_0$  против  $H_1$  используется тест отношения правдоподобия, он же **тест наибольших собственных значений**, статистика которого определяется следующим выражением:

$$LR_h = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{h+1}).$$

Очевидно, оба указанных выше теста могут быть последовательно применены для тестирования числа коинтегрирующих соотношений  $h$ . Основное отличие заключается в том, что тест следа тестирует гипотезу о том, что  $(h + 1) - e$  и все последующие наименьшие из  $m$  собственных чисел  $\hat{\lambda}_1 = h + 1, \dots, m$ , равны нулю, тогда как тест наибольших



Следовательно, нулевая гипотеза предполагает включение только скорректированные ошибками слагаемые  $Z_t = \Gamma'Y_t$ . В работе [Johansen (1988, 1991)] показано, что статистика отношения правдоподобия асимптотически имеет  $\chi^2$ -распределение с  $h \cdot (m - q)$  степенями свободы. Однако имеются некоторые случаи, когда распределение тестовой статистики асимптотически не совпадает с  $\chi^2$ -распределением, см., например, [Toda, Phillips (1994)], [Mosconi, Giannini (1992)].

## Основные выводы по процедуре Йохансена

Основные шаги процедуры Йохансена состоят в следующем.

- Тестирование переменных на нестационарность (используется, например, расширенный тест Дики — Фуллера и др.). Отметим, что стандартный метод Йохансена позволяет использовать только лишь  $I(1)$  и  $I(0)$  переменные, тогда как для  $I(2)$  переменных требуются иные методы (для более детальной информации см. [Johansen (1995)]).
- Если переменные нестационарны, осуществляется проверка того, что они коинтегрированы.

### (i) Выбор VEC-модели:

- \* вопрос о числе лагов в VAR-модели решается с использованием критерия лаговой длины (например, с использованием AIC, SIC и иных критериев);
- \* вопрос о включении констант или трендов в VAR решается из содержательных соображений или, если отсутствуют априорные знания, при помощи теста отношения правдоподобия. В последнем случае нет ясности относительно выбора детерминированной части, несмотря на то, что имеются многочисленные работы, в которых предлагаются различные подходы, см., например, [Lütkepohl (2005)]; простой подход от общего к частному начинается с наиболее общего случая (случай 5, см. п. 4.5.2), а затем для выявления оптимальной детерминированной компоненты (и оценки коинтеграционного ранга) последовательно реализуются тесты отношения правдоподобия.

- ### (ii) Использование статистики следа или статистики наибольших собственных значений для тестирования гипотезы о числе коинтеграционных соотношений (ранг $n$ )

- Переоценивается VEC-модель с заданным значением коинтеграционных уравнений  $h$  и накладываются необходимые ограничения. Имеется два типа ограничений:
  - идентификационные ограничения;
  - связывающие ограничения.
- Производится VAR/VEC-анализ: прогнозирование, функция импульсного отклика, тесты причинности.

### Динамический метод наименьших квадратов

Несмотря на то что методология Йохансена является наиболее часто используемым подходом для тестирования коинтеграции и оценки коинтегрированных систем, она обладает некоторыми недостатками: этот метод весьма чувствителен к выбору переменных и их лагов. Кроме того, этот метод не дает хороших результатов в условиях малых выборок. Альтернативным подходом, который не обладает этими недостатками, является подход, предложенный в работах [Stock, Watson (1993)] и [Saikkonen (1991)].

Этот альтернативный подход, названный *динамическим МНК*, представляет собой качественное улучшение подхода Энгла — Гранжера. В нем учитывается возможная эндогенность регрессоров. Этот подход состоит из двух шагов.

1. Методом наименьших квадратов оценивается следующая регрессия:

$$Y_{t1} = \beta_0 + \sum_{i=2}^m \beta_i Y_{ti} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=-p}^p \gamma_{i,j} \Delta Y_{t-j,i} + \varepsilon_t,$$

где через  $-p$  и  $p$  обозначено число «будущих» и «прошлых» лагов соответственно. Величина  $p$  обычно выбирается при помощи критериев AIC/SIC/HQ и др. МНК-оценки коэффициентов  $\beta$  являются суперсостоятельными, а серийная корреляция остатков оценивается при помощи процедуры Нью-Веста, учитывающей гетероскедастичность и автокоррелированность стандартных ошибок.

2. Тестирование на коинтеграцию осуществляется так же, как в процедуре Энгла — Гранжера, с использованием одномерного теста на единичные корни для остатков или VEC-теста на коинтеграцию.

В работе [Stock, Watson (1993)] сделан сравнительный анализ множества оценок в условиях малых выборок и в качестве вывода указывается, что метод динамического МНК дает обычно наименьшую средне-

и подходом Йохансена. Эти выводы совпадают с выводами, сделанными в работе [Maddala, Kim (1998)], раздел 5.7. В некоторых исследованиях для тестирования на коинтеграцию вначале используется подход Йохансена, а затем для уточнения оценок коэффициентов коинтеграции и тестирования применяется динамический МНК.

#### 4.5.4. Эмпирические приложения в статистическом пакете Eviews: коинтеграция

Рассмотрим ежемесячные наблюдения за следующими индексами и процентными ставками. Возьмем период с января 1965 г. по декабрь 1995 г. (этот период включает 372 месяца, данные заимствованы из [Mills (2008)]):

- FTA All Share index (FTAprice),
- FTA Dividend index (FTAdiv),
- Yield on 20 year UK Gilts (R20),
- 91 day Treasury bills (RS),

графики которых представлены на рис. 4.9.

Все тесты на единичные корни указывают на то, что все четыре рассматриваемые переменные являются  $I(1)$  (более формальные результаты мы не приводим).

Для фондового рынка основной идеей в теоретическом смысле является следующая дивидендная дисконтная модель:

$$P_t = E_t \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(1+r_t)} \right)^i D_{t+i} \right],$$

которая может быть записана в виде *модели роста Гордона*:

$$P_t = \frac{D_{t+1}}{r_t - g_t}$$

или, если рассматривать эту модель в логарифмах,

$$p_t = d_{t+1} - \log(r_t - g_t) \approx d_{t+1} + \alpha_0 - \alpha_1 r_t,$$

где  $p_t = \log$  (цена актива),  $d_t = \log$  (дивидендов),  $r_t =$  доходность за один период

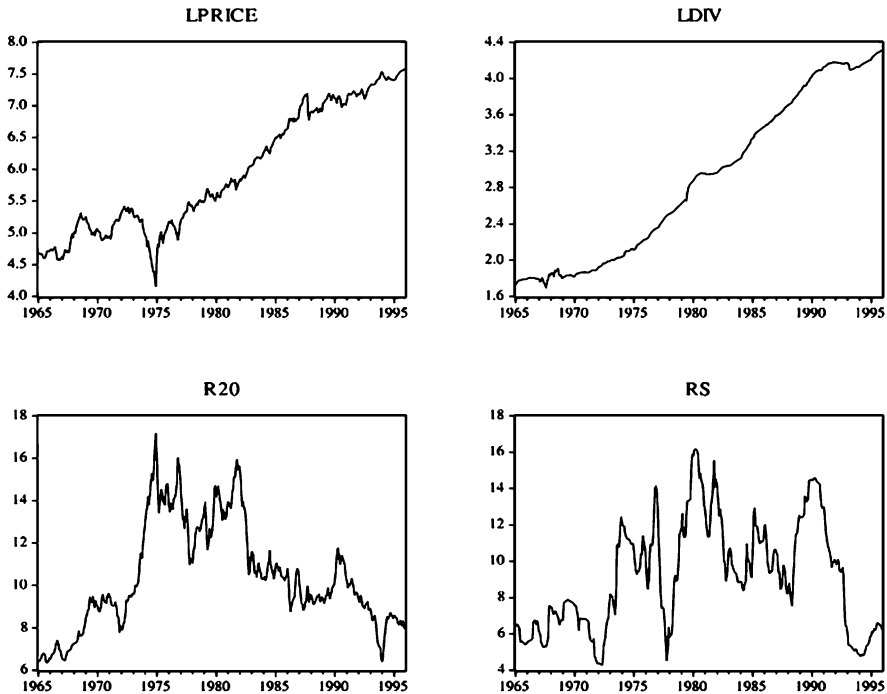


Рис. 4.9. Временные ряды в уровнях

Реализация подхода Энга — Гранжера для коинтеграции (Э-Г шаг 1) дает результаты, представленные в табл. 4.13.

Таблица 4.13. Подход Энга — Гранжера для коинтеграции (шаг 1)

Dependent Variable: LPRICE				
Method: Least Squares				
Sample: 1965M01 1995M12				
Included observations: 372				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.472363	0.04899	70.87869	0
LDIV	1.065223	0.010775	98.85835	0
R20	-0.04961	0.005175	-9.58788	0
RS	-0.01039	0.004478	-2.32007	0.0209
R-squared	0.970405	Mean dependent var		5.936924
Adjusted R-squared	0.970164	S.D. dependent var		0.970096
S.E. of regression	0.167567	Akaike info criterion		-0.724178
Sum squared resid	10.3329	Schwarz criterion		-0.68204
Log likelihood	138.6972	F-statistic		4022.17
Durbin-Watson stat	0.120788	Prob(F-statistic)		0

t-статистики, полученные после использования метода наименьших квадратов, не являются надежными оценками в условиях  $I(1)$  регрессоров, а значит, они использоваться не могут. Мы сохраним остатки, полученные из долгосрочной модели, и протестируем их на стационарность (шаг 2 в процедуре Энга — Гранжера).

Для рассматриваемых остатков не могут быть использованы критические значения расширенного теста Дики — Фуллера, так как эти остатки ненаблюдаемы, а получены в результате оценивания. Поэтому следует использовать критические значения из табл. 4.10, а именно столбец (а) из этой таблицы с  $m - 1 = 3$  регрессорами (см. табл. 4.14). Результаты проверки показывают, что остатки нестационарны на 10%-м уровне значимости, а значит, отсутствует подтверждение того, что коинтеграционное соотношение существует.

**Таблица 4.14.** Подход Энгла — Гранжера для коинтеграции (шаг 2)

Null Hypothesis: ECM has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=16)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.54413	0.0004
Test critical values:		
	1% level	-2.57121
	5% level	-1.94168
	10% level	-1.61613

Однако если мы будем следовать подходу, предложенному в работе [Banerjee et al. (1998)], то реализуем тест на коинтеграцию, оценивая при этом модель для краткосрочной динамики с механизмом коррекции ошибками. Мы рассмотрим стратегию моделирования от общего к частному, удаляя все незначимые лаговые переменные и накладывая ограничения везде, где возможно (см. табл. 4.15).

**Таблица 4.15.** Тест на коинтеграцию: подход, представленный в [Banerjee et al. (1998)] и основанный на модели коррекции ошибками

Dependent Variable: DLPRICE				
Method: Least Squares				
Sample: 1965M05 1995M12				
Included observations: 368				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.010044	0.003399	2.95473	0.0033
D(DLPRICE(-1))	0.147663	0.038114	3.874195	0.0001
DLPRICE(-3)	0.135877	0.051167	2.655553	0.0083
DLDIV(-3)	-0.42393	0.214837	-1.97328	0.0492
DR20(-1)	-0.03008	0.009418	-3.19347	0.0015
DRS(-1)	0.012719	0.006347	2.003798	0.0458
ECM(-1)	-0.06516	0.01857	-3.5091	0.0005
R-squared	0.107784	Mean dependent var		0.007884
Adjusted R-squared	0.092955	S.D. dependent var		0.061379
S.E. of regression	0.058457	Akaike info criterion		-2.822212
Sum squared resid	1.233617	Schwarz criterion		-2.747874
Log likelihood	526.287	F-statistic		7.26841
Prob(F-statistic)	0.001159	Prob(F-statistic)		0.00000



В этом случае  $ECM(-1)$  значим и отрицателен. Таким образом, коинтеграционное соотношение существует. Более того, другое подтверждение этому можно получить при помощи динамического МНК Стока — Ватсона для оценки коинтеграционного уравнения и реализации коинтеграционного теста для остатков (результаты здесь не представлены, предлагается читателю в качестве упражнения).

Теперь мы рассмотрим тест Йохансена на коинтеграцию. Для рассматриваемых переменных возможными коинтеграционными уравнениями могут быть:

- дивидендная дисконтная модель, включающая  $p_t$ ,  $d_{t+1}$  и  $r_t$ ;
- временная структура процентных ставок, R20 и RS.

Следуя результатам критериев лаговой длины, число лагов в VAR-модели для уровней полагается равным 2 (см. табл. 4.16).

**Таблица 4.16.** Критерий лаговой длины для уровневых VAR-моделей

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-1892.19	NA	0.44171	10.53441	10.57759	10.55158
1	1128.801	5958.073	2.48E-08	-6.16001	-5.94411	-6.07416
2	1187.997	115.4306*	1.95e-08*	-6.399981*	-6.011370*	-6.245462*
3	1201.042	25.1493	1.99E-08	-6.38357	-5.82224	-6.16037
...			...			...
12	1281.702	14.18673	2.84E-08	-6.03168	-3.91591	-5.19041

Как следствие число лагов в векторной модели коррекции ошибками будет равным 1. Исходя из теоретических и логических соображений, мы решили предположить, что в коинтеграционном уравнении отсутствует тренд, но имеется свободный член, тогда как свободный член отсутствует в VAR-модели: ранее использованные экономические модели включают константу в линейную аппроксимацию, тогда как ни для одной из наблюдаемых и рассматриваемых переменных не наблюдается детерминированный тренд. Кроме того, для таких ненаблюдаемых переменных, как премия за риск, также тренд не наблюдается.

После выбора векторной модели коррекции ошибками мы тестируем число коинтеграционных соотношений (ранг  $h$ ). Для этого мы воспользуемся статистикой теста следа или статистикой теста наибольших собственных значений (результаты представлены в табл. 4.17).

Ранговый тест показывает, что число коинтеграционных соотношений равно 1. Тест следа и тест наибольших собственных значений подтверждают это. Таким образом, мы продолжим тем, что оценим векторную модель коррекции ошибками для 1-го коинтеграционного соотношения и 1-го лага для разностей переменных в авторегрессионной части.



мы являемся свидетелями существенных недостатков в идеологии свободного рынка<sup>23</sup>, следует быть очень осторожным в суждениях о том, что является правдоподобным, а что нет.

**Таблица 4.18.** Оценки векторной модели коррекции ошибками (без ограничений) в предположении существования лишь одного коинтеграционного уравнения

Vector Error Correction Estimates				
Sample (adjusted): 1965M03 1995M12				
Included observations: 370 after adjustments				
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]				
Cointegrating Eq:	CointEq1			
LPRICE(-1)	1			
LDIV(-1)	-0.96576			
				-0.14746
				[-6.54912]
R20(-1)	0.098373			
				-0.07042
				[ 1.39695]
RS(-1)	0.113301			
				-0.06132
				[ 1.84766]
C	-4.08668			
				-0.66663
				[-6.13039]
Error Correction:	D(LPRICE)	D(LDIV)	D(R20)	D(RS)
CointEq1	0.005394	0.006072	-0.01472	-0.03171
	-0.00294	-0.00068	-0.01726	-0.02584
	[ 1.83561]	[ 8.90517]	[-0.85257]	[-1.22693]
...		...		...

В обоих случаях член, отвечающий коррекции остатками, значим и имеет положительный знак в уравнении для (разностей) логарифмов дивидендов, как и ожидалось, и слабо значим и положителен коэффициент для (разностей) логарифмов цен, которые не соответствуют стандартной экономической теории. Однако, нулевое ограничение на этот коэффициент отклоняется на 5%-м уровне значимости.

Наконец, можно продолжить анализ, изучая качество прогнозирования, функции импульсного отклика, результаты тестов причинности и др.



Таблица 4.20. (продолжение)

Chi-square(2)	4.153492			
Probability	0.125337			
Cointegrating Eq:	CointEq1			
LPRICE(-1)	1			
LDIV(-1)	-1			
R20(-1)	0.177477			
	-0.04289			
	[ 4.13803]			
RS(-1)	0			
C	-3.89083			
	-0.45587			
	[-8.53496]			
Error Correction:	D(LPRICE)	D(LDIV)	D(R20)	D(RS)
CointEq1	0.006394	0.006823	-0.01529	-0.0182
	-0.00335	-0.00078	-0.01969	-0.02952
	[ 1.90871]	[ 8.74625]	[-0.77672]	[-0.61646]
...		...		...

#### 4.5.5. Обзор нелинейных моделей коинтеграции

В нескольких относительно недавних работах показано (см., например, [Michael et al. (1997)], [Sarantis (1999)]), что пороговые нелинейные модели позволяют объяснить характер изменения обменных валютных курсов. Кроме того, показано, как с использованием пороговых авторегрессионных моделей (ПАР-моделей) можно показать характерные пороговые нелинейности в узких панелях европейских индексов потребительских цен и обменных валютных курсов (см. [O'Connell (1998)]). В работе [Obstfeld, Taylor (1997)] показано, что линейность для большого числа временных рядов внутривалютных детализированных цен нарушается, так же как и для временных рядов агрегированных межстрановых обменных курсов. В работах [O'Connell, Wei (1997)], [Parsley, Wei (1996)] продемонстрировано, что нелинейности существуют и в детализированных данных по ценам в США; в работе [Lo and Zivot (2001)] продемонстрировано наличие пороговой коинтеграции для цен пар «торгуемых» товаров. Принятая ниже структуризация материала во многом опирается на работу [Ihle, von Cramon — Taubadel (2008)].

Все эти работы в большей или меньшей степени мотивированы идеей, которая заключается в том, что арбитраж — это сила, которая исключает паритет покупательной способности или закон единой цены: т. е. если разница между ценами на один и тот же товар в двух странах больше, чем величина трансакционных издержек в торговле между этими странами, тогда арбитраж приводит к тому, что разница цен на этот

товар уменьшается до нуля, и этот механизм «нащупывания» равновесия отражен в наблюдаемом соотношении рассматриваемых цен. Однако, если разница между этими ценами меньше, чем величина транзакционных издержек в торговле, арбитраж не возникает и в простейшем случае цены будут меняться независимо друг от друга. Закон единой цены изучается эмпирически, главным образом, двумя способами: *абсолютные разности* (разности цен  $P_{1t} - P_{2t}$ ) или фиксированные транспортные расходы (см. [O'Connell, Wei (1997)], [Park et al. (2007)]) и *относительные отклонения* (разности логарифмов цен  $= \ln P_{1t} - \ln P_{2t}$ ) или пропорциональные транспортные расходы (см. [O'Connell, Wei (1997)], [Lo, Zivot (2001)]).

По большей части в эмпирических работах для описания характера данных используются нелинейные модели и не производится никаких спецификационных тестов для того, чтобы убедиться в том, что эти модели адекватны в действительности. Кроме того, транзакционные издержки накладывают ограничения симметричности порогов и симметричности скорректированных параметров. Эти ограничения обычно не тестируются. Лишь совсем недавно, благодаря теоретическим изысканиям, отраженным в работах [Balke, Fomby (1997)], [Tsay (1998)], [Hansen (1999)], [Lo, Zivot (2001)], [Hansen, Seo (2002)], [Gonzalo, Pitarakis (2006)] и [Seo (2006)], процедуры тестирования начали использоваться практиками, см., например, [Serra, Goodwin (2003)] и [Park et al. (2007)].

Многие классы нелинейных моделей временных рядов возникли в 70–80-х гг. прошлого века. По-видимому, именно в работе [Tong (1978)] впервые введен класс так называемых *пороговых моделей*. Достаточно общая формулировка нелинейных моделей предложена в работах [Priestley (1980)] и [Tjgøstheim (1986)]. В работе [Tong (1990)] содержится общая классификация нелинейных моделей временных рядов.

Класс *пороговых авторегрессионных* моделей (thershold autoregressive models: ПАР- или, в англоязычной литературе, TAR-модели), по всей видимости, один из наиболее интересных классов, которому уделяется большое внимание как со стороны практиков, так и со стороны теоретиков. Этот класс моделей подразделяется на три группы: группу *кусочно-полиномиальных* моделей, группу *кусочно-линейных* моделей и группу *гладких авторегрессионных* моделей. Принадлежность к той или иной группе определяется функциональной зависимостью значения временного ряда  $X_t$  в момент времени  $t$  от исторических значений  $\{X_p\}_{p < t}$ . Общий вид линейной пороговой модели может быть записан как:

где  $\mathbf{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})'$ , а через  $J_t$  обозначена случайная величина, которая при фиксированном  $t$  принимает одно из значений  $\{1, 2, \dots, l\}$ . Другими словами,  $J_t$  — индикаторная переменная, сигнализирующая о состоянии/режиме, в котором находится временной ряд  $\{X_t\}$  в момент времени  $t$ . При фиксированном состоянии  $J_t = j$  неслучайные матрицы  $\mathbf{A}^{(j)}$  и  $\mathbf{H}^{(j)}$  размерности  $(k \times k)$  содержат авторегрессионные коэффициенты и коэффициенты, которые отвечают за гетероскедастичность соответственно. Вектор  $\mathbf{C}^{(j)}$ , размерность которого  $(k \times 1)$ , включает константы, а через  $\varepsilon_t$  обозначена последовательность независимых одинаково распределенных  $k$ -мерных случайных векторов, имеющих нулевые средние значения и некоторую ковариационную матрицу. Таким образом, для каждого фиксированного состояния  $J_t = j$  соотношение является локально линейным с некоторыми фиксированными коэффициентами и константами: в рамках этой модели локальность относится не к близости к конкретной точке во времени, а к определенной области пространства состояний временного ряда. В этом смысле, линейность относится к постоянству параметров в такой области. Таким образом, локальная линейность является ключевым свойством ПАР-моделей. Это свойство состоит в том, что параметры этой модели могут быть непостоянными, но они обязаны быть постоянными при фиксированном состоянии/режиме временного ряда. Такие параметры модели называют *зависимыми от состояния* или *зависимыми от режима*.

Индикаторная переменная  $J_t$  в (4.141) является определяющим элементом нелинейного характера уравнения. Реализации  $J_t$  в различные моменты времени  $t$  формируют временной ряд состояний (режимов)  $\{J_t\}$ , который называют *процессом, генерирующим режимы* (ПГР) временного ряда. Состояния пороговой модели могут быть сгенерированы при помощи одного из следующих базовых механизмов:

$$\begin{aligned} J_t &= f(X_{t-p}), \quad t > p, \quad t > q \\ J_t &= f(Y_{t-p}), \quad t > p, \quad t > q \\ J_t &= f(X_{t-p}, Y_{t-q}), \quad t > p, \quad t > q \end{aligned}$$

(смысл целочисленности неотрицательного параметра  $q$  см. ниже).

**Первый случай** отвечает *эндогенной* детерминации режимов для временного ряда  $\{X_t\}$  по его историческим данным. В работе [Tong (1990)] этот класс моделей называется *самовозбуждаемой пороговой авторегрессией* (self-exciting TAR models: СВПАР- или SETAR-модели), поскольку режимы временного ряда  $\{X_t\}$  полностью генерируются по значениям самого временного ряда. В работе [Tong (1990)] такие модели обозначены как СВПАР( $l; k_1, k_2, \dots, k_l$ ), где через  $l$  обозначено число

режимов, а  $k_j, j = 1, 2, \dots, l$  — лаговая длина модели при  $j$ -м состоянии (в работе [Hansen (1999)] такие модели обозначены как СВПАР( $l$ ), где  $l$  — число режимов модели).

**Второй случай** отвечает экзогенной детерминации лагированными на  $q$  периодов значениями некоторых других временных рядов  $\{Y_t\}$ . В этом случае состояния пороговой модели не зависят от  $\{X_t\}$  и генерируются при помощи другого наблюдаемого временного ряда. В работе [Tong (1990)] такая детерминация режимов называется *незамкнутой пороговой авторегрессионной системой* (open-loop threshold autoregressive system: НПАРС или TARSO). Если  $\{Y_t\}$  представляет собой реализацию пороговой модели, а ее режимы экзогенно детерминированы временным рядом  $\{X_t\}$ , то в этом случае пороговую модель называют *замкнутой пороговой авторегрессионной системой* (ЗПАРС или TARSC), т. е. в этом случае состояния каждого из двух временных рядов определяется состояниями другого. Другой возможностью, среди прочих, является детерминация состояния множеством неизвестных (экзогенных) переменных, которые по тем или иным причинам не могут быть идентифицированы или измерены, поэтому описание процесса состояний возможно только при помощи условных вероятностей. Таким образом, состояния временного ряда  $\{X_t\}$  могут быть сгенерированы при помощи марковской цепи, и тогда результирующая модель называется авторегрессией с марковскими переключениями (Markov-switching autoregressive: АРСМП или MSAR), которую можно легко преобразовать в *модель коррекции остатками с марковскими переключениями* (МКОсМП или MSVECM).

**Третий случай** детерминации режимов можно понимать как смесь двух упомянутых выше случаев, в котором состояния временного ряда  $\{X_t\}$  определяются комбинацией лагированных значений временного ряда  $\{X_t\}$  и некоторых экзогенных временных рядов  $\{Y_t\}$ . Если зависимые переменные такой системы выражены не в уровнях, а в разностях, то результирующая кусочно-линейная ПАР-модель со смешанной детерминацией режимов называется *пороговой векторной моделью коррекции остатками* (ПВМКО или TVECM). Таким образом, ПВМКО и МКОсМП принадлежат классу кусочно-линейных ПАР-моделей.

#### 4.5.6. Пороговая векторная модель коррекции остатками (ПВМКО)

**Общее определение ПВМКО.** Несмотря на то что статистическая модель, основанная на идее введения порогов, была впервые предложена в работе [Whittle (1954)], класс пороговых моделей был впервые математически формализован в работе [Tong (1978)], автор которой



далее совместно с другими исследователями, последовательно развивали это направление исследований (см. [Tong (2007)] и ссылки в этой работе). Как следует из вышеизложенного, коинтеграционная теория стала развиваться во второй половине 80-х гг., что дало дополнительный толчок исследованиям, посвященным анализу нестационарных временных рядов.

*Пороговая коинтеграция* впервые была представлена в работе [Balke, Fomby (1997)]. Авторы этой работы заметили, что коррекция отклонений от долгосрочного состояния равновесия, т. е. коррекция остатками равновесия, может иметь пороговый характер. С тех пор пороговые векторные модели коррекции остатками привлекли внимание исследователей занятых как в области финансов, так и в области экономики (см., например, [Serra, Goodwin (2003, 2004)], [Balcombe et al. (2007)], [Ben-Kaabia, Gil (2006)], [Frey, Manera (2007)], [Park et al. (2007)] и ссылки в этих работах).

Возможность существования нелинейных ценовых переходов была впервые высказана в качестве гипотезы в работе [Heckscher (1916)], которая опиралась на закон единой цены, сформулированный в работе [Marshall (1890), с. 325]. В контексте международной торговли Хекшер предложил так называемый интервал бездействия, который определяется тем, что малые отклонения от равновесной цены не корректируются. Это происходит в силу того, что транзакционные издержки выше, чем потенциальная прибыль от разницы в ценах на один и тот же товар. Важно отметить, что эти транзакционные издержки включают не только транспортные расходы, но и, например, стоимость поиска предложений, стоимость организации переговоров, страхование, премию за риск. Следовательно, переход ценовых сигналов между рынками зависит от того, входит ли отклонение от равновесной цены в интервал бездействия. Таким образом, ценовой переход зависит от величины ценового спреда  $p_t^B - p_t^A$  между рынком  $B$  и рынком  $A$ , что демонстрирует характер, определяемый режимом/состоянием. Если спред больше, чем определенное значение  $\tau$ , то торговый сдвиг предложения от рынка  $A$  к рынку  $B$  вызовет увеличение цены  $p_t^A$  и снижение цены  $p_t^B$ . Этот механизм будет снижать разность между этими ценами до тех пор, пока она не станет меньше порогового значения  $\tau$ . Таким образом, уравнение  $p_t^B - p_t^A - \tau = 0$  является соотношением равновесия. Если  $p_t^A$  и  $p_t^B$  являются  $I(1)$ , то мы получаем коинтеграционное соотношение с ошибкой равновесия равной  $p_t^B - p_t^A - \tau$ , которая корректируется процессом торговли до тех пор, пока оно не станет отрицательным. Однако отрицательные значения ошибки ограничены снизу вторым порогом, который измеряет транзакционные издержки торговли в обратном направлении

первым порогом). В этом смысле пороговые модели являются адекватными как с теоретической точки зрения, так и с позиции интуитивного понимания. Более того, зависимые переменные обычно выражаются в первых разностях, т. е. в терминах  $\Delta p_t^A = p_t^A - p_{t-1}^A$ ,  $\Delta p_t^B = p_t^B - p_{t-1}^B$ , так что режимы каждого из ценовых рядов определяются в соответствующей модели коррекции остатками членом, который сам является функцией от обоих этих ценовых рядов. Таким образом, пороговая авторегрессионная модель с третьим типом детерминации режимов в форме пороговой векторной модели коррекции остатками (т. е. ЗПАРС в форме ПВМКО) является подходящей моделью.

Работа [Obstfeld, Taylor (1997)] является первой публикацией, в которой дана ссылка на так называемую *гипотезу Хекшер*. В работах [O'Connell, Wei (1997)] и [Trenkler, Wolf (2003)] эта идея извлечена из экономической теории. Несколько теоретических моделей в области анализа обменных валютных курсов позволили получить результаты, совпадающие с гипотезой Хекшер (см., например, [Dumas (1992)], [Uppal (1993)], [Sercu et al. (1995)], [Coleman (1995, 2004)]).

В общем виде ПВМКО может быть представлена в форме:

$$\Delta \mathbf{p}_t = \boldsymbol{\alpha}^{(J_t)} - \mathbf{B}^{(J_t)} \boldsymbol{\Gamma}' \mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(J_t)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (4.142)$$

если  $\theta^{(r-1)} < \boldsymbol{\Gamma}' \mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(r)}$ ,

где  $\mathbf{p}_t = (p_t^A, p_t^B)'$  — вектор цен на рынках *A* и *B*, а  $r = 1, 2, \dots, l, l+1$  — индекс для режимов. Через  $\boldsymbol{\alpha}^{(J_t)}$  обозначено среднее, зависящее от режима, где верхний индекс  $J_t = r$  сигнализирует о зависимости параметра от режима.  $\mathbf{B}^{(J_t)}$  — вектор нагрузки, который состоит из параметров, зависящих от режима и характеризующих, в какой степени изменения цены  $\Delta \mathbf{p}_t$  реагируют на отклонения от долгосрочного равновесия, лагированные на  $d$  периодов.

Значения  $\theta^{(r)}$  упорядочены таким образом, что  $\theta^{(0)} < \theta^{(1)} < \dots < \theta^{(l)} < \theta^{(l+1)}$ , где  $\theta^{(0)} = -\infty$ ,  $\theta^{(l+1)} = \infty$ , называемые *пороговыми параметрами*, или, если коротко, *порогами*. Важно отметить, что число эффективных порогов,  $\theta^{(1)} < \dots < \theta^{(l)}$  равно  $l$ . Мы предполагаем, что пороги не зависят от времени, поскольку именно такая спецификация используется в прикладной литературе. Лишь недавно начали появляться некоторые модели, которые ослабляют это предположение (см., например, [Van Campenhout (2007)], где для порогов строится линейная модель от времени, или [Park et al. (2007)], где предложена динамическая модель изменения ежедневных порогов).

Переменная, определяющая соответствующий режим в момент времени  $t$ , называется *пороговой переменной*, а в случае ПВМКО это все-

гда отклонение от долгосрочного равновесия. Предполагается, что она образует стационарную случайную последовательность, которая имеет непрерывную функцию распределения, тогда как  $d \in \mathcal{N}^+$  называют *параметром запаздывания*.

Очевидно, что нелинейная ПВМКО является обобщением векторной модели коррекции остатками и каждый порог  $\theta^{(r)}$  значим (в вероятностном смысле) только в случае, если  $0 < P[\theta^{(r-1)} < \Gamma' \mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(r-1)}] \leq 1$ . Другими словами, если реализации пороговой переменной возникают с вероятностью, большей нуля, то они наблюдаемы в каждом режиме.

Путем введения фиктивных переменных для каждого режима модель может быть сформулирована в более компактной форме в терминах многомерной регрессионной модели подобно тому, как это сделано в работе [Hansen, Seo (2002)]:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_t &= \mathbf{A}^{(1)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(1)} + \dots + \mathbf{A}^{(l)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(l)} + \varepsilon_t = \\ &= \sum_{r=1}^l \mathbf{A}^{(r)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(r)} + \varepsilon_t = \mathbf{A}^{(J_t)'} \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (4.143)$$

где  $\mathbf{A}^{(J_t)}$  — матрица коэффициентов, а  $\mathbf{X}_{t-1} = (1 \Gamma' \mathbf{p}_{t-1} \Delta \mathbf{p}_{t-1} \dots \Delta \times \mathbf{p}_{t-p+1})'$  — вектор регрессоров модели (4.143). Далее,  $\mathbf{d}_t^{(r)} = \mathbf{1}_{(\theta^{(r-1)} < \Gamma' \mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(r)})}$  обозначает фиктивную переменную, сигнализирующую об  $r$ -м режиме временного ряда в момент времени  $t$ , а  $\mathbf{1}(\cdot)$  — индикаторная функция. Выражая режимы ценовых временных рядов в терминах индикаторной переменной  $J_t$ , мы получим частный случай модели (4.141).

Отметим, что в большинстве приложений коинтегрирующий вектор предполагается известным и равным  $\Gamma = (1, -1)'$  (поскольку из закона единой цены следует, что разность  $p_t^B - p_t^A$  должна быть  $I(0)$ ), поэтому пороговая переменная равна остатку из коинтегрирующего соотношения  $\Gamma' \mathbf{p}_{t-1} = p_t^B - p_t^A$ , а остатки в каждом режиме имеют общую ковариационную матрицу  $\Sigma$ .

**Частные случаи модели.** В работах [Balke, Fomby (1997)] и [Lo, Zivot (2001)] введены определенные ограничения на модель, которые могут быть весьма приемлемыми для прикладного анализа. Следуя идее Хекшера, пара ценовых временных рядов может не быть коинтегрированной парой в случае, если цены попадают в так называемый *интервал бездействия*, определяемый транзакционными издержками. В этом случае разность  $\Delta \mathbf{p}_t$  ведет себя как случайное блуждание около нуля. Следовательно, в режиме  $j = 2$ , когда цены попадают в «интервал бездействия»,  $\mathbf{B}^{(2)} = 0$ , и зависимое от режима среднее равняется

В зависимости от центра притяжения механизма коррекции остатками (который определяется режимом) мы будем различать следующие частные случаи. Если остатки осуществляют коррекцию так, чтобы временной ряд попадал в некоторый интервал вокруг долгосрочного равновесия, которое равно зависящему от режима среднему (равному  $\alpha^{(1)}$  — для режима  $j = 1$ ; нулю — для режима  $j = 2$ ;  $\alpha^{(3)}$  — для режима  $j = 3$ ), то модель называется *интервальной ПВМКО (И-ПВМКО или BAND-TVECM)* и принимает следующий вид:

$$\Delta \mathbf{p}_t = \begin{cases} \alpha^{(1)} - \mathbf{B}^{(1)}\Gamma'\mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(1)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } \theta^{(0)} < \Gamma'\mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(1)} \\ \alpha^{(2)} - \mathbf{B}^{(2)}\Gamma'\mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(2)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } \theta^{(1)} < \Gamma'\mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(2)} \\ \alpha^{(3)} - \mathbf{B}^{(3)}\Gamma'\mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(3)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } \theta^{(2)} < \Gamma'\mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(3)}. \end{cases}$$

Если же остатки корректируют так, чтобы временной ряд «притягивался» к долгосрочному равновесию, тогда  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(3)} = 0$ , и в этом случае модель называется *равновесной-ПВМКО (Р-ПВМКО или EQ-TVECM)* и принимает вид:

$$\Delta \mathbf{p}_t = \begin{cases} -\mathbf{B}^{(1)}\Gamma'\mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(1)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{if } \theta^{(0)} < \Gamma'\mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(1)} \\ -\mathbf{B}^{(2)}\Gamma'\mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(2)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{if } \theta^{(1)} < \Gamma'\mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(2)} \\ -\mathbf{B}^{(3)}\Gamma'\mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(3)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{if } \theta^{(2)} < \Gamma'\mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(3)}. \end{cases}$$

Если оба порога равны по величине, т. е. если  $-\theta^{(1)} = \theta^{(2)}$ , то в этом случае мы имеем дело с так называемой **симметричной ПВМКО (С-ПВМКО или S-TVECM)**. Равенство порогов отражает идентичность транзакционных издержек в обоих направлениях торговли.

**Процедура оценивания.** Существуют различные техники оценивания пороговых моделей в целом и ПВМКО в частности. Эти подходы могут быть разделены на два класса.

- Класс моделей, в которых критерий выбора порогов состоит в *минимизации суммы квадратов остатков* модели (см., например, [Balke, Fomby (1997)], [Hansen (1999)], [Goodwin, Piggott (2001)], [Do Zivot (2001)], [Park et al. (2007)]).

- Класс моделей, в которых пороги выбираются при помощи *максимизации функции правдоподобия* (см., например, [Obstfeld, Taylor (1997)], [Hansen, Seo (2002)], [Serra, Goodwin (2003)]).

Эти два критерия отнюдь не эквивалентны, поскольку последний из них не учитывает корреляцию между уравнениями, тогда как первый из них учитывает это в явном виде. Однако результаты симуляционного моделирования Монте-Карло, представленные в работе [Serra, Goodwin (2002)], показывают, что учет корреляции между уравнениями не увеличивает точность оценок параметров в условиях малых выборок, и оба упомянутых метода дают похожие результаты оценивания.

Опишем указанные выше методологии при помощи компактной записи, представленной уравнением (4.143) для двумерной ПВМКО с двумя режимами и  $(p - 1)$  лагами:

$$\Delta \mathbf{p}_t = \mathbf{A}^{(1)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(2)} + \varepsilon_t, \quad (4.144)$$

где  $\mathbf{d}_t^{(1)} = \mathbf{I}_{\{-\infty = \theta^{(0)} < \Gamma' \mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(1)}\}}$  и  $\mathbf{d}_t^{(2)} = \mathbf{I}_{\{\theta^{(1)} < \Gamma' \mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(2)} = +\infty\}}$ , а  $\mathbf{I}_{\{c_1 < y \leq c_2\}} = 1$  при выполнении указанного неравенства и  $\mathbf{I}_{\{c_1 < y \leq c_2\}} = 0$  в противном случае ( $\mathbf{I}_{\{\cdot\}}$  — так называемая индикаторная функция множества  $\{\cdot\}$ ). В прикладных работах необходимо ограничивать порог  $\theta^{(1)}$  таким образом, чтобы каждый режим включал бы минимальное число наблюдений. Если обозначить через  $T_r$  число наблюдений в режиме  $r$ , а через  $T$  — общее число наблюдений, то, как предлагается в работе [Hansen (1999)], ограничения порогов должны быть такими, что при  $T \rightarrow \infty$ ,  $T_r/T \geq \tau$  для некоторого  $\tau \in (0, 1)$ . Хансен предлагает полагать  $\tau$  равным 0,1. Модель (4.144) можно оценивать при помощи *последовательного многомерного метода наименьших квадратов*, реализуемого в два этапа:

- 1) при заданных  $\theta^{(1)}$  и  $d$  параметры  $(\mathbf{A}^{(1)'}, \mathbf{A}^{(2)'})$  могут быть оценены при помощи многомерного метода наименьших квадратов. При этом сумма квадратов остатков равна:

$$S_{LS}(\theta^{(1)}, d) = \text{trace}[\hat{\Sigma}(\theta^{(1)}, d)], \quad (4.145)$$

где  $\hat{\Sigma}(\theta^{(1)}, d)$  обозначает оценку  $\Sigma = \text{var}(\varepsilon_t)$  многомерным методом наименьших квадратов при заданных  $(\theta^{(1)}, d)$ .

- 2) на втором шаге методом наименьших квадратов вычисляются оценки  $(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{d})$ :

$$(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{d}) = \arg \min_{\theta^{(1)}, d} S_{LS}(\theta^{(1)}, d);$$

требование  $T_r \geq \tau T$  ограничивает процедуру поиска  $\theta^{(1)}$  значениями  $\Gamma' p_{t-d}$ , которые должны лежать между  $T$ -м и  $(1 - T)$ -м квантилями. Итоговые оценки  $\mathbf{A}^{(J_t)}$  даются  $\hat{\mathbf{A}}^{(J_t)} = \hat{\mathbf{A}}^{(J_t)}(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{d})$ , а оценка ковариационной матрицы остатков определяется матрицей  $\hat{\Sigma}(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{d})$ .

В работе [Tsay (1998)] показано, что при достаточно слабых условиях регулярности оценки, полученные последовательным условным многомерным методом наименьших квадратов  $(\hat{\mathbf{A}}^{(1)}, \hat{\mathbf{A}}^{(2)}, \hat{\theta}^{(1)}, \hat{d})$ , являются сильно состоятельными, а МНК-оценки  $\hat{\mathbf{A}}^{(1)}, \hat{\mathbf{A}}^{(2)}$  еще и асимптотически нормально распределены и не зависят от  $\theta^{(1)}, d$ . Кроме того, оценки  $\hat{\theta}^{(1)}$  и  $\hat{d}$  сходятся со скоростью  $T$ .

Если мы рассмотрим общий вид ПВМКО с тремя режимами,

$$\Delta p_t = \mathbf{A}^{(1)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(2)} + \mathbf{A}^{(3)'} \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{d}_t^{(3)} + \varepsilon_t, \quad (4.146)$$

то при заданных  $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, d)$  мы можем оценить параметры  $(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(3)})$  при помощи многомерного метода наименьших квадратов. Получив сумму квадратов остатков  $S_3(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, d)$ , оценки для  $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$  и  $d$  могут быть найдены путем минимизации  $S_3(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, d)$  с использованием трехмерного поиска по сетке. Однако этот метод является весьма затратным с вычислительной точки зрения, поскольку если для каждой пары  $\theta^{(1)}$  и  $\theta^{(2)}$  оцениваются  $N$  точек, то поиск по сетке значений  $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, d)$ , реализуемый на втором шаге, включает  $d \times N^2$  регрессий. Если  $N$  достаточно велико, то эта процедура достаточно трудоемка. В работе [Hansen (1999)] предлагается использовать способ вычислительной экономии при помощи последовательного оценивания множественных контрольных точек, описанного в работе [Baï (1997)]. На первом шаге мы оцениваем методом наименьших квадратов (неправильно специфицированную) двухрежимную модель (4.144) и получаем значения  $(\hat{\theta}^1, \hat{d})$ . Результаты работы [Baï (1997)] показывают, что  $\hat{d}$  будет состоятельной оценкой для  $d$ , тогда как  $\hat{\theta}^1$  будет состоятельной для одной из компонент пороговой пары  $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ . Далее, методом наименьших квадратов для (4.146) мы оцениваем  $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$  при  $d = \hat{d}$  и при условии, что одна из компонент вектора  $(\theta^{(1)}; \theta^{(2)})$  равна  $\hat{\theta}^1$ . Полученная оценка  $\hat{\theta}^2$  будет состоятельной оценкой для другой компоненты пары  $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ .

Для других классов моделей пороги выбираются с использованием **метода максимума правдоподобия**. Этот и описанный выше методы оценки могут показаться на первый взгляд очень непохожими. Но они значительно более близки, чем может показаться: предыдущий метод минимизирует след матрицы  $\Sigma$ , т. е.  $\text{Trace} \Sigma(\theta)$ , тогда как

второй метод минимизирует логарифм детерминанта ковариационной матрицы остатков, т. е.  $\ln |\hat{\Sigma}(\theta^{(1)}, d)|$ .

Отметим, что в первом классе моделей коинтеграционный вектор  $\Gamma = (1, -\gamma)'$  предполагается известным ( $\gamma = 1$ ), а  $d$  должно быть оценено, тогда как во втором классе  $d$  фиксировано и равно 1, а  $\gamma$  необходимо оценить: таким образом, мы имеем два параметра, которые должны быть оценены в обоих случаях.

С учетом этих замечаний алгоритм, основанный на методе максимума правдоподобия, состоит из следующих шагов.

- С использованием подхода, представленного в [Johansen (1988)], из линейной ВМКО получим оценку  $\tilde{\gamma}$ . При заданном  $\tilde{z}_{t-1} = z_{t-1}(\tilde{\gamma}) = \Gamma' p_{t-1}$ , формируем равномерную сетку на  $[\theta^L; \theta^U]$  и на  $[\gamma^L; \gamma^U]$ .
- Для всех попарных комбинаций  $(\gamma, \theta^{(1)})$  соответствующей сетки при помощи МНК оцениваем  $(\hat{\mathbf{A}}^{(1)'}, \hat{\mathbf{A}}^{(2)'})$  и  $\hat{\Sigma}$ .
- Определим оценки  $(\hat{\gamma}, \hat{\theta}^{(1)})$  как значения  $(\gamma, \theta^{(1)})$ , при которых максимизируется функция максимального правдоподобия:

$$\begin{aligned} \ln L_C(\gamma, \theta^{(1)}) &= \\ &= L \left[ \hat{\mathbf{A}}^{(1)'(\gamma, \theta^{(1)})}, \hat{\mathbf{A}}^{(2)'(\gamma, \theta^{(1)})}, \hat{\Sigma}(\gamma, \theta^{(1)}), \gamma, \theta^{(1)} \right] = \quad (4.147) \\ &= -\frac{nT}{2} - \frac{T}{2} \ln(|\hat{\Sigma}(\gamma, \theta^{(1)})|). \end{aligned}$$

- Возьмем  $\hat{\mathbf{A}}^{(1)'(\gamma, \theta^{(1)})} = \hat{\mathbf{A}}^{(1)'(\hat{\gamma}, \hat{\theta}^{(1)})}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}^{(2)'(\gamma, \theta^{(1)})} = \hat{\mathbf{A}}^{(2)'(\hat{\gamma}, \hat{\theta}^{(1)})}$  и  $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}(\hat{\gamma}, \hat{\theta}^{(1)})$ .

Из (4.146) следует, что оценки максимума правдоподобия минимизируют логарифм детерминанта ковариационной матрицы:

$$(\hat{\gamma}, \hat{\theta}^{(1)}) = \arg \min_{\gamma, \theta^{(1)}} S_{ML}(\gamma, \theta^{(1)}) = \arg \min_{\gamma, \theta^{(1)}} \ln |\hat{\Sigma}(\gamma, \theta^{(1)})|. \quad (4.148)$$

Сравнивая (4.145) и (4.148), легко заметить, что оценка максимума правдоподобия учитывает корреляцию между уравнениями, тогда как первый подход, основанный на последовательных наименьших квадратах, ее не учитывает. Следовательно, вполне возможно, что два различных подхода могут дать различные ответы в терминах пороговых эффектов. Однако, как указывалось выше, в работе [Serra, Goodwin (2002)] показано, что оба критерия дают одни и те же результаты оценивания. Наконец, в работе [Hansen, Seo (2002)] отмечается, что нельзя с уверенностью заявлять, что точка  $(\hat{\gamma}, \hat{\theta}^{(1)})$ , в которой достигается минимум, будет единственна, поскольку логарифмическая функция прав-

#### 4.5.7. Тестирование пороговой коинтеграции

**Обзор результатов.** В работе [Balke, Fomby (1997)] были впервые рассмотрены некоторые проблемы, связанные с тестированием пороговой коинтеграции. В ней отмечается, что тестирование нулевой гипотезы, предполагающей отсутствие коинтеграции, против альтернативной гипотезы, предполагающей наличие пороговой коинтеграции, осложняется тем, что необходимо сочетать использование асимптотической статистики для тестирования на единичный корень и наличие параметров, которые присутствуют только в модели, отвечающей альтернативной гипотезе. В качестве решения в работе [Balke, Fomby (1997)] предлагается *двухшаговая стратегия*: на первом шаге тестируется нулевая гипотеза, которая предполагает, что модель линейная без коинтеграции, против альтернативы, что модель линейная с наличием коинтеграции; если нулевая гипотеза отвергается, то тестируется нулевая гипотеза о наличии линейной коинтеграции против альтернативы о наличии пороговой коинтеграции.

В работе [Lo, Zivot (2001)] используется подход, похожий на двухшаговый подход Белке – Фомби, но применительно к процедурам многомерного оценивания и тестирования. Их идея заключается в том, что, если двумерная ПВМКО является подходящей моделью, тогда многомерные процедуры, которые учитывают структуру модели, должны иметь большую мощность, чем одномерные процедуры, в которых не учитываются ограничения, возникающие из многомерной структуры. Они анализируют мощность многомерного теста гипотезы об отсутствии коинтеграции на первом шаге, а затем рассматривают мощность многомерных тестов линейности на втором шаге. В работе впервые сформулировано утверждение, состоящее в том, что пороговая природа альтернативной гипотезы может значительно уменьшить мощность стандартного теста, реализуемого на первом шаге. Соответственно в работе рассматриваются тесты на единичные корни, предложенные в работах [Enders, Granger (1998)], [Berben, van Dijk (1999)], которые строятся таким образом, что обладают достаточной мощностью против пороговых альтернатив. Более того, Ло и Зивот предложили еще и третий шаг, включающий спецификационный анализ формы пороговой модели, основанный на тестах вложенных гипотез в рамках пороговой модели достаточно общего вида без ограничений.

В работе [Hansen, Seo (2002)] развивается теория оценивания и тестирования, основанная на методе максимума правдоподобия. Авторы в своем исследовании исходили из представления коинтегрированных систем в форме модели коррекции остатками с потенциальными пороговыми эффектами. Они рассмотрели ВМКО, включающую известный



единственный коинтегрирующий вектор, в которой пороговый эффект отвечает слагаемому коррекции остатком. В частности, на первом шаге авторы применили расширенный тест Дикки–Фуллера, а затем воспользовались Sup-LM-тестом, разработанным ими для двухрежимной ПВМКО.

Однако, этот подход может оказаться недееспособным, поскольку при альтернативной пороговой коинтеграции стандартные коинтеграционные тесты могут приводить к существенной потере мощности (см. работы [Pippenger, Goering (2000)], [Taylor (2001)], [Lo, Zivot (2001)] и [Seo (2006)]). В связи с этим в работе [Seo (2006)] был предложен тест на коинтеграцию для ПВМКО с заданным коинтегрирующим вектором, в котором проверяется нулевая гипотеза об отсутствии коинтеграции в линейной модели. В частности, в работе [Seo (2006)] предложена sup-Wald-статистика для тестирования нулевой гипотезы об отсутствии коинтеграции против альтернативной ПВМКО и показана ее состоятельность. Кроме того, в этой статье для аппроксимации функции распределения этой статистики предлагается бутстреп-процедура, основанная на остатках. Этот тест демонстрирует значительно большую эмпирическую мощность при пороговой коинтеграционной альтернативе, чем другие стандартные тесты. При этом разница в мощностях становится больше при увеличении объема выборки.

В работе [Gonzalo, Pitarakis (2006)] представлены дальнейшие результаты анализа пороговых эффектов и предложен тест вальдовского типа для проверки нулевой гипотезы о линейности против пороговой нелинейности в долгосрочном равновесии ВМКО. Предлагаемый тест строится без каких-либо предположений относительно коинтеграционных свойств системы и применим безотносительно к тому, является ли система коинтегрированной или нет. Более того, в работе [Gonzalo, Pitarakis (2006)] изучается использование внешней пороговой переменной, которая может иметь экономический или финансовый характер, но которая должна быть стационарной и эргодической. Таким образом, предлагается процедура вне стандартного случая, в которой величина слагаемого, корректирующего остатки, вызывает пороговые эффекты.

Наконец, отметим, что в пороговых коинтеграционных моделях возможны четыре гипотезы: линейность без коинтеграции, наличие порогов без коинтеграции, линейность с коинтеграцией и пороговая коинтеграция. Однако ранее рассмотренный двухшаговый подход не включает гипотезу о пороговой модели без коинтеграции. Важно подчеркнуть, что тестирование на адекватность *пороговой* модели без коинтеграции (нулевая гипотеза) требует совершенно иных функций распределения, отличных от тех, которые используются при тестировании нулевой гипотезы о *линейности* без коинтеграции, а значит, невозможно предло-

жить единый тест, при помощи которого одновременно проверялись бы все нулевые гипотезы.

**Тестирование отсутствия коинтеграции против линейной коинтеграции.** Когда коинтеграционное соотношение между  $p_t^A$  и  $p_t^B$  предполагается линейным, мы можем использовать стандартный анализ для линейной коинтеграции. Следует отметить, что некоторые асимптотические результаты, справедливые для линейной коинтеграции, остаются таковыми и для случая пороговой коинтеграции. Одной из причин этого является то, что пороговая нелинейность  $z_t$  не влияет на порядок интеграции  $p_t^A$ ,  $p_t^B$  и  $z_t$ . Если отклонение от равновесия  $z_t$  удовлетворяет так называемому *условию  $\alpha$ -перемешивания*, описанному, например, в работе [Phillips (1987)], то для статистик тестов на единичные корни для  $p_t^A$  и  $p_t^B$  выполняются некоторые асимптотические результаты [Phillips (1987)]; кроме того, выполняется суперсостоятельность оценок наименьших квадратов коинтегрирующего вектора  $(1, \gamma)$ , см., например, [Stock (1987)]. Эти свойства побудили авторов работы [Balke, Fomby (1997)] предложить для тестирования нулевой гипотезы об отсутствии коинтеграции использовать стандартные одномерные тесты на единичные корни для коинтеграционных остатков  $z_t = \Gamma' p_{t-1}$ .

В работе [Balke, Fomby (1997)] показано, что тест Филлипса – Перрона (ФП-тест) имеет большую мощность, чем расширенный тест Дики – Фуллера (РДФ-тест). Это возможно, как указывается в работе, в силу непараметрической природы ФП-теста, который оказывается более мощным против пороговой коинтеграции, чем РДФ-тест. В работе [Balke, Fomby (1997)] показано, что оценка коинтегрирующего вектора приводит к потере мощности как РДФ-теста, так и ФП-теста на единичные корни, но потеря мощности для пороговых моделей по величине незначительно отличается по сравнению с линейными авторегрессиями. Однако результаты работ [Pippenger, Goering (1993)], [Balke, Fomby (1997)] показывают, что стандартные тесты на единичные корни могут иметь меньшую мощность для пороговых моделей, если авторегрессионные коэффициенты во внешних режимах близки к 1 и (или) ширина интервалов  $[\theta^{r-1}, \theta^{(r)}]$  в модели с индикаторной переменной переключения: « $J_t = f(X_{t-p}), t > p, t > q$ » (см. (4.141)), велика относительно дисперсии ошибок.

В работе [Horvath, Watson (1995)] предложен *многомерный HW-тест на проверку отсутствия коинтеграции, который строится при условии, что коинтегрирующий вектор задан. Линейная ВМКО для  $p_t$  без пороговых эффектов дается соотношением:*

$$\Delta p_t = \alpha - \mathbf{B}\Gamma' p_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta p_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4.149)$$

и проверяется нулевая гипотеза  $\mathbf{B} = 0$  об отсутствии коинтеграции. Статистики Ховэса и Ватсона для тестирования условия  $\mathbf{B} = 0$  принимают вид стандартной регрессионной статистики Вальда, используемой при анализе «видимо не связанных» уравнений регрессии:

$$HW = \hat{\mathbf{B}}' var(\hat{\mathbf{B}})^{-1} \hat{\mathbf{B}},$$

где  $\hat{\mathbf{B}}$  обозначает МНК-оценку (для каждого уравнения в отдельности) параметра  $\mathbf{B}$ , а  $var(\hat{\mathbf{B}})$  — МНК-оценка ковариационной матрицы  $\hat{\mathbf{B}}$ . При справедливости нулевой гипотезы об отсутствии коинтеграции предельной функцией распределения статистики  $HW$  является функция от двумерного броуновского движения, и в работе [Horvath, Watson (1995)] представлена таблица с соответствующими критическими значениями. Кроме того, в этой работе показано, что предлагаемый тест может быть более мощным против коинтегрированных альтернатив, чем одномерный РДФ-тест на единичные корни, в особенности, когда корреляция между компонентами остатков  $\varepsilon_t$  велика. Более того, в работе [Zivot (2000)] показано, что, когда динамика данных не соответствует ограничениям, накладываемым РДФ-тестом, тестовая  $HW$ -статистика, как правило, имеет большую мощность, чем РДФ-тест. В работе [Lo, Zivot (2001)] показано, что  $HW$ -тестовая статистика имеет вдвое большую мощность по сравнению с одномерными РДФ-тестами в широком классе случаев.

Одновременно, правда, показано, что тесты, которые учитывают пороговую природу альтернативных гипотез, имеют еще большую мощность, чем  $HW$ -тест.

**Тестирование отсутствия коинтеграции против пороговой коинтеграции.** Как отмечалось выше, стандартные тесты на коинтеграцию могут оказаться маломощными, когда в качестве альтернативы выступает пороговая коинтеграция. В работах [González, Gonzalo (1997)], [Caner, Hansen (1998)], [Enders, Granger (1998)] и [Berben, van Dijk (1999)] рассматривается проблема тестирования наличия единичных корней в одномерной авторегрессионной модели против альтернативной стационарной *пороговой авторегрессионной модели*. В результате было установлено, что тесты на единичные корни могут иметь большую мощность при учете специфической природы пороговой альтернативы.

Как оказалось, методы, используемые в работах [González, Gonzalo (1997)], [Caner, Hansen (1998)], [Enders, Granger (1998)] и [Berben, van

Dijk (1999)], могут быть применены к коинтеграционным остаткам  $z_t = \Gamma' p_{t-1}$ . Но при этом необходимо проявить осторожность, поскольку некоторые из этих тестов требуют выполнения определенных предположений относительно природы переменной перехода  $z_{t-1}$ , которые не выполняются в случае ПВМКО. Правда, тесты, предложенные в работах [Enders, Granger (1998)], [Verben, van Dijk (1999)], не требуют, чтобы при справедливости нулевой гипотезы переменная перехода была стационарной, а потому их использование в данном контексте является корректным. В частности, в работе [Enders, Granger (1998)] рассматривается тестирование на единичные корни для следующей двухрежимной пороговой авторегрессионной модели:

$$\Delta z_t = \begin{cases} \phi^{(2)}(z_{t-1} - c) + \varepsilon_t, & \text{если } z_{t-1} > c, \\ \phi^{(1)}(z_{t-1} - c) + \varepsilon_t, & \text{если } z_{t-1} \leq c. \end{cases} \quad (4.150)$$

Пороговое значение  $c$  оценивается как выборочное среднее  $z_{t-1}$ , а тестирование нулевой гипотезы, состоящей в том, что  $\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 0$ , производится с использованием стандартной  $F$ -статистики следующей регрессии:

$$\Delta z_t = \phi^{(1)}(z_{t-1} - \hat{c})\mathbf{I}_{(z_{t-1} \leq \hat{c})} + \phi^{(2)}(z_{t-1} - \hat{c})\mathbf{I}_{(z_{t-1} > \hat{c})} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta z_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (4.151)$$

где  $\hat{c}$  — выборочное среднее для  $z_{t-1}$ , а  $\mathbf{I}_{\{ \}}$  — индикаторная функция множества  $\{ \}$ , т.е.  $\mathbf{I}_{\{ \}} = 1$ , если множество в фигурных скобках выполняются, и  $\mathbf{I}_{\{ \}} = 0$  во всех остальных случаях. При справедливости нулевой гипотезы о наличии единичного корня функция распределения  $F$ -статистики представляет собой функцию от броуновского движения. В работе [Enders, Granger (1998)] даны соответствующие критические значения при различных гипотезах, касающихся детерминированной компоненты. При этом в [Enders, Granger (1998)] показано, что  $F$ -тест имеет меньшую мощность, чем РДФ-тест, в котором игнорируется пороговая природа двухрежимной альтернативы. Но  $F$ -тест может иметь большую мощность, чем РДФ-тест в трехрежимных моделях с асимметричными порогами и динамиками. Следовательно, это может быть полезно при использовании пороговых векторных моделей коррекции остатками.

В работе [Verben, van Dijk (1999)] указывается, что меньшая мощность теста Эндерса – Гранжера относительно РДФ-теста возникает, вероятно, в результате того, что первый из них строится с использованием

смещенной оценки порогового параметра в условиях, когда справедлива альтернативная гипотеза. В работе [Berben, van Dijk (1999)] предложен более мощный тест, который при справедливости альтернативной гипотезы использует состоятельную оценку порога. В частности, *их тест нулевой гипотезы*  $\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 0$  в (4.151) основан на использовании стандартной *F*-статистики, где *s* оценивается из (4.150) при помощи последовательного условного метода наименьших квадратов. В работе [Berben, van Dijk (1999)] показано, что предлагаемая ее авторами *F*-статистика может иметь значительно большую мощность, чем *F*-статистика для двухрежимной модели (4.150), если динамика является сильно асимметричной. Кроме того, в работе [Lo, Zivot (2001)] показано, что мощность тестов Эндерса – Гранжера и Ван Дийка – Бербена значительно больше, чем мощности теста Хорваса – Ватсона (который не учитывает пороговую природу альтернативы). В частности, тест Ван Дийка – Бербена (см. [Berben, Van Dijk (1999)]) имеет хорошую мощность в условиях выборок среднего размера.

В работе [Vec et al. (2004)], следуя идее, представленной в [Enders, Granger (1998)], описан тест для нулевой гипотезы на наличие единичных корней против порогового (симметричного) процесса. Однако вместо *F*-теста для произвольного порогового значения, используемого Эндерсом и Гранжером, авторы *предложили sup-Wald-тест при неизвестном пороговом значении*. Им удалось получить асимптотическое распределение в аналитическом виде, которое представляет собой функцию сложного вида от броуновского движения, и показать, что оно не зависит от «мешающего» параметра. Отметим, что в [Enders, Granger (1998)] показано, что процесс, отвечающий трехрежимной так называемой самовозбуждаемой пороговой авторегрессионной модели порядка *p* (SETAR(*p*)) и общего вида (с произвольным порядком авторегрессии), может быть стационарным процессом, для которого выполняется условие перемешивания, даже при наличии единичного корня или корня, по модулю большего единицы в среднем режиме. Упомянутая трехрежимная SETAR(*p*)-модель может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta p_t = \begin{cases} \alpha^{(1)} + \lambda_1 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(1)} \Delta p_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } z_{t-1} \leq -\theta^{(1)}; \\ \alpha^{(2)} + \lambda_2 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(2)} \Delta p_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } -\theta^{(1)} < z_{t-1} \leq \theta^{(1)}; \\ \alpha^{(3)} + \lambda_3 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(3)} \Delta p_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } \theta^{(1)} < z_{t-1}. \end{cases} \quad (4.152)$$

Цены описываются  $I(1)$ -процессом, задаваемым уравнением (4.152), если гипотеза  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  не отклоняется. В работе [Vec et al. (2004)] для тестирования  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  предложен тест, основанный на статистике, равной супремуму отношения правдоподобия, а именно:

$$\text{Sup } LR = \text{Sup}_{\theta^{(1)} \in [\theta^L, \theta^U]} LR(\theta), \quad (4.153)$$

где  $LR(\theta) = T \ln(\tilde{\sigma}^2/\hat{\sigma}^2)$ , а  $\tilde{\sigma}^2$  и  $\hat{\sigma}^2$  — суммы квадратов остатков в предположении справедливости  $H_0$  и при ее отклонении соответственно. Авторы этой работы решили обратиться к sup-тестам, имея в виду, что  $\theta^{(1)}$  на практике неизвестно и при справедливости нулевой гипотезы неидентифицируемо. А значит, не может быть оценено состоятельно. Возникновение класса таких тестов было инициировано работой [Davies (1987)], где был предложен sup-тест для проверки наличия структурных сдвигов. Для того чтобы гарантировать независимость распределений sup-тестов от неизвестных параметров, в работе [Vec et al. (2004)] было предложено выбирать интервал  $[\theta^L, \theta^U]$  следующим образом:

1. Абсолютные значения  $(z_t)_{t=1}^T$  выстраиваются в порядке возрастания,  $|z|_{(1)} < \dots < |z|_{(T)}$ .
2. Берем  $\theta^L = |z|_{([0,1T])}$  and  $\theta^U = |z|_{([0,9T])}$ , для которых по меньшей мере 20% наблюдений лежат во внешних режимах, что обеспечивает оценивание SETAR-модели по достаточному количеству выбросов.

Поскольку при справедливости нулевой гипотезы статистики sup-тестов имеют асимптотические распределения, которые представимы в аналитическом виде, в работе [Vec et al. (2004)] вычислены необходимые критические значения. Оценка критических значений возможна и при помощи параметрической бутстреп-процедуры, см., например, [Wu, Chen (2008)], где изучается сходимость паритета покупательной способности с обменными курсами, привязанными к немецкой марке, при помощи пороговой векторной модели коррекции остатками. Отметим, что в работе [Vec et al. (2004)] рассматриваются как sup-Wald, так и sup-LM тестовые статистики, но основное внимание в этой работе уделяется supLR-тестам, поскольку LR-тест известен как более надежный, чем LM- и Wald-тесты (см. [Dufour (1997)]). Более того, они показали, что мощность этих тестов значительно больше, чем РДФ-тест против широкого класса стационарных пороговых альтернатив.

В работе [Seo (2006)] представлен тест, при помощи которого проверяется нулевая гипотеза об отсутствии коинтеграции. В

в следующей модели:

$$\Delta \mathbf{p}_t = \begin{cases} \alpha^{(1)} + \lambda_1 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } z_{t-1} \leq \theta^{(1)}; \\ \alpha^{(1)} + \lambda_1 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } \theta^{(1)} < z_{t-1} \leq \theta^{(2)}; \\ \alpha^{(1)} + \lambda_2 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t, & \text{если } \theta^{(2)} < z_{t-1}, \end{cases}$$

которая в компактной форме представлена как (см. уравнение (4.143)):

$$\Delta \mathbf{p}_t = \mathbf{A}^{(J_t)'} \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (4.154)$$

В отличие от результатов работы [Bec et al. (2004)], в [Seo (2006)] предлагается использовать sup-Wald-статистику. Авторы этой работы аргументируют такой выбор тем, что тест Вальда является типичным для линейных ВМКО при проверке нулевой гипотезы об отсутствии коинтеграции, когда имеется лишь одно коинтегрирующее соотношение, известное при справедливости альтернативной гипотезы. Кроме того, в условиях нормальности остатков  $\varepsilon_t$  sup-Wald-статистика асимптотически эквивалентна LR-статистике (для более подробной информации см. [Watson (1994)]). В работе [Seo (2006)] показано, что предельное распределение sup-Wald тестовой статистики не зависит от неизвестных параметров. Кроме того, для распределения sup-Wald-статистики предложена бутстреп-аппроксимация, основанная на остатках, и показано, что бутстреп дает состоятельную оценку. Указанная бутстреп-процедура состоит в следующем.

1. При помощи последовательного метода максимального правдоподобия, описанного выше, вычислим  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)})'$ . Так что:  $\hat{\theta} = \arg \min |\hat{\Sigma}(\theta)|$  и  $\hat{\zeta}_j = \zeta_j(\hat{\theta}), j = 1, \dots, p-1$ .
2. Тогда бутстреп-выборка генерируется из модели:

$$\Delta \mathbf{p}_t^* = \sum_{j=1}^{p-1} \hat{\zeta}_j \Delta \mathbf{p}_{t-j}^* + \hat{\varepsilon}_t^*,$$

где  $\hat{\varepsilon}_t^*$  — случайная величина, распределение которой совпадает с эмпирической функцией распределения для  $\hat{\varepsilon}_t$ . В качестве начальных значений этого ряда в работе [Seo (2006)] предлагается

3. По бутстреп-выборке переоцениваются параметры и вычисляется sup-Wald-статистика:

$$\begin{aligned} \text{Sup Wald}^* = & \text{Sup}_{\theta \in \Theta} \text{vec}(\hat{\mathbf{A}}^{(J_t)*}(\theta))' \times \\ & \times \text{Var}[\text{vec}(\hat{\mathbf{A}}^{(J_t)*}(\theta))]^{-1} \text{vec}(\hat{\mathbf{A}}^{(J_t)*}(\theta)). \end{aligned} \quad (4.155)$$

4. Повторяются шаги 1–3 большое число раз. В работе [Seo (2006)] число повторений бутстреп-процедуры равняется 200.

В работе [Seo (2006)] предлагается зависимый от данных способ конструирования параметрического пространства  $\Theta$ , в котором используются квантили пороговой переменной  $|z_{t-1}|$ . В частности, предлагается брать  $\Theta = [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$ , где  $\bar{\theta}$  — некоторый квантиль для  $|z_{t-1}|$ . В результате sup-Wald-статистика вычисляется по множеству:

$$\left\{ \theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in \Theta \text{ при условии } \theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}, \right. \\ \left. \sum_{t=2}^T \mathbb{1}_{(z_{t-1} \leq \theta^{(1)})} \geq m, \sum_{t=2}^T \mathbb{1}_{(z_{t-1} > \theta^{(2)})} \geq m \right\}.$$

В работе [Seo (2006)] не изучается вопрос оптимального выбора квантиля, а попросту берется максимум последовательности  $|z_{t-1}|$ . Более того, в ней берется  $m = 10$  для того, чтобы получить осмысленную оценку для зависящего от режима параметра  $\lambda_i, i = 1, 2$ . При помощи большого числа симуляций методом Монте-Карло показано, что мощность sup-Wald-статистики превосходит мощности ADF- и HW-тестовых статистик, тогда как в случае справедливости альтернативной гипотезы о наличии коинтеграции мощность ADF- или HW-тестов больше, чем мощность sup-Wald-теста. Это вполне естественно, поскольку ADF- или HW-тесты построены для *линейных* альтернатив. На практике может иметь смысл использование как тестов, построенных для линейных альтернатив, так и тестов, предлагаемых для пороговой альтернативы. Отклонение нулевой гипотезы одним из тестов можно интерпретировать как признак наличия коинтеграции (либо линейной, либо пороговой).

**Тестирование линейной коинтеграции против пороговой коинтеграции.** Если удалось определить, что  $\mathbf{p}_t$  коинтегрировано с коинтегрирующим вектором  $\Gamma$ , тогда следующий шаг в эмпирическом анализе — это определение того, является ли динамика в коинтегрирующем соотношении линейной или демонстрирует пороговую нелиней-



ность. Далее будут описаны несколько одномерных и многомерных тестов линейности при альтернативах против пороговой нелинейности.

Первой попыткой решить эту задачу явилась работа [Balke, Fomby (1997)], в которой тестировалась линейность одномерного коинтегрирующего остатка  $z_t = \Gamma p_{t-1}$  путем тестирования структурных сдвигов авторегрессий для  $z_t$ , которые упорядочивают данные в соответствии со значением пороговой переменной (в случае, если берется  $z_{t-1}$ ) вместо упорядочивания по времени. Переупорядочивание данных не нарушает динамической связи между  $z_t$  и ее лагами, но позволяет обнаруживать пороговую нелинейность. Это происходит в силу того, что наличие порога в упорядоченных по времени данных переходит в структурный сдвиг переупорядоченных данных. Используя переупорядоченные авторегрессии для  $z_t$ , Балке и Фомби анализируют непараметрический тест на структурные сдвиги для рекурсивных остатков, представленный в работе [Tsay (1989)], и процедуры типа sup-Wald-тестов для одного или двух структурных сдвигов. Тест, описанный в работе [Tsay (1989)], имеет весьма привлекательное преимущество, состоящее в том, что он не зависит от формы пороговой нелинейности, а предельное распределение, используемое в этом тесте, не зависит от неизвестных параметров. Однако в тестах sup-Wald типа используется нестандартная оценка пороговых значений, которые неидентифицируемы при справедливости нулевой гипотезы о линейности, и поэтому оцениваются при помощи бутстрепа. Беря в качестве нулевой гипотезы предположение о линейной авторегрессии, можно попросту повторно смоделировать выборку остатков этой модели для того, чтобы создать бутстреп-выборку, из которой можно вычислить sup-Wald-статистику. Это переупорядочивание повторяется несколько раз. В результате мы получаем распределение sup-Wald-статистики при справедливости нулевой гипотезы о линейной авторегрессионности модели. Моделирования методом Монте-Карло, реализованные в работе [Balke, Fomby (1997)], обнаруживают, что тест Тсея и sup-Wald-тест для одного структурного сдвига имеет примерно одну и ту же мощность против асимметричной трехрежимной интервальной пороговой авторегрессии и равновесной пороговой авторегрессии (EQ-TAR). А sup-Wald-тест для двух структурных сдвигов имеет наибольшую мощность, несмотря на то, что результаты этого теста зависят от размера выборки.

В работах [Hansen (1997, 1999)] описывается метод тестирования нулевой гипотезы линейной ПАР-модели (или ПАР(1)) против альтернативной ПАР( $m$ )-модели (где  $m$  обозначает число режимов). Он основан на вложенном тестировании гипотез. В рамках рассматриваемых нами проблем мы можем применить эту процедуру, рассмат-

ривая ПАР( $m$ )-модель для  $z_t = \Gamma' p_t$ . Например, если мы рассма-

риваем общую ВМКО-модель, определяемую соотношением (4.149) с  $p = 0$ , то легко показать, что коинтеграционное слагаемое  $\Gamma' \mathbf{p}_t$  имеет следующее специфицированное некоторым образом АР(1)- или ПАР-представление:

$$z_t = \delta^{(J_t)} + \rho^{(J_t)} z_{t-1} + \eta_t^{(J_t)},$$

где

$$\rho^{(J_t)} = 1 + \Gamma' \mathbf{B}^{(J_t)}, \quad \delta^{(J_t)} = \Gamma' \boldsymbol{\alpha}^{(J_t)}, \quad \eta_t^{(J_t)} = \Gamma' \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(J_t)}.$$

Линейная пороговая авторегрессионная модель, или ПАР(1)-модель, получается при ограничениях:  $\delta^{(J_t)} = \delta$  и  $\rho^{(J_t)} = \rho, \forall J_t$ . Тест Хансена на линейность позволяет проверить нулевую гипотезу об адекватности ПАР(1)-модели против альтернативы об адекватности ПАР( $m$ )-модели при некотором  $m > 1$ . Тестирование осуществляется с использованием теста  $\text{sup-}F$ -типа ( $\text{sup-Wald}$ ), статистика которого принимает вид:

$$F_{1m} = T \left( \frac{S_1 - S_m}{S_m} \right), \quad (4.156)$$

где через  $S_1$  и  $S_m$  обозначены суммы квадратов остатков, полученных в результате оценивания ПАР(1)- и ПАР( $m$ )-моделей соответственно. Эта тестовая статистика совпадает со статистикой отношения правдоподобия в условиях, когда ошибки независимы и нормально распределены, а также эквивалентна статистике  $F$ -теста (или теста Вальда) и статистике множителей Лагранжа. Асимптотические распределения этих  $\text{sup-}F$ -тестов зависят от неидентифицируемых (при справедливости нулевой гипотезы о линейности) пороговых параметров. А это означает, что для оценки этих распределений должна быть использована техника имитационного моделирования. Хансен показал, что в различных линейных тестах для вычисления  $p$ -значений может быть использована простая бутстреп-процедура. При справедливости нулевой гипотезы доля смоделированных значений, превышающих наблюдаемое значение  $F_{1m}$ -статистики, дает асимптотическое  $p$ -значение  $\text{sup-}F$ -теста. В работе [Hansen (1999)] также предлагается бутстреп-процедура для случая гетероскедастичных остатков, которая строится на основании вспомогательной регрессии МНК-остатков на квадраты лагированных значений регрессоров. Адаптируя подход Хансена к нашему случаю, мы получим:

$$\hat{\eta}_t^2 = z_{t-1}^2 \beta + \xi_t, \quad \text{где} \quad \mathbf{E}(\xi_t | F_{t-1}) = 0.$$

Таким образом, мы получим оценку  $\hat{\sigma}_{t-1}^2 = z_{t-1}^2 \hat{\beta}$ , а значит, масштабированные остатки равны  $\tilde{\eta}_t = \hat{\eta}_t / \hat{\sigma}_{t-1}$ . При заданных начальных значениях  $[z_0^*, z_{-1}^*]$  положим  $\sigma_{t-1}^{*2} = \max(z_{t-1}^{*2} \hat{\beta}, 0)$ . Кроме того, пусть  $\{\eta_t^*\}$  — независимые реализации случайных величин из эмпирической функции

распределения  $\{\tilde{\eta}_t\}$ . Тогда положим:  $\hat{\eta}_t^* = \sigma_{t-1}^* \eta_t^*$  и  $z_t^* = \hat{\delta} + \hat{\rho} z_{t-1}^* + \hat{\eta}_t^*$ . Эта рекурсия позволяет создать смоделированный временной ряд  $\{z_t^*\}$  с заданными значениями условного среднего и условной дисперсии. Используя эту выборку, мы можем вычислить тестовую статистику  $F_{1m}^*$ . Кроме того, повторяя эту процедуру большое число раз, можно найти бутстреп-распределение.

В работе [Lo, Zivot (2001)] отмечается, что метод Хансена для тестирования линейности в одномерных ПАР-моделях, основанный на тестах вложенных гипотез, может быть легко обобщен на случай тестирования линейности в многомерных ПВМКО. Тестирование линейности предполагает проверку нулевой гипотезы о линейности ВМКО- против альтернативной ПВМКО( $m$ )-модели для некоторого  $m > 1$ . Наиболее удобная тестовая статистика для этого — sup-LR-статистика, которая эквивалентна sup-Wald-статистике:

$$LR_{1m} = T \left[ \ln(|\hat{\Sigma}|) - \ln(|\hat{\Sigma}(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \hat{d})|) \right], \quad (4.157)$$

где  $\hat{\Sigma}$  и  $\hat{\Sigma}(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \hat{d})$  обозначают оценки ковариационных матриц для остатков линейной ВМКО и  $m$ -режимной ПВМКО соответственно, а  $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}$  — оцененные пороговые значения,  $\hat{d}$  — оценка параметра запаздывания. В соответствии с результатами работы [Hansen (1997)] распределение sup-LR-статистики принимает нестандартный вид, поэтому часто  $p$ -значения различных линейных тестов, основанных на  $LR_{1m}$ -статистиках, рассчитываются при помощи бутстреп-процедур (в частности, в работе [Lo, Zivot (2001)] используется бутстреп-процедура Хансена).

В работе [Lo, Zivot (2001)] на примерах смоделированных данных представлен сравнительный анализ различных тестов на линейность, из которого следует, что эти тесты имеют большую мощность для спецификации в виде равновесной ПВМКО-модели (Р-ПВМКО), чем для спецификации интервальной ПВМКО. Кроме того, для последней спецификации все тесты имеют меньшую (в сравнении с Р-ПВМКО) мощность в условиях малых выборок, и эта мощность убывает вместе с величиной порогов. Несколько удивительным результатом этой работы является то, что одномерные тесты, в основном, имеют большую мощность, чем многомерные тесты даже в условиях больших выборок. Возможно, такой эффект может быть объяснен природой генерирующего данные процесса, рассмотренного в работе. Отметим также, что одномерная  $F_{1m}$ -статистика имеет немного большую мощность, чем одномерная статистика Тсея, тогда как многомерная  $LR_{1m}$ -статистика имеет большую мощность, чем многомерная статистика Тсея, предложенная в [Tsay (1988)].

В работе [Hansen, Seo (2002)] представлен Sup-LM-тест применительно к двумерной ПВМКО с известным коинтегрирующим вектором и единственным порогом, в которой пороговые эффекты снова определяются корректирующим остатком слагаемым вида  $\Gamma' p_{t-d}$ . В частности, в этой работе авторы на первом шаге применили расширенный тест Дики — Фуллера, а затем использовали Sup-LM-тесты, полученные авторами для двухрежимной ПВМКО. Предложенным в этой работе Sup-LM-тестам на линейную коинтеграцию против пороговой коинтеграции отвечают две гетероскедастичные состоятельные LM-тестовые статистики (основанные на оценках Эйкера — Уайта для ковариационных матриц). Первая из двух упомянутых тестовых статистик должна быть использована в ситуации, когда коинтегрирующий вектор известен априори. Обозначим эту статистику через:

$$\text{SupLM}^0 = \text{Sup}_{\theta_L \leq \theta \leq \theta_U} \text{LM}(\Gamma_0, \theta), \quad (4.158)$$

где  $\Gamma_0$  — известный коинтегрирующий вектор. Вторая тестовая статистика может быть использована в ситуации, когда коинтегрирующий вектор неизвестен. Обозначим эту тестовую статистику как

$$\text{Sup LM} = \text{Sup}_{\theta_L \leq \theta \leq \theta_U} \text{LM}(\tilde{\Gamma}, \theta),$$

где  $\tilde{\Gamma}$  — оценка  $\Gamma$  в предположении справедливости нулевой гипотезы о наличии линейной коинтеграции (при альтернативе пороговой коинтеграции). В обоих тестах  $[\theta_L, \theta_U]$  представляет собой область поиска, такую, что  $\theta_L$  — это  $\pi_0$ -квантиль  $\tilde{z}_{t-1}$ , а  $\theta_U$  — это  $(1 - \pi_0)$ -квантиль. В работе [Andrews (1993)] брались  $\pi_0$  между 0,05 и 0,15. Для вычисления асимптотических критических значений и  $p$ -значений распределения Sup-LM\*-статистик использовались бутстреп-процедуры с 3000 смоделированных выборок: для каждой смоделированной выборки вычисляется Sup-LM\*-статистика, после чего строится бутстреп-оценка функции распределения этой статистики.

Наконец, в работе [Gonzalo, Pitarakis (2006)] для тестирования линейности против пороговой нелинейности в долгосрочной матрице влияния ВМКО предлагается использовать тест sup-Wald-типа. Этот анализ не предполагает каких-либо специфических коинтеграционных свойств системы и справедлив безотносительно тому, является ли система коинтегрированной или не является. Более того, вместо того, чтобы брать слагаемое, корректирующее остаток в качестве значения, определяющего пороговые эффекты, авторы предложили брать внешнюю пороговую переменную, которая может быть как экономической, так и финансовой переменной. Такая переменная должна быть стационарной

и эргодической (например, этой переменной может быть скорость роста ВВП). Авторы работы [Gonzalo, Pitarakis (2006)] рассмотрели  $k$ -мерные временные ряды  $\mathbf{p}_t$ , генерируемые при помощи следующей модели коррекции остатками, которая позволяет учитывать наличие пороговых эффектов в долгосрочной матрице влияния:

$$\Delta \mathbf{p}_t = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{p}_{t-1} \mathbf{I}(q_{t-d} \leq \theta_1) + \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{p}_{t-1} \mathbf{I}(q_{t-d} > \theta_1) + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Эта спецификация совпадает со спецификацией, рассмотренной в [Seo (2006)], за исключением того, что в спецификации [Gonzalo, Pitarakis (2006)] не делается никаких предположений относительно ранговой структуры  $\mathbf{\Pi}_1$  или  $\mathbf{\Pi}_2$ , а пороговая переменная необязательно является  $q_t = \mathbf{\Gamma}' \mathbf{p}_t$ . При отсутствии пороговых эффектов, определяемых пороговой переменной  $q_t$ , мы получим стандартную линейную ВМКО с  $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_2$ , и это ограничение может быть протестировано против альтернативы  $H_1 : \mathbf{\Pi}_1 \neq \mathbf{\Pi}_2$  при помощи тестовой статистики Wald-типа. В работе [Gonzalo, Pitarakis (2006)] показано, что sup-Wald тестовая статистика имеет предельное распределение, которое эквивалентно распределению нормированного квадрата броуновского моста, совпадающего с тестовой статистикой на наличие структурных сдвигов из [Andrews (1993)]. Авторы отмечают, что при известном  $\theta$  эта тестовая статистика имеет предельное  $\chi^2$ -распределение с  $k^2$  степенями свободы. Следует отметить, что предельное распределение этой статистики не зависит от неизвестных параметров и полностью определяется числом тестируемых параметров. Это предельное распределение затабулировано в работе [Andrews (1993)]. Более широкое множество  $p$ -значений соответствующих предельных распределений см. в работе [Hansen (1997)].

#### 4.5.8. Спецификация модели

Если нулевая гипотеза об отсутствии коинтеграции и линейности отклоняется, то следующий шаг состоит в том, чтобы подобрать к данным наиболее подходящую пороговую модель. Первый предложенный для этого подход был представлен в работах [Tong (1990)], [Clements, Krolzig (1998)] и [Tsay (1998)]. Основная идея этого подхода состоит в том, что для определения наилучшей спецификации модели данных следует использовать *такие критерии выбора модели, как, например, информационный критерий Акаике (AIC)*.

Второй подход был предложен в работах [Hansen (1999)], [Lo, Zivot (2001)], где использовалась *последовательная процедура тестирования, скопированная с сайта* *Разработка электронных библиотек* *так называемых вложенных моделей. Например, сим-*  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru> Разработана электронная библиотека <http://прав.информ2000.ru>

метричные интервальные ПАР-модели для  $z_t$  вложены в ПАР(3)-модели без ограничений, а симметричные интервальные ПВМКО для  $\mathbf{p}_t$  вложены в ПВМКО(3) без ограничений. Следуя этому подходу, вначале необходимо определить число режимов. При условии, что предположение о линейности коинтеграционного соотношения отклоняется в пользу пороговой нелинейности, мы можем определить, является ли ПАР(3)-модель адекватной для  $z_t$  при помощи тестирования нулевой гипотезы об адекватности данным ПАР(2)-модели против альтернативной ПАР(3)-модели, в котором используется следующая F-статистика,

$$F_{23} = T \left( \frac{S_2 - S_3}{S_3} \right),$$

где через  $S_2$  и  $S_3$  обозначены суммы квадратов остатков, полученных в результате оценки ПАР(2)-модели без ограничений и ПАР(3)-модели без ограничений соответственно. В общем случае мы можем тестировать нулевую гипотезу об ПАР( $m - j$ )-модели против альтернативной ПАР( $m$ )-модели с использованием следующей F-статистики:

$$F_{m-j,m} = T \left( \frac{S_{m-j} - S_m}{S_m} \right), \quad 1 \leq j \leq m - 1.$$

Аналогично для определения того, является ли ПВМКО(3) адекватной моделью для  $\mathbf{p}_t$ , можно протестировать нулевую гипотезу о ПВМКО(2) против альтернативной ПВМКО(3), пользуясь LR-статистикой

$$LR_{23} = T \left[ \ln(|\hat{\Sigma}_2|) - \ln(|\hat{\Sigma}_3|) \right],$$

где  $\hat{\Sigma}_2$  и  $\hat{\Sigma}_3$  обозначают оценки ковариационных матриц, полученных из ПВМКО(2) и ПВМКО(3) соответственно. В более общем случае мы будем использовать следующую статистику:

$$LR_{m-j,m} = T \left[ \ln(|\hat{\Sigma}_{m-j}|) - \ln(|\hat{\Sigma}_m|) \right], \quad 1 \leq j \leq m - 1.$$

Как мы видели в случае ранее описанных тестов на линейность, асимптотические распределения статистик  $F_{m-j,m}$  и  $LR_{m-j,m}$  являются нестандартными, поэтому для вычисления p-значений могут использоваться бутстреп-методы.

Что касается статистических выводов относительно оценок параметров модели, в работе [Chan (1993)] показано, что оценки порогов для (устойчивых) ПАР-моделей без ограничений являются суперсостоятельными (т. е. сходятся к своим фактическим значениям со скоростью  $T^{-1/2}$ ). Оценки всех остальных параметров являются независимыми от

оценок порогов и асимптотически нормальными со стандартными формулами для ковариационных матриц. В работе [Tsay (1998)] даются аналогичные результаты для параметров устойчивых или коинтегрированных пороговых векторных авторегрессионных моделей. Таким образом, суперсостоятельность оценок порогов позволяет рассматривать эти оценки в качестве фактических значений при статистических выводах относительно остальных параметров. Следовательно, статистика теста Вальда на ограничения параметров, исключая пороги, могут быть вычислены обычным образом, а полученная статистика будет иметь асимптотическое хи-квадрат распределение. LR-тестовые статистики могут быть тоже вычислены, но для этого потребуется оценка пороговых моделей с ограничениями. Получение статистических выводов относительно порогов весьма проблематично, поскольку предельное распределение порогов для модели без ограничений является нестандартным и в общем случае зависит от неизвестных параметров и исходных данных, см., например, [Hansen (1997)], [Hansen, Seo (2002)]. В недавней работе [Seo (2009)] показана состоятельность МНК-оценки для коинтеграционного вектора нелинейной ВМКО, имеющей зависящую от режима краткосрочную динамику. Кроме того, представлены некоторые асимптотические результаты для пороговых коинтеграций, которые устанавливают скорости сходимости и асимптотические распределения МНК- и сглаженных МНК-оценок параметров модели. В частности, в этой работе показано, что скорость сходимости для МНК-оценки коинтеграционного параметра  $\gamma$  равна  $n^{-3/2}$  и  $n^{-1}$  для порогового параметра  $\theta^{(1)}$ . Помимо этого в работе на смоделированных данных показано, что точность статистических выводов относительно порогового параметра может быть улучшена при использовании 2МНК-оценки. Несмотря на то что авторы работы рассматривали лишь модели с двумя режимами, эти результаты могут быть обобщены на случай моделей с большим числом режимов при условии, что выполнены предположения относительно стационарности и принципа инвариантности (см. предположение 1 в работе [Seo (2009)]).

#### 4.5.9. Векторные модели коррекции остатками с марковскими переключениями в коэффициентах

Использование моделей с марковскими переключениями направлено на описание неоднородных данных и структурных сдвигов: например, в работе [Goldfeld, Quandt (1973)] предложена регрессионная модель с переключениями в коэффициентах, которые описываются марковской цепью; в [Hamilton (1989)] предложен более общий подход к анализу временных рядов. Нелинейные ВМКО, отклонения от равновесного со-

стояния которых описываются марковским процессом, были впервые предложены в работе [Jackman (1995)] для моделирования детерминант, характеризующих результаты президентских выборов в США. В работе [Krolzig (1996, 1997)] ВМКО с марковскими переключениями получена как частный случай более общей векторной авторегрессионной модели с марковскими переключениями; в [Hall et al. (1997)] ВМКО с марковскими переключениями используется для анализа цен на недвижимость в Соединенном Королевстве. Модели, подобные упомянутым выше, главным образом используются при исследовании бизнес-циклов, в финансовых исследованиях: здесь в качестве примеров следует выделить [Krolzig, Toro (2001)], [Psaradakis et al. (2004)]. В работе [Krolzig et al. (2002)] анализируется британский рынок труда. С другой стороны, при анализе ценовых трансмиссий ВМКО с марковскими переключениями применяется значительно реже, чем обычная ВМКО, см., например, [Brümmer et al. (2006)], где ВМКО используется при анализе вертикальных ценовых трансмиссий между стоимостью муки и мяса на рынке Украины.

ВМКО с марковскими переключениями может быть представлена в виде ПАР-модели с экзогенными состояниями, т. е. режимы не являются функцией от анализируемого ценового ряда, а являются экзогенными и ненаблюдаемыми. Режимы могут определяться общими движущими силами торговли, ценами, иными экономическими переменными. Например, временная неуверенность трейдеров относительно будущего может быть вызвана предстоящими выборами или политическими потрясениями в нестабильных странах; или, напротив, уверенность трейдеров в ближайшем будущем может быть вызвана исключительно позитивными или негативными ожиданиями, основанными, например, на прогнозах цен. Таким образом, трейдеры могут столкнуться с весьма различными условиями, как отвечающими увеличению неопределенности, так и условиями, не сопоставимыми с торговлей, что, как следствие, сказывается на характере изменения цен.

В общем виде ВМКО с марковскими переключениями может быть представлена аналогично представлению ПМКО (4.149) как:

$$\Delta p_t = \alpha^{(J_t)} - \mathbf{B}^{(J_t)} \Gamma' p_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(J_t)} \Delta p_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (4.159)$$

где число режимов обозначено через  $M$ , а номера режимов  $J_t = j \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Аналогично (4.143) модель (4.159) может быть представлена в сокращенном виде:

$$\Delta p_t = \mathbf{A}^{(J_t)} X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.160)$$



где  $\mathbf{A}^{(J_t)}$  — матрица коэффициентов, а регрессоры из (4.159) представлены в матричном виде:  $\mathbf{X}_{t-1} = (1 \ \Gamma' \mathbf{p}_{t-1} \ \Delta \mathbf{p}_{t-1} \ \dots \ \Delta \mathbf{p}_{t-p+1})'$ . Каждая переменная, зависящая от режима, принимает значения в зависимости от значения в момент времени  $t$  индикаторной переменной  $J_t$ . Например,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(J_t)} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}^{(1)} & \text{если } J_t = 1; \\ \vdots & \\ \boldsymbol{\alpha}^{(M)} & \text{если } J_t = M. \end{cases}$$

$M$  режимов ВМКО с марковскими переключениями (4.159) представляют собой вероятностный процесс с  $M$  состояниями, которые являются реализацией латентной дискретной марковской цепи с  $M$  состояниями. Зависящие от режима значения параметров являются постоянными при заданном режиме, но могут не совпадать для разных режимов. Таким образом, именно марковская цепь отвечает за переключение режимов.

Ключевым элементом модели является  $(M \times M)$ -матрица переходов  $\mathbf{\Pi}$ , которая состоит из вероятностей  $\pi_{hj}$  переходов из состояния  $h$  в состояние  $j$ :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1M} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{M1} & \pi_{M2} & \dots & \pi_{MM} \end{pmatrix},$$

где  $\pi_{hj} = \mathbf{P}(J_{t+1} = j | J_t = h)$ . Марковская цепь предполагается *однородной*, т.е. вероятности переходов предполагаются не зависящими от времени. Однако можно предположить, что вероятности переходов являются динамически меняющимися во времени. В качестве примера см., например, [Hall et al. (1997)], где переходные вероятности представляют собой функции отклонения от траектории равновесия. Кроме того, следует упомянуть, например, [Diebold et al. (1994)], [Hamilton, Raj (2002)], [Samacho (2005)], где представлены иные модели для динамически меняющихся вероятностей переходов. В настоящем разделе мы рассмотрим наиболее простую и наиболее часто используемую ВМКО с марковскими переключениями. Поскольку из состояния  $h$  возможно переключение только в одно из  $M$  состояний, сумма элементов в любой из строк матрицы  $\mathbf{\Pi}$  равна 1, т.е.  $\mathbf{\Pi} \mathbf{1}_M = \mathbf{1}_M$ , где  $\mathbf{1}_M = (1, 1, \dots, 1)'$  — вектор-столбец размерности  $(M \times 1)$ , что эквивалентно:  $\sum_{j=1}^M \pi_{hj} = 1, h = 1, \dots, M$ . Большая вероятность на главной диагонали матрицы  $\mathbf{\Pi}$  отвечает более устойчивому характеру соответствующего состояния, что также означает в среднем наличие меньшего числа переходов из

Для того чтобы гарантировать некоторые желательные свойства временных рядов и режимов, необходимо сделать несколько предположений относительно свойств марковской цепи. А именно положить, что:

$$P(J_{t+1}|J_t, J_{t-1}, \dots, \mathbf{p}_t; \mathbf{p}_{t-1}, \dots) = P(J_{t+1}|J_t),$$

это свойство еще называют марковским свойством первого порядка. Содержательно это свойство означает, что вероятность перехода в момент времени  $(t + 1)$  в новое состояние зависит только от состояния в предыдущий момент времени  $t$ . Ни более ранние состояния, ни любые другие переменные, такие как наблюдаемые цены до момента времени  $t$ , не содержат дополнительную информацию относительно переключающихся режимов. Это предположение не является ограничительным, поскольку любая более сложная модель может быть перепараметризована в модель первого порядка, см., например, [Hamilton (1994, глава 22.4)] или [MacDonald, Zucchini (1997, глава 1.3)]. Более того, необходимо предположить, что марковская цепь является эргодической и неприводимой<sup>24</sup>: первое условие необходимо для того, чтобы гарантировать стационарность безусловной функции распределения режимов, тогда как второе условие необходимо для стационарности временного ряда. Необходимо, чтобы эргодические вероятности всех состояний были больше нуля. Из последнего предположения следует, что каждое состояние марковской цепи может быть достигнуто из любого другого состояния, т. е. это означает отсутствие поглощающего состояния.

**Процедура оценивания.** В отличие от оценки ПВМКО для ВМКО с марковскими переключениями используется главным образом лишь один метод оценивания параметров. Так же как и в случае ПВМКО, мы имеем дело с неопределенностью на двух уровнях: первый уровень — процесс состояний  $\{J_t\}$  определяет  $\mathbf{A}^{(j)}$  в (4.160) и должен быть оценен, поскольку не является изначально заданным; второй уровень — параметры модели  $\mathbf{A}^{(j)}$ .

Используемая EM-процедура оценивания включает два шага: шаг “Expectation” и шаг “Maximization”. Эти шаги итеративно повторяются до тех пор, пока не будет выполнен некоторый критерий сходимости. EM-процедура была впервые представлена в работе [Dempster et al. (1977)]. В работе [Krolzig (1997, §5–8)] дан подробный анализ метода с указанием его основных преимуществ (вычислительная простота и скорость сходимости), кроме того, рассматриваются различные обобщения. Ниже мы коротко опишем основные шаги этого алгоритма, что же

<sup>24</sup> Ожидаемые безусловные вероятности нахождения в любом из  $M$  состояний в произвольный момент времени называют эргодическими вероятностями марковской цепи.  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

касается более детального описания, мы отсылаем читателя к работе [Krolzig (1997)].

Приступая к шагу “Expectation” («Математическое ожидание») алгоритма, необходимо инициализировать начальные значения параметров модели, переходной матрицы и вероятности режимов в момент времени  $t = 1$ . На шаге «Математического ожидания» осуществляется статистическая оценка ненаблюдаемых режимов. Сначала наблюдения фильтруются при помощи так называемой фильтрации Баума — Линдгрена — Гамильтона — Кима (более детальное описание см. в [Krolzig (1997)], §5). В результате мы получаем *фильтрованные вероятности*, т.е. условные вероятности того, что наблюдение в момент времени  $t$  сгенерировано под влиянием одного из  $M$  режимов при условии наличия наблюдений до момента времени  $t$ , а также при заданных значениях параметров модели, которые на первой итерации принимают инициализированные значения. После этого на основании фильтрованных вероятностей и с использованием обратной рекурсии рассчитываются *сглаженные вероятности* по полной выборке. Они представляют собой условную вероятность того, что в момент времени  $t$  мы имеем один из  $M$  режимов при условии наличия полной выборки. Или, что эквивалентно, они могут интерпретироваться как вероятности того, что наблюдение в момент времени  $t$  генерируется в режиме  $j$  при условии наличия полной выборки.

На шаге “Maximization” вычисляются оценки максимального правдоподобия для всех параметров модели, что включает переходные вероятности, вероятности режимов в момент времени  $t = 1$  и параметры соответствующих векторных моделей коррекции остатками. Оценки переходных вероятностей  $\pi_{hj}$  равны отношению суммы вероятностей переходов из режима  $h$  в режим  $j$  и вероятности возникновения режима  $h$  за весь временной период, охватываемый рассматриваемой выборкой. И числитель, и знаменатель последнего отношения рассчитывается с использованием сглаженных вероятностей, рассчитываемых на шаге “Expectation”. Зависящие от режима параметры векторной модели коррекции остатками  $\mathbf{A}^{(j)}$  оцениваются при помощи обобщенного метода наименьших квадратов, в котором наблюдения взвешиваются по значениям их сглаженных вероятностей. На шаге “Maximization” обновляются вероятности нахождения в каждом из  $M$  режимов в момент времени  $t = 1$ , которые рассчитываются как сглаженные вероятности в момент  $t = 1$ . На этом первая итерация завершается.

Вторая итерация начинается с использования для реализации шага “Expectation” обновленных параметров, полученных на предыдущем шаге. Далее, на  $M$ -шаге снова обновляются оценки параметров. Далее шаг за шагом переходим к следующей итерации до тех пор пока не

будет выполнен критерий сходимости.

Этот алгоритм применим для оценки более общих моделей с марковскими переключениями. В частности, для ВМКОсМП в работе [Krolzig (1996)] рекомендуется двухшаговая процедура оценки, где сначала находятся коинтеграционный вектор и остатки равновесия  $z_{t-1}$ . Остатки равновесия используются в качестве экзогенного регрессора, в результате чего мы получаем VARсМП-модель. Далее, для получения оценок параметров модели применяется описанный выше EM-алгоритм.

ВМКОсМП можно оценить с использованием пакета процедур для VARсМП-модели (см. [Krolzig (2004)]), написанных на языке программирования Ox (см. [Doornik (2002)]) и которые могут быть загружены с <http://www.krolzig.co.uk/>, где, кроме того, можно найти множество данных и примеров.

**Дальнейшие комментарии.** В случае ВМКОсМП описание режимов имеет вероятностную природу и исследователь не может однозначно заключить, какой режим возникает в некоторый момент времени  $t$ . Несмотря на то что в работе [Hamilton, Raj (2002)] отмечается растущий консенсус среди экономистов относительно большей целесообразности моделирования изменений режимов при помощи таких вероятностных процессов, как марковский процесс, тем не менее, интерпретация режимов далеко не очевидна априори, и она значительно менее тривиальна, чем в случае ПВМКО. И задачей исследователя является придание смысла идентифицированным режимам. Режимы должны быть тщательно проанализированы и сопоставлены. Более того, перед проведением эконометрического анализа иногда представляется необходимым гипотетическое введение числа режимов, времени пребывания в них или иных потенциальных детерминант. Тщательно анализируя события политической и экономической среды во временной период, охватываемый выборкой, можно дать некоторую оценку причин изменения динамики рынков. Однако, как отмечается в работе [Jackman (1995)], следует учитывать опасность, связанную с так называемой *экспост маркировкой состояний*.

Подобно ВМКО, ВМКОсМП позволяет использовать не только режимы, характеризующиеся разными скоростями коррекции остатками, но и допускает отсутствие корректирующих остатков, см., например, работу [Psaradakis et al. (2004)]: в отличие от ПВМКО в ВМКОсМП режимы не ограничены в том смысле, что режимы с преобладанием значительно отстоящих друг от друга некоинтегрированных ценовых временных рядов не являются более продолжительными или допускают отклонения от равновесной траектории. Такого рода характер модели приводит к большим отклонениям от равновесия в отсутствие коррекции. Режим, отвечающий большим отклонениям, может быть вызван, например, по

литическими событиями, запретительными мерами.

Суммируя вышесказанное, ПВМКО характеризуется эндогенным переключением режимов, полностью определенным рассматриваемыми переменными. Определение механизма переключения при помощи формальной процедуры облегчает интерпретацию модели. Такое ограничение имеет следующие последствия: во-первых, если экзогенная информация, включенная в определяющее соотношение для порогов, корректна, модель позволит получить более надежные и эффективные результаты, чем те, которые можно получить с помощью общих моделей. Однако если информация неточна, тогда результаты будут значительно отличаться от истинных результатов более общих моделей.

ВМКОсМП является более общей моделью по сравнению с моделями с упомянутым выше механизмом переключений, поскольку позволяет рассматривать переключения независимо от анализируемого временного ряда. Более того, детерминанты, вызывающие переключения, могут даже оставаться полностью неспецифицированными. Это является ключевым свойством моделирования режимов при помощи латентных марковских последовательностей. Однако большая гибкость модели возникает за счет менее явной интерпретируемости, и придание смысла идентифицируемым режимам требует значительно больших усилий, чем в случае предыдущей модели.

Таким образом, если анализируемые данные о ценах преимущественно не подпадают под действие таких внешних воздействий, как изменение политических, экономических или природных условий, то можно считать, что рынки и торговые процессы были основными силами, генерирующими данные. ПВМКО будет более подходящей моделью в этом случае, поскольку она явно опирается на информацию, содержащуюся в ценах и других экономических переменных. Тем не менее ПВМКО требует наличия не менее двух режимов. Однако если торговля происходит в условиях доминирующего внешнего вмешательства, то МП-ВПКО может оказаться более подходящей. Чаще всего реальность будет лежать между этими двумя крайними случаями. В таком случае выбор наиболее подходящей модели зависит от наличия доминирующего влияния.

#### 4.5.10. Эмпирические приложения в пакете R: СВПАР-модель, ПВАР-модель и ПВМКО-модели

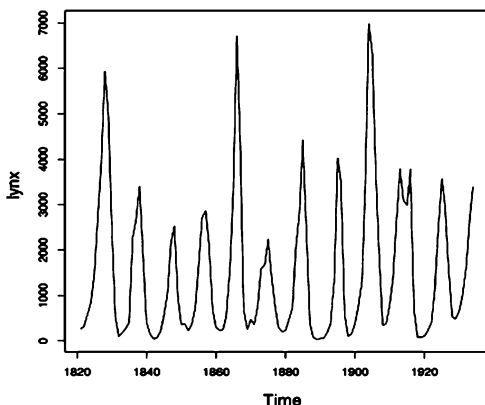
**Процедура оценивания.** Мы начнем наше рассмотрение с одномерной самовозбуждаемой векторной пороговой авторегрессионной модели (СВПАР-модели) на примере данных по канадским рысам. Эти данные

включают ежегодные отчеты о численности канадских рысей, пойманных в районе реки Маккензи в северо-западной Канаде за период с 1821 по 1934 г. Эти временные ряды (см. рис. 4.10), далее сокращенно называемые `lynx`, доступны в базовой комплектации пакета R, а более подробная информация относительно этих временных рядов может быть получена при помощи следующих команд:

```
#LYNX DATASET
str(lynx)
summary(lynx)
plot(lynx)
```

Мы можем использовать СВПАР(2) с порогом, заданным как в статье [Tong (1990)], оценивая ее при помощи пакета `tsDyn` в R:

```
#SETAR
mod.setar <- setar(log10(lynx), m=2, thDelay=1, th=3.25)
mod.setar
summary(mod.setar)
```



**Рис. 4.10.** Численность канадских рысей, пойманных в районе реки Маккензи в северо-западной Канаде за период с 1821 по 1934 г.

последняя команда дает следующие выходные данные:

```
Non linear autoregressive model
SETAR model (2 regimes)
Coefficients:
Low regime:
  phi1.0 phi1.1 phi1.2
  0.5908673 1.2538064 -0.4184042
High regime:  phi2.0 phi2.1 phi2.2
  2.232671 1.526853 -1.238662
Threshold
Variable: Z(t) = + (0) X(t) + (1) X(t-1)
Value: 3.25 (fixed)
Proportion of points in low regime: 67%
```

Residuals:

```
-0.5769141 -0.1198456 0.0034299 0.1191886 0.5173509
```

Fit:

```
residuals variance = 0.04053, AIC = -353, MAPE = 5.76
```

Coefficient(s):

```
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
phi1.0 0.590867 0.152011 3.8870 0.0001755 ***
phi1.1 1.253806 0.071265 17.5936 < 2.2e-16 ***
phi1.2 -0.418404 0.087630 -4.7746 5.690e-06 ***
phi2.0 2.232671 0.801695 2.7849 0.0063238 **
phi2.1 1.526853 0.103082 14.8121 < 2.2e-16 ***
phi2.2 -1.238662 0.255539 -4.8473 4.219e-06 ***
```

```
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Результаты оценки, записанные в виде уравнения:

$$X_t = \begin{cases} +0.591 + 1.254X_{t-1} - 0.418X_{t-2} & Z_t \leq +3.250 \\ +2.233 + 1.527X_{t-1} - 1.239X_{t-2} & Z_t > +3.250, \end{cases} \text{ где } Z_t = X_{t-1}.$$

В качестве команды, позволяющей выбирать автоматически параметры SETAR-моделей (или СВПАР-моделей), следует использовать `selectSETAR`, который выполняет перебор по всем возможным комбинациям значений специфицированных параметров. Возможные критерии выбора модели: критерий Акаике (AIC). Например, если мы хотим найти SETAR(2)-модель (СВПАР(2)-модель), которая минимизирует AIC-критерий, мы должны набрать:

```
llynx <- log10(llynx)
selectSETAR(llynx, m=2)

      thDelay th mL mH pooled.AIC
1 1 3.397996 2 2 -27.34785
2 1 3.196735 2 2 -26.62503
3 1 2.886993 2 2 -25.07846
4 0 2.556463 2 2 -23.45258
5 1 3.397996 2 1 -23.43047
6 1 2.720070 2 2 -21.25830
7 1 2.350992 1 2 -19.62207
8 1 2.350992 2 2 -19.20628
9 1 2.556463 2 2 -18.11027
10 1 2.556463 1 2 -17.51734
```

Если мы хотим оценить *многомерную пороговую VAR-модель* (ПВАР-модель) для пар процентных ставок, используемых в работе [Hansen, Seo (2002)] (см. исходные данные и результаты моделирования на рис. 4.11), мы должны набрать:

```
#TVAR
data(zeroyld)
dat<-zeroyld
tvar<-TVAR(dat, lag=2, nthresh=2, thDelay=1, trim=0.1, plot=TRUE)
```

Ниже мы показываем лишь часть выдаваемых командой результатов:

Model TVAR with 2 thresholds

Full sample size: 482 End sample size: 480

Number of variables: 2 Number of estimated parameters: 30 + 2

AIC -2155.439 BIC -2021.878 SSR 164.1456

[[1]]

```
Intercept      short.run -1      long.run -1
Equation short.run 0.0150(0.0491) 1.0061(0.0990)*** 0.0386(0.0595)
Equation long.run -0.0347(0.0836) 0.3622(0.1685)* 1.0209(0.1014)***
      short.run -2      long.run -2
Equation short.run -0.0074(0.0969) -0.0346(0.0589)
Equation long.run -0.2872(0.1650) . -0.0920(0.1003)
```

[[2]]

```
Intercept      short.run -1      long.run -1
Equation short.run -0.2169(0.4479) 0.8306(0.1566)*** 0.0127(0.1005)
Equation long.run -0.1387(0.7625) -0.0214(0.2666) 0.8490(0.1711)***
      short.run -2      long.run -2
Equation short.run 0.1351(0.1459) 0.0494(0.1013)
Equation long.run 0.0209(0.2483) 0.1693(0.1724)
```

[[3]]

```
Intercept      short.run -1      long.run -1
Equation short.run 1.5619(0.5115)** 1.1781(0.1349)*** -0.0308(0.0657)
Equation long.run 2.0372(0.8707)* 0.7989(0.2297)*** 0.8182(0.1118)***
      short.run -2      long.run -2
Equation short.run -0.3468(0.1249)** 0.0699(0.0640)
Equation long.run -0.8563(0.2127)*** 0.0577(0.1089)
```

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Threshold value: 8.129 10.698

Percentage of Observations in each regime: 71.5% 16.5% 12.1%

Предыдущая оценка показывает, что для первого порога (два режима) модель дает значение 10,698 и значение 1 для параметра запаздывания  $D$ . Учитывая это, поиск второго порога (три режима) дает значение 8,129. Начиная вычисления с этих значений, расширенный поиск по сетке значений позволяет получить те же значения.

Используя следующую команду, реализованную в пакете `tsDyn`,  
`toLatex(summary(tvar), digits=2)`,

мы можем выразить предыдущие результаты в компактной матричной форме (в скобках указаны стандартные ошибки)



$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.01(0.05) \\ -0.03(0.08) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.01(0.10) & 0.04(0.06) \\ 0.36(0.17) & 1.02(0.10) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 \\ X_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -7.4e-03(0.10) & -0.03(0.06) \\ -0.29(0.16) & -0.09(0.10) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-2}^1 \\ X_{t-2}^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.22(0.45) \\ -0.14(0.76) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.83(0.16) & 0.01(0.10) \\ -0.02(0.27) & 0.85(0.17) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 \\ X_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0.14(0.15) & 0.05(0.10) \\ 0.02(0.25) & 0.17(0.17) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-2}^1 \\ X_{t-2}^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.56(0.51) \\ 2.04(0.87) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.18(0.13) & -0.03(0.07) \\ 0.80(0.23) & 0.82(0.11) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 \\ X_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -0.35(0.12) & 0.07(0.06) \\ -0.86(0.21) & 0.06(0.11) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-2}^1 \\ X_{t-2}^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{if } X_{t-1}^1 < 8.129 \\ \text{if } 8.129 < X_{t-1}^1 < 10.698 \\ \text{if } X_{t-1}^1 > 10.698 \end{cases}$$

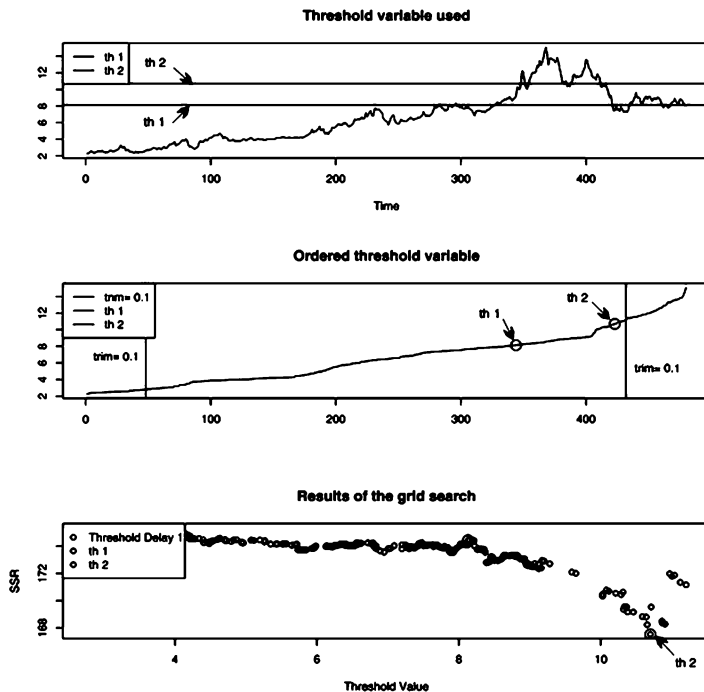


Рис. 4.11. ПВАР-модель, примененная к месячным котировкам 1-голичных и 10-голичных бонов (1952–1991)

Наконец, если мы хотим оценить ПВМКО, необходимо набрать:

```
#TVECM
```

```
tvecm<-TVECM(dat, nthresh=2, lag=1, bn=20, ngridG=20, plot=FALSE,
```

```
trim=0.05, model='All')
```

Скопировано с сайта  
http://www.право.информ2000.pf

Разработка электронных библиотек  
https://право.информ2000.pf

```
toLatex(tvecm)
options(show.signif.stars=FALSE)
toLatex(summary(tvecm))
```

где `lag` — число лагов, включаемых в каждый из режимов, `bn` — число элементов для поиска коинтегрирующих соотношений, `ngridG` — число элементов для поиска пороговых значений, `nthresh` — число порогов. Модель может быть оценена либо с пороговыми эффектами на все переменные (“All”), либо с пороговыми эффектами на корректирующие слагаемые “only\_ECT”. Для более подробной информации см. руководство к пакету `tsDyn`. Результаты процедуры оценки в матричной форме принимают вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_t^1 \\ \Delta X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.2226(0.0970) \\ 1.0936(0.1583) \end{pmatrix} ECT_{-1} + \begin{pmatrix} 0.5699(0.2001) \\ 1.9832(0.3267) \end{pmatrix} + \\ \quad + \begin{pmatrix} 0.2244(0.1742) & -0.1362(0.0936) \\ 0.8186(0.2845) & -0.0024(0.1529) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{t-1}^1 \\ \Delta X_{t-1}^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.0018(0.0381) \\ 0.0218(0.0622) \end{pmatrix} ECT_{-1} + \begin{pmatrix} 0.0087(0.0195) \\ -0.0047(0.0319) \end{pmatrix} + \\ \quad + \begin{pmatrix} 0.1113(0.1092) & 0.0657(0.0561) \\ 0.3392(0.1782) & 0.2332(0.0916) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{t-1}^1 \\ \Delta X_{t-1}^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.0365(0.0589) \\ 0.0984(0.0962) \end{pmatrix} ECT_{-1} + \begin{pmatrix} 0.0455(0.0709) \\ -0.0704(0.1158) \end{pmatrix} + \\ \quad + \begin{pmatrix} -0.1077(0.1031) & 0.0426(0.0719) \\ 0.0932(0.1682) & -0.0316(0.1173) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{t-1}^1 \\ \Delta X_{t-1}^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{if } ECT_{-1} < -1.414 \\ \text{if } -1.414 < ECT_{-1} < 0.643 & \Rightarrow (\text{where } ECT_{-1} \text{ corresponds to our } z_{t-1}). \\ \text{if } ECT_{-1} > 0.643 \end{cases}$$

**Тестирование.** Если необходимо реализовать F-тест (4.156), предложенный в работе [Hansen (1999)], в которой для тестирования линейности против пороговой линейности использовалось бутстреп-распределение, то мы снова можем использовать `tsDyn`-пакет. Как и в работе [Hansen (1999)], мы рассмотрим годовые средние размеры солнечных пятен за период времени 1700–1988 гг. Эти данные хорошо известны и представлены в Приложении 3 из [Tong (1990)]. В работе [Hansen (1999)], следуя [Ghaddar, Tong (1981)], делается следующее преобразование данных:  $N_t = 2(\sqrt{1 + N_t^*} - 1)$ , где  $N_t^*$  обозначает исходное наблюдение в  $t$ -ый год. Код для реализации используемого преобразования представлен ниже:

```
#HANSEN F-TEST (1999) FOR LINEARITY AGAINST THRESHOLD LINEARITY
sun<-(sqrt(sunspot.year+1)-1)*2
```

```
#Sunspot test
```

```
Han1<-setarTest(sun, m=11, thDelay=0:1, nboot=2, trim=0.1, test="1vs")
print(Han1)
summary(Han1)
plot(Han1)
#Test 2vs3
Han2<-setarTest(sun, m=11, thDelay=0:1, nboot=10, trim=0.1,
test="2vs3")
print(Han2)
summary(Han2)
plot(Han2)
```

Часть результатов представлены ниже:

Test of linearity against setar(2) and setar(3)

	Test	Pval			
1vs2	69.70779	0			
1vs3	132.37276	0			
Critical values:					
	0.9	0.95	0.975	0.99	
1vs2	27.40061	27.69683	27.84494	27.9338	
1vs3	52.49458	52.79585	52.94648	53.03686	

SSR of original series:

	SSR
AR	1134.982
SETAR(2)	907.4427
SETAR(3)	768.8739

Threshold of original series:

	th1	th2
SETAR(2)	7.423375	NA
SETAR(3)	5.321202	8.03992

Number of bootstrap replications: 2 Asymptotic bound: 5608.298

Результаты представлены на рис. 4.12.

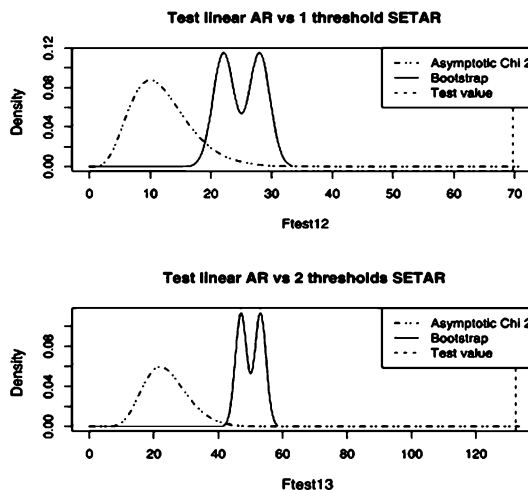


Рис. 4.12. F-тест Хансена для тестирования линейной АП-модели против СВАР(2) (SETAR)-модели. Солнечные пятна, 1700-1988 гг.



```

Critical values:      0.9    0.95    0.99
                    15.772  17.898  22.232

#Results for the random walk:
Test statistic: maxWald 7.650939
Critical values:      0.9    0.95    0.99
                    16.181  18.4    23.01

Test statistic: maxLR 7.361348

```

## 4.6. Регрессионные модели с распределенными лагами

Данный параграф посвящен специальному классу линейных моделей, связывающих между собой значения двух временных рядов. В частности, в качестве исходных статистических данных мы располагаем наблюдениями *двух временных рядов*

$$\begin{aligned} x(1), x(2), \dots, x(N), \\ y(1), y(2), \dots, y(N). \end{aligned} \quad (4.161)$$

Нашей целью является построение линейной регрессионной модели, позволяющей с наименьшими (в определенном смысле) ошибками восстанавливать и прогнозировать значения  $y(t)$  по значениям  $x(t)$ ,  $x(t-1), \dots, x(t-T)$  для  $t \geq T+1$  (при этом предполагается, конечно, что  $T < N$ ). Иначе говоря, мы будем рассматривать модели вида

$$y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t), \quad t = T+1, T+2, \dots, \quad (4.162)$$

где  $\delta(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , как и прежде, последовательность гомоскедастичных и взаимно не коррелированных (и не коррелированных с  $x(t), x(t-1), \dots, x(t-T)$ ) регрессионных остатков, а  $c_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_T$  и  $\sigma_0^2 = \mathbf{D}\delta(t)$  — неизвестные параметры модели. При этом, для «очень длинных» (теоретически-бесконечных) временных рядов (4.161) в анализируемой модели (4.162) допускается случай  $T = \infty$ , т. е. суммирование в правой части (4.162) ведется по  $k$  от 0 до  $\infty$ .

Подобные модели оказываются естественными (и, соответственно, правильно специфицированными) в ситуациях, когда две переменные  $x$  и  $y$  связаны так, что воздействие единовременного изменения одной из них ( $x$ ) на другую ( $y$ ) сказывается в течение достаточно продолжительного периода времени ( $T$ ), т. е. наблюдается *распределенный во времени эффект воздействия*. В частности, такие связи возникают, в первую очередь, между регистрируемыми во времени входными и выходными характеристиками процессов накопления и распределения ресурсов

(например, процессов преобразования доходов населения в его расходы) или процессов трансформации затрат в результаты (например, процессов воспроизводства основных доходов). Рассмотрим эти примеры.

**Пример 4.9.** *Зависимость общих расходов населения ( $y(t)$ ) от его наблюдаемых доходов ( $x(t)$ ).* При такой интерпретации участвующих в модели (4.162) переменных  $x(t)$  и  $y(t)$  коэффициенты регрессии  $\theta_k$  имеют прозрачный содержательный смысл, а именно:  $\theta_k$  — это, грубо говоря, доля дохода, которая тратится через  $k$  лет после его приобретения. Можно было бы обойтись без «грубо говоря», если бы в качестве  $x(t)$  мы располагали бы величиной *истинного* (а не наблюдаемого) дохода, полученного в году  $t$ . В действительности же наблюдаемый доход в среднем несколько меньше истинного, поэтому вместо естественно-го соотношения  $\sum_{k=0}^T \theta_k = 1$  (при  $0 \leq \theta_k < 1$ ) мы будем иметь обычно  $\sum_{k=0}^T \theta_k > 1$ . Обращаем внимание читателя на тот факт, что вытекающие из содержательного смысла коэффициентов  $\theta_k$  ограничения на их значения задают некоторую их *априорную структуру*.

**Пример 4.10.** *Зависимость объемов введенных основных фондов ( $y(t)$ ) от капитальных вложений ( $x(t)$ ).* В данном случае значения коэффициентов регрессии  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_T$  показывают, какими долями реализуются капитальные вложения  $x(\tau)$ , соответственно, в году  $\tau, \tau + 1, \dots, \tau + T$ . В силу существования определенной доли «нефондообразующих» капитальных вложений (которая идет на постройки временного типа, содержание управленческого аппарата, обучение персонала в период строительства и т. п.) в данном случае мы будем иметь

$$\beta = \sum_{k=0}^T \theta_k < 1, \quad 0 \leq \theta_k < 1,$$

где  $\beta$  мы можем интерпретировать как долю фондообразующих капитальных вложений.

Прежде чем перейти к систематическому анализу подобных моделей, зададимся двумя вопросами.

1) Почему модель типа (4.162) требует *специального рассмотрения*, а не может быть проанализирована и идентифицирована в рамках *классической линейной модели множественной регрессии* (см. гл. 4 в [Айвазян (2010)] или модели со стохастическими предикторами, не коррелированными с регрессионными остатками (см. п. 7.1, там же), в которой роль  $T + 1$  объясняющих переменных играют члены временного ряда  $x(t), x(t - 1), \dots, x(t - T)$ ?



рых можно восстановить значения всех неизвестных коэффициентов регрессии  $\theta_k$  (т. е. речь идет об экономической параметризации последовательности  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ ); после этого задача сводится к оценке параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ .

Модели (4.162), рассматриваемые в рамках этого общего подхода, называются, как мы уже упоминали, **регрессионными моделями с распределенными лагами** или просто моделями с распределенными лагами. Поясним это название.

Если переменная (эндогенная или экзогенная) участвует в записи анализируемой модели, будучи измеренной в один из *прошлых* (по отношению к текущему моменту времени  $t$ ) временных тактов  $t - k$  ( $k > 0$ ), то эту переменную называют *лаговой* или *запаздывающей*, а число единиц времени запаздывания ( $k$ ) — *лагом* (*запаздыванием*). А поскольку эти лаги  $k$  в модели (4.162) *распределены* по объясняющим переменным с весами  $\theta_k$ , то естественно называть такие модели *моделями с распределенными лагами* (ниже мы увидим, что при некоторых способах параметризации весов  $\theta_k$  их пронормированные значения могут интерпретироваться как *элементы закона распределения вероятностей*, что снова подтверждает правомерность использования слова «*распределенные*» в названии соответствующих моделей). Последовательность весовых коэффициентов  $\theta_0, \theta_1, \dots$  называют *структурой лага* (*конечной* или *бесконечной* в зависимости от конечности или бесконечности их числа  $T$ ). Если все  $\theta_j \geq 0$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), то последовательность коэффициентов  $w_0, w_1, w_2, \dots$ , где  $w_j = \theta_j / \sum_{j=0}^T \theta_j$ , называют *нормированной структурой лага* модели (4.162) (очевидно,  $\sum_{j=0}^T w_j = 1$ ).

**Нормированная структура лага как распределение вероятностей.** Можно воспользоваться формальным сходством нормированной структуры лага и закона распределения вероятностей дискретной случайной величины. Для этого введем случайную величину  $\tau$  («*время задержки*») с законом распределения вероятностей

$$P\{\tau = k\} = w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (4.163)$$

где  $T$  может принимать и бесконечные значения.

Подобная интерпретация нормированной структуры лага открывает широкие возможности в построении экономической параметризации последовательности весов  $w_k$  с помощью различных широко известных моделей законов распределения для дискретных случайных величин (см., например, п. 3.1.1–3.1.3 в [Айвазян, Мхитарян (2001)]). Кстати, интерпретация весов  $w_k$  как вероятностей в ряде ситуаций оказывается





$$\begin{cases} \theta_0 = \alpha_0, \\ \theta_1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \\ \theta_2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \dots + 2^m \alpha_m, \\ \dots\dots\dots \\ \theta_T = \alpha_0 + T\alpha_1 + \dots + T^m \alpha_m. \end{cases} \quad (4.164')$$

Возвращаемся к анализируемой модели (4.162), заменяя в ней коэффициенты  $\theta_k$  их выражениями по формулам (4.164'):

$$\begin{aligned} y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t) = c_0 \\ + \alpha_0 x(t) \\ + \alpha_0 x(t-1) + \alpha_1 x(t-1) + \dots + \alpha_m x(t-1) \\ + \alpha_0 x(t-2) + 2\alpha_1 x(t-2) + \dots + 2^m \alpha_m x(t-2) \\ \dots\dots\dots \\ + \alpha_0 x(t-T) + T\alpha_1 x(t-T) + \dots + T^m \alpha_m x(t-T) + \delta(t). \end{aligned} \quad (4.165)$$

Суммируя  $c_0$  и остальные слагаемые правой части (4.165) по столбцам, получаем:

$$\begin{aligned} y(t) = c_0 + \alpha_0 [x(t) + x(t-1) + \dots + x(t-T)] \\ + \alpha_1 [x(t-1) + 2x(t-2) + \dots + Tx(t-T)] \\ \dots\dots\dots \\ + \alpha_m [x(t-1) + 2^m x(t-2) + \dots + T^m x(t-T)] \\ + \delta(t). \end{aligned} \quad (4.165')$$

Обозначая первую квадратную скобку в правой части (4.165') как  $\tilde{x}^{(1)}(t')$ , вторую — как  $\tilde{x}^{(2)}(t')$ , ...,  $(m+1)$ -ю — как  $\tilde{x}^{(m+1)}(t')$ , где «новое» время  $t'$  «привязано» к моменту времени  $t-T$  (т. е.  $t' = t-T$ ), получаем:

$$\begin{aligned} y(t'+T) = c_0 + \alpha_0 \tilde{x}^{(1)}(t') + \alpha_1 \tilde{x}^{(2)}(t') + \dots + \alpha_m \tilde{x}^{(m+1)}(t') + \delta(t'+T), \\ (4.165'') \\ t' = 1, 2, \dots, N-T. \end{aligned}$$

В результате мы свели задачу оценивания  $T+2$  неизвестных весовых коэффициентов  $c_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_T$  к статистическому анализу стандартной линейной модели множественной регрессии всего с  $m+1$  ( $m \leq 3$ ) неизвестными параметрами (при этом предполагается, конечно, что длина исходных временных рядов  $N$  много больше, чем  $T+m$ ).

с помощью обычного МНК, после чего по формулам (4.164') вычисляются оценки  $\hat{\theta}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, T$ ).

Заметим, что мы полагали в данной схеме максимальную величину лага  $T$  известной. В действительности она, как правило, определяется статистически. Обычно проводят описанные выше расчеты для нескольких предположительных значений  $T$  и окончательный выбор между ними производят на основании диагностики полученных моделей, т. е. путем сравнения различных характеристик их точности.

**Геометрическая лаговая структура Койка** (см.: *Koysck L.M. Distributed Lags and Investment Analysis. North—Holland Publishing Company, Amsterdam, 1954*). В данном подходе рассматривается *бесконечная* лаговая структура (т. е. в (4.162) полагается  $T = \infty$ ), поэтому он применим лишь к достаточно длинным временным рядам (4.161). Общим (и естественным!) допущением при анализе бесконечных лаговых структур является *требование сходимости* ряда  $\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k$ , т. е.

$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T \theta_k = \beta < \infty$  и, следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$ . Это означает, что влияние  $x(t)$  на  $y(t+k)$  уменьшается до нуля по мере неограниченного увеличения временного интервала  $k$ , что естественно, так как текущее значение  $y$  практически не должно зависеть от поведения  $x$  в бесконечно далеком прошлом. Койк в своем подходе конкретизировал и усилил это допущение. В частности, он постулировал, что все нормированные веса  $w_k = \theta_k / \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j$ , являясь положительными, убывают с ростом  $k$  по геометрической прогрессии, т. е.

$$w_k = (1 - \lambda)\lambda^k, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (4.166)$$

(множитель  $(1 - \lambda)$  в соотношении (4.166) нужен для того, чтобы обеспечить условие нормировки  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = 1$ ).

Как мы сейчас увидим, это допущение приводит к огромным упрощениям модели (4.162), так как вместо оценивания *бесконечного* ряда весовых коэффициентов  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$  нам придется оценить лишь два (!) параметра:  $\lambda$  и  $\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k$ .

Действительно, возвращаясь к (4.162), имеем:

$$y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x(t-k) + \delta(t) = c_0 + \beta \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda)\lambda^k \times \quad (4.167)$$

$$\times x(t-k) + \delta(t) = c_0 + \beta(1 - \lambda) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Gamma^k \right) x(t) + \delta(t)$$

где  $F_-$  — оператор сдвига назад на единицу, т. е.  $F_-x(t) = x(t-1)$ . Произведя формальные операции с операторами сдвига, получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 + \beta(1-\lambda)[1 + \lambda F_- + \lambda^2 F_-^2 + \dots]x(t) + \delta(t) \\ &= c_0 + \beta(1-\lambda)\frac{x(t)}{1-\lambda F_-} + \delta(t), \end{aligned}$$

или, что то же,

$$(1 - \lambda F_-)y(t) = (1 - \lambda F_-)c_0 + \beta(1 - \lambda)x(t) + (1 - \lambda F_-)\delta(t).$$

Применяя в соответствии с этим соотношением оператор сдвига  $F_-$  к  $c_0$ ,  $y(t)$  и  $\delta(t)$ , получаем

$$y(t) = (1 - \lambda)c_0 + \beta(1 - \lambda)x(t) + \lambda y(t-1) + (\delta(t) - \lambda\delta(t-1)). \quad (4.167')$$

В результате мы получили уравнение регрессии  $y(t)$  по объясняющим переменным  $x(t)$  и  $y(t-1)$  всего с двумя неизвестными коэффициентами  $\beta$  и  $\lambda$  (не считая свободного члена  $c_0$  и дисперсии остатков  $\sigma_0^2 = D\delta(t)$ ). Однако поскольку в правой части уравнения остаточная случайная компонента  $\varepsilon(t) = \delta(t) - \lambda\delta(t-1)$  зависит от оцениваемого параметра  $\lambda$  и, вообще говоря, коррелирована, по крайней мере, с объясняющей переменной  $y(t-1)$ , метод оценивания параметров  $\beta$  и  $\lambda$  нестандартен и зависит от дополнительных предположений относительно природы остатков  $\delta(t)$  и (или)  $\varepsilon(t)$ .

Процедуры состоятельного оценивания параметров модели (4.167') при нескольких вариантах специфицирующих условий, касающихся природы случайных остатков  $\delta(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , описаны, например, в [Джонстон (1980)], с. 303–320.

**З а м е ч а н и е 1.** *Финальный* вид (4.167') модели Койка может быть получен и без помощи операций с оператором сдвига  $F_-$ . Для этого выпишем *исходный* вид модели для двух текущих моментов времени  $t$  и  $t-1$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 + \beta(1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x(t-k) + \delta(t), \\ y(t-1) &= c_0 + \beta(1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x(t-1-k) + \delta(t-1). \end{aligned}$$

Умножив второе уравнение на  $\lambda$  и вычтя полученный результат из первого уравнения, приходим к (4.167').

Рассмотрим две хорошо известные динамические модели экономических процессов, сводящиеся к модели Койка, хотя их базовые априорные допущения *прямо* не формулируются в виде (4.166)

**Модель частичного приспособления** (или — «**частичной корректировки**») <sup>25</sup>. Предположим, что *желаемое* (или *оптимальное, целевое*) значение  $y^*(t)$  некоторого экономического показателя определяется уравнением

$$y^*(t) = \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1 x(t) + \tilde{\delta}(t), \quad (4.168)$$

где регрессионные остатки  $\tilde{\delta}(t)$  гомоскедастичны и сериально некоррелированы, а  $x(t)$  — переменная, выполняющая роль объясняющей, не коррелирована с  $\tilde{\delta}(t)$ . Однако *желаемое* значение исследуемой результирующей переменной не всегда является *наблюдаемым*. Экономический объект, характеризуемый этой переменной, может не иметь возможности сразу (т. е. в *точности* к моменту времени  $t$ ) «выходить» на *желаемое* значение  $y^*(t)$ . Так что *фактическое (наблюдаемое) значение*  $y(t)$  этого показателя будет со временем как бы «подтягиваться» к *желаемому*  $y^*(t)$  в соответствии с правилом, формализуемым с помощью соотношения

$$y(t) = y(t-1) + \gamma(y^*(t) - y(t-1)) + \delta(t), \quad (4.169)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1,$$

где остатки  $\delta(t)$  гомоскедастичны и сериально некоррелированы. Из (4.169) следует, что на каждом следующем временном такте *наблюдаемое* значение  $y(t)$  будет «подправляться» в направлении *целевого значения*  $y^*(t)$  на величину, пропорциональную разнице между *оптимальным* и *текущим* уровнями результирующего показателя. Соотношение (4.162) может быть переписано в виде

$$y(t) = \gamma y^*(t) + (1 - \gamma)y(t-1) + \delta(t), \quad (4.169')$$

откуда следует, что *наблюдаемое* значение исследуемой результирующей переменной есть (с точностью до регрессионного остатка  $\delta(t)$ ) взвешенное среднее *желаемого* уровня (на данный момент времени) и *фактического значения* в предыдущем такте времени. Подставляя модельное оптимальное значение (4.168) в (4.169'), имеем

$$y(t) = \gamma \tilde{\theta}_0 + \gamma \tilde{\theta}_1 x(t) + (1 - \gamma)y(t-1) + (\delta(t) + \gamma \tilde{\delta}(t)). \quad (4.169'')$$

Сравнивая это соотношение с (4.167'), мы видим, что исследуемая зависимость относится по своему типу к геометрической структуре Койка. В этом можно еще раз убедиться, «разматывая» (4.169'') в обратную

<sup>25</sup> Впервые подобная схема модели была описана в работах:

1) Nerlove M. Estimates of the elasticities of supply of selected agricultural commodities // Journ farm econ. Vol. 38 (1956). P. 496–509;

2) Nerlove M. The dynamics of supply: estimation of farmers response to price. The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1958.

сторону по сравнению с тем, как мы это делали при выводе финального соотношения структуры Койка. Действительно, выразим  $y(t-1)$ , руководствуясь соотношением (4.169''):

$$y(t-1) = \gamma\tilde{\theta}_0 + \gamma\tilde{\theta}_1 x(t-1) + (1-\gamma)y(t-2) + (\delta(t-1) + \gamma\tilde{\delta}(t-1)).$$

Подставив это выражение  $y(t-1)$  в (4.169''), получим

$$y(t) = \gamma(2-\gamma)\tilde{\theta}_0 + \gamma\tilde{\theta}_1 x(t) + \gamma(1-\gamma)\tilde{\theta}_1 x(t-1) + (1-\gamma)^2 y(t-2) + \tilde{\varepsilon}(t),$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(t) = [\delta(t) + (1-\gamma)\delta(t-1)] + \gamma[\tilde{\delta}(t) + (1-\gamma)\tilde{\delta}(t-1)].$$

Неограниченно продолжая подобную подстановку, т.е. последовательно выражая  $y(t-2)$ ,  $y(t-3)$  и т.д. по формуле (4.169'') и подставляя их в соответствующее выражение для  $y(t)$ , получим в конечном счете

$$y(t) = \tilde{\theta}_0 + \theta_0 [x(t) + (1-\gamma)x(t-1) + (1-\gamma)^2 x(t-2) + \dots] + \varepsilon(t), \quad (4.170)$$

где свободный член получен в результате бесконечного суммирования величин  $\gamma\tilde{\theta}_0 + (1-\gamma)\gamma\tilde{\theta}_0 + (1-\gamma)^2\gamma\tilde{\theta}_0 + \dots$ , коэффициент  $\theta_0 = \gamma\tilde{\theta}_1$ , а случайные остатки  $\varepsilon(t)$  получаются как бесконечные скользящие средние исходных остатков  $\delta(t)$  и  $\tilde{\delta}(t)$ , а именно:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (1-\gamma)^k [\delta(t-k) + \gamma\tilde{\delta}(t-k)] \right\}.$$

Сравнив (4.170) со средним выражением в соотношении (4.167), убеждаемся в том, что модель частичного приспособления действительно относится к классу геометрических структур Койка (с точностью до условий, специфицирующих случайные остатки).

Схема «частичного приспособления» имеет довольно широкий спектр экономических приложений. Упомянем о некоторых из них.

Пусть  $x(t)$  в соотношении (4.168) определяет уровень продаж некоторого товара, а  $y^*(t)$  — соответствующая оптимальная (с позиций равновесия) реакция со стороны производства (т.е. оптимальный объем предложения этого товара). Если принимать в расчет затраты двух типов — потери, связанные с нарушением равновесия, и затраты, связанные с изменениями состояния производителя, — и если полагать, что оба типа потерь, составляющие суммарные потери  $L$ , пропорциональны квадратам соответствующих отклонений, т.е.

то задача состоит в выборе (при *заданных* величинах  $y(t-1)$  и  $y^*(t)$ ) значения  $y(t)$ , минимизирующего потери  $L(y(t))$ . Приравняем к нулю производную

$$\frac{dL(y(t))}{dy(t)} = 2c_1(y(t) - y^*(t)) + 2c_2(y(t) - y(t-1)) = 0.$$

Отсюда определяем

$$y(t) = y(t-1) + \frac{c_1}{c_1 + c_2} (y^*(t) - y(t-1)),$$

что в точности соответствует основному принципу (4.169) частичного приспособления.

По совершенно аналогичной схеме может быть рассмотрена модель, связывающая между собой доход  $x(t)$  с оптимальной ( $y^*(t)$ ) и реальной, т. е. наблюдаемой ( $y(t)$ ), величинами потребительских расходов. Ведь потребитель не располагает всей необходимой информацией о своем «пространстве потребностей», так что не может *мгновенно оптимально среагировать* в своих расходах на изменение (в большую или меньшую сторону) своего дохода. Этой мгновенной реакции препятствуют также определенная инерционность потребительского процесса, наличие определенных (пусть неформальных) обязательств, связанных с прежним уровнем его дохода.

Наконец, модель частичного приспособления используется при корректировке (в динамике) доли прибыли, выплачиваемой компанией в виде доходов своим акционерам. При росте прибыли  $x(t)$  выплачиваемые дивиденды  $y(t)$  также увеличиваются, но, как правило, не в той же пропорции  $\theta$ , которая определена компанией в качестве целевой долгосрочной доли выплат. Это объясняется рядом причин, в том числе осторожностью руководства компании: возрастание прибыли может оказаться временным, поэтому если при этом сохранить долю  $\theta$ , то в случае последующего понижения прибыли дивиденды придется сокращать, а это — серьезный удар по репутации фирмы. Как следствие, динамика выплаты дивидендов  $y(t)$  в зависимости от текущей прибыли  $x(t)$  и *желаемого* (в долгосрочной перспективе) объема выплат дивидендов  $y^*(t) = \theta x(t)$  регулируется во многих случаях соотношением (4.169).

«Узкое место» модели частичного приспособления состоит в том, что иногда предположение о зависимости оптимального значения  $y^*(t)$  *только от текущего* значения  $x(t)$  оказывается не адекватным действительности. Другими словами, часто решающим мотивом для принятия ответственных решений не может служить *единственное* значение *объясняющей* переменной. Один из способов преодоления этой

ограниченности отражен в описываемой ниже модели адаптивных ожиданий.

**Модель адаптивных ожиданий.** Моделирование закономерностей с учетом ожидаемых ситуаций — одна из важнейших проблем прикладной экономики. Это, в первую очередь, верно для макроуровня, на котором инвестиции, сбережения и спрос на активы оказываются особенно чувствительными к ожиданиям относительно будущего. Если в модели частичного приспособления в роли корректируемой величины выступала зависимая переменная (результатирующий показатель)  $y(t)$ , то в модели адаптивных ожиданий корректируется объясняющая переменная  $x^*(t + 1)$ , которая определяет ожидаемое на момент  $t + 1$  (но экспертно формируемое в момент  $t$ ) значение аргумента в исследуемой зависимости вида

$$y(t) = \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1 x^*(t + 1) + \delta(t), \quad (4.171)$$

где возмущающие воздействия  $\delta(t)$  гомоскедастичны и сериально некоррелированы, а также не коррелированы с наблюдаемым значением аргумента  $x(t)$ . В соответствии с основным допущением модели механизм формирования ожидаемого значения  $x^*(t + 1)$  описывается соотношением

$$\begin{aligned} x^*(t + 1) &= x^*(t) + \gamma(x(t) - x^*(t)), \\ 0 &\leq \gamma \leq 1, \end{aligned} \quad (4.172)$$

или, что то же,

$$x^*(t + 1) = \gamma x(t) + (1 - \gamma)x^*(t). \quad (4.172')$$

Это означает, что значение объясняющей переменной, ожидаемое в момент времени  $t + 1$ , формируется в момент времени  $t$  как взвешенное среднее ее реального и ожидаемого значений в текущий момент времени. От значения  $\gamma$  зависит скорость адаптации ожидаемых значений к реальности. Мы видим, что в отличие от процесса частичного приспособления, который базируется на инерции и прошлой динамике показателей, процесс адаптивных ожиданий направлен в будущее. Другими словами, мы формируем значение результирующего показателя на текущий момент времени с учетом будущего значения объясняющей переменной.

Покажем, что и процесс адаптивных ожиданий вкладывается в общую схему моделей с распределенными лагами, имеющих геометрическую структуру Койка. Для этого перепишем (4.172') в виде



или, что то же,

$$[1 - (1 - \gamma)F_-]x^*(t + 1) = \gamma x(t),$$

где с помощью  $F_-$ , как и прежде, обозначен оператор сдвига функции времени на один временной такт назад. Выражая отсюда  $x^*(t + 1)$  и подставляя это выражение в (4.171), получаем

$$y(t) = \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1 \frac{\gamma x(t)}{1 - (1 - \gamma)F_-} + \delta(t). \quad (4.173)$$

После домножения всех членов этого выражения на  $1 - (1 - \gamma)F_-$  и применения этого оператора к  $y(t)$ ,  $\tilde{\theta}_0$  и  $\delta(t)$  получаем

$$y(t) = \gamma \tilde{\theta}_0 + (1 - \gamma)y(t - 1) + \gamma \tilde{\theta}_1 x(t) + (\delta(t) - (1 - \gamma)\delta(t - 1)). \quad (4.173')$$

Сравнение модели (4.173') с финальной формой (4.167') модели Койка свидетельствует об их эквивалентности.

Модель гиперинфляции Кагана и модель потребления Фридмана (основанная на «гипотезе о перманентном доходе») представляют собой наиболее известные примеры эконометрических приложений модели адаптивных ожиданий<sup>26</sup>. В модели гиперинфляции исследуется соотношение между спросом на денежные остатки и *ожидаемым* изменением уровня инфляции. В несколько упрощенном (по сравнению с первоисточником) варианте модель может быть описана следующим образом. Изменение спроса на денежные остатки в момент времени  $t$  определяется показателем

$$y(t) = \ln \left[ \frac{M(t)}{P(t)} \right],$$

где  $M(t)$  — индекс изменения объема денег в обращении, а  $P(t)$  — индекс цен. Зависимость изменения спроса на денежные остатки в момент  $t$  от *ожидаемого* в момент  $t + 1$  уровня инфляции  $x^*(t + 1)$  определяется уравнением

$$y(t) = -\theta_0 - \theta_1 x^*(t + 1) + \delta(t), \quad \theta_0 > 0, \theta_1 > 0.$$

Адаптивные ожидания уровня инфляции определялись формулой (4.172). Модель рассчитывалась по месячным данным, характеризующим семь инфляционных периодов в США в промежутке 1921–1956 гг.

<sup>26</sup>См.: Cagan P. The Monetary Dynamics of Hyperinflation // Studies in the Quantity Theory of Money. Chicago: University of Chicago Press, 1956;

(как отдельно для каждого периода, так и агрегированно по совокупности всех семи периодов).

*Модель потребления Фридмана* основана на двух постулатах. Один из них выделяет эту модель среди других многочисленных моделей, исследующих зависимость объема потребления ( $y$ ) от дохода ( $x$ ) (эта задача также рассматривалась в п. 7.2 учебника [Айвазян (2010)] в связи с методом инструментальных переменных, используемым в проблеме построения регрессионной модели со стохастическими предикторами). В соответствии с этим постулатом фактический объем потребления  $y(t)$  и фактический уровень дохода  $x(t)$  складываются из перманентной (постоянной) и временной (случайной) составляющих, т. е.

$$\begin{aligned}y(t) &= y^*(t) + y_v(t), \\x(t) &= x^*(t) + x_v(t).\end{aligned}$$

Предполагается, что временная составляющая потребления  $y(t)$  и временная составляющая дохода  $x(t)$  являются случайными переменными со средними значениями, равными нулю, и постоянными значениями дисперсий и что распределены они независимо от постоянного дохода, постоянного потребления и друг от друга.

Второй постулат не отличается от базовых допущений большинства других аналогичных моделей и состоит в допущении, что  $x^*(t)$  и  $y^*(t)$  связаны между собой классической линейной регрессионной моделью, т. е.

$$y^*(t) = \theta_0 + \theta_1 x^*(t) + \delta(t). \quad (4.174)$$

Однако величина постоянного дохода  $x^*(t)$  (впрочем, так же, как и величина  $y^*(t)$ ) в модели (4.174) ненаблюдаема. Эта проблема обходится с помощью предположения, что изменение постоянного дохода  $x^*(t)$  подчиняется закону адаптивных ожиданий (4.172). Другими словами, домашние хозяйства (индивиды) корректируют свое представление об ожидаемом постоянном доходе по мере роста (убывания) фактического дохода, но не на полное значение прироста (убывания), сознавая, что изменения фактического дохода частично объясняются вариацией временной его составляющей.

Возвращаясь к (4.174) и подставляя вместо  $y^*(t)$  разность  $y(t) - y_v(t)$ , а вместо  $x^*(t)$  его выражение, полученное из соотношения (4.172), имеем

$$y(t) = \theta_0 + \theta_1 \frac{\gamma x(t)}{1 - (1 - \gamma)F_-} + (\delta(t) + y(t)). \quad (4.175)$$

Сравнивая это выражение с (4.173) и учитывая эквивалентность (4.173) и (4.167'), мы видим, что модель потребления Фри-



- (i) элементы  $w_k$  нормированной лаговой структуры при  $M > 1$  сначала возрастают (при  $k < (pM - 1)/(1 - p)$ ), а затем убывают (при  $k > (pM - 1)/(1 - p)$ );
- (ii) среднее значение лага ( $E\tau$ ) и его дисперсия ( $D\tau$ ) являются возрастающими функциями как  $M$ , так и  $p$ , а именно:

$$E\tau = \frac{pM}{1-p};$$

$$D\tau = \frac{pM}{(1-p)^2}.$$

*Лаговая структура, основанная на биномиальном законе распределения вероятностей, является естественным аналогом структуры Паскаля в классе конечных моделей с распределенными лагами. Ее нормированные элементы  $w_k$  задаются с помощью соотношений*

$$w_k = C_T^k p^k (1-p)^{T-k}, \quad k = 0, 1, \dots, T. \quad (4.176)$$

Мы видим, что данный класс конечных лаговых структур описывается *однопараметрическим* семейством (параметр  $p$  — некоторое число между 0 и 1). Из свойств биномиального распределения следует, что последовательность (4.176) образует так же, как и в структуре Паскаля, *униимодальный ряд*, причем  $E\tau = pT$  и  $D\tau = p(1-p)T$ .

Описанные вероятностные лаговые структуры применимы в ситуациях, когда из содержательного смысла анализируемых зависимостей вида (4.162) следует, что весовые коэффициенты  $\theta_k$  (а значит, и  $w_k$ ) начинают монотонно убывать не сразу, а только после некоторого  $k_0$ . С подобными ситуациями исследователь имеет дело, например, при анализе зависимостей, связывающих между собой *входные и выходные характеристики процессов накопления и распределения ресурсов* (см. выше, примеры 4.9 и 4.10).

## Выводы

1. В гл. 4 представлен обзор **VAR-моделей**, которые играют важную роль в современном экономическом и финансовом анализе. Особое внимание уделяется аспектам, связанным с выбором модели и оценкой ее параметров; также представлены некоторые эмпирические приложения.

Ниже в данном пункте «Выводов» приведены ключевые результаты, относящиеся к тематике VAR-моделей.

- $m$ -мерный VAR(p)-процесс  $Y_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{m,t})'$  задается формулой

$$Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где через  $c$  обозначен  $(m \times 1)$ -вектор констант, а  $\Phi_j$  —  $(m \times m)$ -матрица авторегрессионных коэффициентов для  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $\varepsilon_t$  —  $(m \times 1)$ -вектор, отвечающий многомерному белому шуму.

- VAR(p)-процесс является ковариационно-стационарным, если все собственные значения, определяемые как решения детерминантного уравнения:

$$\det(\mathbf{I}_n \lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \Phi_2 \lambda^{p-2} - \dots - \Phi_p) = 0 \quad (*)$$

лежат **внутри** единичного круга. Таким образом, VAR(p)-процесс является ковариационно-стационарным в случае, если  $|\lambda| < 1$  для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих (\*).

Это равносильно утверждению: VAR(p)-процесс является ковариационно-стационарным, если все значения  $z$ , удовлетворяющие следующему уравнению:

$$\det(\mathbf{I}_n - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \dots - \Phi_p z^p) = 0$$

лежат **вне** единичного круга.

- VMA( $\infty$ ) представление для VAR(p)-модели дается выражением:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

а функция импульсного отклика для  $h = 0, 1, 2, \dots$  определяется следующим образом:

$$\frac{\partial Y_{t+h}}{\partial \varepsilon'_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_{1,t+h}}{\partial \varepsilon_{1,t}} & \dots & \frac{\partial Y_{1,t+h}}{\partial \varepsilon_{m,t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_{n,t+h}}{\partial \varepsilon_{1,t}} & \dots & \frac{\partial Y_{n,t+h}}{\partial \varepsilon_{m,t}} \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \varepsilon_{j,t}} \right]_{m \times m}.$$

- Единичный шок при использовании *разложения Холецкого* интерпретируется как шок величиной, равной одному стандартному отклонению соответствующего элемента исходной  $Y_t$ . Однако единичный шок в случае *рекурсивной ортогонализации* имеет прямой смысл, который отвечает тому, что соответствующий элемент  $Y_t$

- Пусть  $\mathbf{E}^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots)$  линейный предиктор для  $Y_{t+s}$ , который использует только историческую информацию для  $Y$ ;  $\mathbf{E}^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots)$  — линейный предиктор для  $Y_{t+s}$ , использующий историческую информацию для  $Y$  и  $X$ . Мы будем говорить, что  $X$  не является *причиной по Гранжеру* для  $Y$ , если (см. п. 4.2.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(Y_{t+s} - \mathbf{E}^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots))^2] &= \\ &= \mathbf{E}[(Y_{t+s} - \mathbf{E}^*(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots))^2]. \end{aligned}$$

- Оптимальное число лагов для VAR(p)-модели может быть выбрано при помощи информационного критерия Акаике, информационного критерия Шварца, информационного критерия Ханнана — Куинна, критерия итоговой ошибки прогнозирования, тестов отношения правдоподобия. Следует помнить, что в условиях очень малых выборок небольшая недооценка фактического числа лагов не обязательно оказывает пагубное влияние на точность прогнозов.
- Следует помнить о необходимости проверять свойства остатков модели с использованием тестов Портманто, тестов множителей Лагранжа и тестов на нормальность (см. п. 4.2.8).

2. В главе рассмотрен также класс **структурных VAR (SVAR)-моделей**, при помощи которых можно анализировать механизмы монетарных переходов и источники флуктуаций бизнес-циклов (п. 4.3). Поясним некоторые важные моменты анализа таких моделей на примере двумерного случая.

- В матричном виде двумерная SVAR-модель имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}y_t &= \gamma_0 + \mathbf{\Gamma}y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \mathbf{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] &= \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Все переменные являются эндогенными и поэтому МНК не является подходящим методом оценки параметров модели. Представление средствами структурных скользящих средних (SMA-представление) такой модели имеет вид:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(0)} & \theta_{12}^{(0)} \\ \theta_{21}^{(0)} & \theta_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(1)} & \theta_{12}^{(1)} \\ \theta_{21}^{(1)} & \theta_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{bmatrix} + \dots,$$

где  $\Theta_0 = \mathbf{B}^{-1} \neq \mathbf{I}_2$ .  $\Theta_0$  отвечает начальным воздействиям структурных шоков и определяет одномоментную корреляцию между  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$ , тогда как элементы матриц  $\Theta_k$ ,  $\theta_{ij}^{(k)}$ , определяют динамические множители или импульсные отклики  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  на изменения в структурных ошибках  $\varepsilon_{1t}$  и  $\varepsilon_{2t}$ .

- Типичные идентификационные ограничения включают: нулевые ограничения на элементы  $\mathbf{B}$  (например,  $b_{12} = 0$ ); линейные ограничения на элементы  $\mathbf{B}$  (например,  $b_{12} + b_{21} = 1$ ); долгосрочные ограничения на кумулятивное влияние.
- Идентификация такой SVAR/SMA-модели достигается в предположении о том, что временные шоки (шоки  $\varepsilon_2$ ) не имеют долгосрочного влияния на  $y_{1t}$  или  $y_{2t}$ , в то же время допускается наличие постоянных шоков (шоки  $\varepsilon_1$ ), имеющих долгосрочное влияние на  $y_{1t}$ , но не на  $y_{2t}$ .

**3.** Эконометрическая модель, выраженная *системой одновременных уравнений* (СОУ), служит для объяснения поведения эндогенных (т. е. формирующихся в процессе и внутри функционирования описываемой социально-экономической системы) переменных в зависимости от значений экзогенных (задаваемых извне) и лаговых эндогенных переменных. СОУ широко используются в проведении многовариантных сценарных расчетов, касающихся социально-экономического развития анализируемой системы, а также в задачах прогноза экономических и социально-экономических показателей (п. 4.4).

**4.** *Общая проблема идентификации СОУ* является, наряду со спецификацией модели, центральной в построении и анализе модели. Она включает в себя *проверку соблюдения условий идентифицируемости* каждого отдельного уравнения и всей системы в целом (см. п. 4.4.3), а также реализацию *процедур статистического оценивания неизвестных значений параметров* системы (см. п. 4.4.4).

**5.** Проверка и соблюдение условий идентифицируемости производится как на стадии составления уравнений системы (1-е, 3-е и 4-е условия). Идентификация системы производится с помощью анализа исходных статистических данных (2-е условие).

условие), так и на стадии анализа результатов статистического оценивания неизвестных параметров системы (1-е условие в части, касающейся обратимости матрицы  $\mathbf{B}$ , а также 5-е условие).

6. Методы статистического оценивания параметров СОУ подразделяются на два класса: 1) методы, предназначенные для оценки параметров *одного отдельно взятого* уравнения системы (МНК, косвенный МНК, 2МНК, метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией, «оценки класса  $k$ »); 2) методы, предназначенные для одновременного оценивания параметров всех уравнений системы с учетом их взаимосвязей (3МНК, метод максимального правдоподобия с полной информацией).

7. Если уравнения структурной формы модели могут быть расположены в таком порядке, что  $i$ -е уравнение ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) может содержать в качестве объясняющих эндогенных переменных только переменные  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(i-1)}$  (или часть из них), а случайное возмущение  $\delta_i^{(i)}$  этого уравнения не коррелирует со всеми этими эндогенными переменными, то такая система называется *рекурсивной*, и последовательное применение к каждому уравнению такой системы обычного МНК дает состоятельные оценки ее структурных параметров (см. п. 4.4.4). Класс рекурсивных систем является *простейшим* с точки зрения решения задачи оценивания структурных параметров СОУ.

8. Если исследователя интересуют только параметры приведенной формы и задача прогноза эндогенных переменных, то он может ограничиться применением обычного метода наименьших квадратов к каждому отдельному уравнению приведенной формы (с последующей оценкой, если это необходимо, *идентифицируемых* параметров структурной формы). Такой образ действий называют *косвенным методом наименьших квадратов*, или *методом наименьших квадратов без ограничений*, а оценки, полученные с его помощью, будут состоятельными (см. п. 4.4.5).

9. В ситуациях, когда среди уравнений системы имеются неидентифицируемые, так же как и в случаях, когда оценивание и анализ параметров *структурной* формы представляют для исследователя самостоятельный интерес, рекомендуется применять *двухшаговый метод наименьших квадратов* (2МНК). Этот метод предназначен для оценивания параметров *отдельного уравнения* структурной формы, а его последовательное применение к каждому из уравнений структурной формы СОУ позволяет получить состоятельные оценки всех параметров анализируемого уравнения (хотя 2МНК и не учитывает возможные взаимосвязи между уравнениями системы).



10. Сущность двух шагов 2МНК заключается в следующем. На 1-м шаге для каждой эндогенной переменной, играющей роль объясняющей в анализируемом уравнении структурной формы, с помощью обычного МНК строится регрессия на все predetermined переменные  $X$ . На 2-м шаге эта эндогенная переменная заменяется в рассматриваемом уравнении ее регрессионным выражением через  $X$ , после чего в правой части этого уравнения остаются только predetermined переменные и к нему применяется обычный МНК. В моделях с большим числом predetermined переменных в целях снижения размерности рекомендуется на 1-м шаге строить регрессию предикторной эндогенной переменной не на все predetermined переменные, а лишь на небольшое число их главных компонент.

11. Если структурные случайные возмущения  $\delta_t^{(i)}$  различных уравнений системы взаимно коррелированы, то для оценивания параметров структурной формы рекомендуется применять *трехшаговый метод наименьших квадратов* (3МНК). Этот метод предназначен для одновременного оценивания структурных параметров всех уравнений системы и дает их состоятельные оценки, по эффективности превосходящие в данном случае оценки (тоже состоятельные) 2МНК.

12. 3МНК использует полученные на первых двух шагах 2МНК оценки параметров каждого из уравнений для вычисления оценки ковариационной матрицы возмущений различных уравнений структурной формы. Затем на 3-м шаге оценки структурных параметров системы *пересчитываются* с помощью *обобщенного* МНК в рамках соответствующей схемы обобщенной линейной модели множественной регрессии, в которой в качестве ковариационной матрицы остатков используется полученная ранее оценка ковариационной матрицы возмущений.

13. В ряде ситуаций могут оказаться полезными и другие методы статистического оценивания параметров СОУ. Для оценивания параметров *одного отдельно взятого уравнения* — это метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией (требующий, правда, дополнительного априорного предположения о нормальном характере распределения структурных возмущений модели), «оценки класса  $k$ »; для одновременной оценки всех параметров структурной формы системы — это метод максимального правдоподобия с полной информацией. Однако эти методы из-за их относительно сложной вычислительной реализации и дополнительных априорных допущений существенно реже используются в эконометрических приложениях.

14. Одна из главных конечных прикладных целей построения и анализа эконометрических моделей в виде СОУ — это точечный и интервальный *прогноз эндогенных переменных* по заданным значениям predetermined переменных и связанная с этим *задача прогнозирования*

говариантных сценарных расчетов, показывающих, как будут «себя вести» эндогенные переменные при различных сочетаниях значений предопределенных переменных. «Точечное решение» этих задач основано на подсчете значений эндогенных переменных с помощью статистически оцененной приведенной формы СОУ. Для получения «интервальных» вариантов решения необходимо уметь оценивать ковариационную матрицу ошибок точечного прогноза, что является задачей аналитически достаточно сложной (см. п. 4.4.6).

15. Важные средства анализа качества построенных моделей, точности получаемых с их помощью прогнозов, наконец, решения задачи выбора наилучшей модели предоставляют исследователю разного рода имитационно-компьютерные системы экспериментирования. Среди них следует выделить метод Монте – Карло, бутстреп-метод, а также схему перекрестного анализа дееспособности модели (или метода Cross-validation), см. п. 4.4.7.

16. Бывает так, что две или более нестационарных переменных меняются во времени синхронно так, что их линейная (или нелинейная) комбинация представляет собой стационарный процесс. Эта важное наблюдение является основой понятия коинтеграции (см. п. 4.5). В главе представлен обзор основных свойств коинтеграционных систем, а также обзор подходов к их спецификации и тестированию. Ниже приведены некоторые ключевые результаты по теме коинтеграции.

- Определение коинтеграции по Энглу – Гранжеру: компоненты  $(m \times 1)$ -вектора  $Y_t$  коинтегрированы с порядком  $(d, b)$  (что обозначается обычно через  $Y_t \sim CI(d, b)$ , с  $b, d \in \mathbb{N}_+$ ), если все компоненты  $Y_t$  являются  $I(d)$  и существует  $(n \times 1)$ -вектор  $\gamma$  (коинтегрирующий вектор), такой, что линейная комбинация:  $Z_t = \gamma'Y_t \sim I(d-b)$  with  $b > 0$  является интегрированной порядка  $(d - b)$ . Типичный пример:  $\gamma = (1, -\beta)'$   $\Rightarrow \gamma'Y_t = Y_{1t} - \beta Y_{2t} = u_{1t} \sim WN$ .
- Многомерное разложение Бевриджа – Нельсона (п. 4.5.1): рассмотрим случай, когда  $(m \times 1)$ -вектор  $Y_t$  является  $I(1)$  и описывается  $VMA(\infty)$ -процессом в первых разностях  $\Delta Y_t$ ,  $\Delta Y_t = \delta + u_t = \delta + \Psi(L)\varepsilon_t$ , где  $u_t$  имеет нулевое среднее и является  $I(0)$ , а  $\delta = E(\Delta Y_t)$  – вектор констант. Более того,  $\Psi(1) = I_m + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \dots \neq 0_{m \times m}$  and  $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_{j,kl}| < \infty$  для всех  $k, l = 1, \dots, m$ . Тогда  $Y_t$  может быть записан как:

$$Y_t = \underbrace{\delta \cdot t}_{\text{детерминированный тренд}} + \underbrace{\Psi(1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t)}_{\text{стохастический тренд}} + \underbrace{\eta_t}_{\text{стационарный процесс}} - \underbrace{\eta_0 + Y_0}_{\text{начальные условия}}$$

где  $\Psi(1) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j$ ,  $\eta_t = \alpha(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}$   $\alpha_j = -(\Psi_{j+1} + \Psi_{j+2} + \dots + \Psi_{j+3} + \dots)$  и  $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ .

- Если  $(m \times 1)$ -мерный процесс  $Y_t \sim CI(1, 1)$  является коинтегрированным с  $h$  коинтеграционными соотношениями, задаваемыми  $\Gamma$ , тогда  $(h \times 1)$ -мерный процесс  $\Gamma'Y_t$  является тренд-стационарным.
- *VAR-представление*: если система  $Y_t$  является коинтегрированной, конечного VAR( $p$ )-представления в первых разностях  $\Delta Y_t$  не существует. Однако предположим, что коинтегрированная  $m$ -мерная VAR( $p$ )-система  $Y_t$  с  $h$  коинтегрирующими соотношениями существует и задается как:

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \\ \Phi_p(L)Y_t &= \alpha + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Необходимым условием является так называемое *условие редуцированного ранга*  $\Phi_p(1) = B\Gamma'$ , где  $B$  и  $\Gamma$  являются  $(m \times h)$ -матрицами полного столбцового ранга  $h$ .

- *VEC-представление*: если мы вычтем  $Y_{t-1}$  из обеих частей представленной выше VAR( $p$ )-системы, то, с использованием редуцированного ранга, получим:

$$\Delta Y_t = \alpha - B\Gamma'Y_{t-1} + \zeta_1 \Delta Y_{t-1} + \zeta_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t,$$

где  $Z_t = \Gamma'Y_t$  — тренд стационарно, а  $B$  — матрица *нагрузок или корректирующие факторы*, поскольку она определяет то, каким образом прежние флуктуации (ошибки или отклонения от среднего, или отклонения от долгосрочного соотношения равновесия) стационарного процесса  $Z_t$  корректируют изменения процесса  $Y_t$ , т. е.  $\Delta Y_t$ . Следует помнить, что  $Z_t$  — стационарный вектор, выражающий  $h$  коинтеграционных соотношений среди  $Y_t$ .

- Наличие детерминированных компонент в VEC-моделях является важным, поскольку они меняют процедуру тестирования и проверку гипотез (в частности, должны использоваться другие критические значения). Может быть идентифицировано пять возможных случаев, соответствующих различным ограничениям на пара-

- *Тест Энгла – Гранжера, основанный на использовании остатков.* На первом шаге строится регрессия  $Y_{1t}$  на  $(m - 1)$  остальных элементов  $Y_t$ , для удобства обозначенная как  $((m - 1) \times 1)$ -вектор  $Y_{2t}$ ;  $\mu$  – вектор констант:  $Y_{1t} = \mu + a'Y_{2t} + Z_t$ . На втором шаге производится тест на единичные корни для МНК-остатков  $Z_t = Y_{1t} - \hat{\mu} - \hat{a}'Y_{2t}$ . Это делается для того, чтобы выяснить, является ли  $Z_t$  интегрированным или нет. Критические значения отличны от тех, которые используются для расширенного теста Дики – Фуллера.
- *Тест Йохансена.* Выводы относительно ранга коинтеграции  $h$  производятся с использованием теста отношения правдоподобия. Поскольку  $h$  равно числу ненулевых собственных значений матрицы  $\zeta_0 = -\Phi(1)$ , тест использует эти собственные значения. В тесте следа рассматривается гипотеза  $H_0 : h \leq h_0$  против  $H_1 : h > h_0$ . Он основан на сумме  $(m - h_0)$  наименьших собственных значений. Мы можем проверять наличие и число коинтеграционных соотношений с использованием последовательности тестов следа, где принятие нулевой гипотезы в первый раз отвечает числу коинтеграционных соотношений.

17. Проанализированы важные нелинейные модели, рассматриваемые в экономической и финансовой литературе (п. 4.5.5). В частности, рассмотрены модели для анализа паритета покупательной способности (ППС) или закона единственной цены. Отметим, что лишь недавно появились несколько теоретических работ, в которых представлены соответствующие процедуры тестирования и оценивания. В этой связи в главе представлен обзор недавних результатов для тестирования **пороговой коинтеграции** и для спецификации этой модели. Ниже приведены некоторые ключевые результаты по этой тематике.

- В общем виде *пороговая векторная модель коррекции остатками* (TVECM) имеет следующий вид (см. п. 4.5.6):

$$\Delta \mathbf{p}_t = \alpha^{(J_t)} - \mathbf{B}^{(J_t)} \Gamma' \mathbf{p}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j^{(J_t)} \Delta \mathbf{p}_{t-j} + \varepsilon_t,$$

если  $\theta^{(r-1)} < \Gamma' \mathbf{p}_{t-d} \leq \theta^{(r)}$ ,

где  $\mathbf{p}_t = (p_t^A p_t^B)'$  – вектор цен на рынках  $A$  и  $B$ , а  $r = 1, 2, \dots, l$ ,  $l + 1$  – индексы, отвечающие различным режимам. Через  $\alpha^{(J_t)}$  обозначены зависящие от режима средние, где  $J_t = r$  сигнализирует об  $r$ -м режиме.  $\mathbf{B}^{(J_t)}$  включает параметры, зависящие от

режима, характеризующие степень реагирования изменений цен  $\Delta p_t$  на отклонения от долгосрочного равновесия с лагами на  $d$  периодов. Значения  $\theta^{(r)}$  упорядочены таким образом, что  $\theta^{(0)} < \theta^{(1)} < \dots < \theta^{(l)} < \theta^{(l+1)}$ , где  $\theta^{(0)} = -\infty$ ,  $\theta^{(l+1)} = \infty$ ; их называют *пороговыми параметрами*, или, если коротко, *порогами*.

- *Оценивание TVECM-модели*: один способ оценивания состоит в минимизации суммы квадратов ошибок; другой способ состоит в максимизации функции правдоподобия.
- *Тестирование пороговой коинтеграции* (п. 4.5.7): в работах [Balke, Fomby (1997)], [Lo, Zivot (2001)] предложена двухшаговая процедура, в которой на первом шаге тестируется нулевая гипотеза об отсутствии линейной коинтеграции против альтернативы о ее наличии; на втором шаге, если нулевая гипотеза отклонена, то тестируется нулевая гипотеза о наличии линейной коинтеграции против альтернативы о наличии пороговой коинтеграции. Однако пороговая природа альтернативной гипотезы может значительно снижать мощность стандартных тестов на первом шаге. В работе [Seo (2006)] впервые представлена sup-Wald-статистика для тестирования нулевой гипотезы об отсутствии коинтеграции против альтернативы об адекватности TVECM-модели. Наконец, отметим, что возможны всего четыре гипотезы: отсутствие линейной коинтеграции, отсутствие пороговой коинтеграции, наличие линейной коинтеграции и пороговая коинтеграция. Однако упомянутая выше двухшаговая процедура не предполагает гипотезу об отсутствии пороговой коинтеграции.
- В ситуациях, когда нестационарные однородные временные ряды  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , являются исходными данными для построения регрессии  $y$  по  $x$ , причем воздействие единовременного изменения одной из них ( $x$ ) на другую ( $y$ ) растянуто (*распределено*) во времени, большой прикладной интерес представляют так называемые *модели с распределенными лагами*. В рамках этого специального класса моделей проводится, в частности, интересный эконометрический анализ таких важных экономических явлений, как «процесс частичного приспособления», «модели адаптивных ожиданий» и др. (см. п. 4.6).

## Глава 5

# Анализ и моделирование волатильности

### 5.1. Одномерные модели авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH- и GARCH-модели)<sup>1</sup>

#### 5.1.1. Введение

Изучение волатильности доходности активов внесло важный вклад в понимание современных финансовых рынков. Волатильность считается мерой риска, а рисковость любого финансового актива — решающая характеристика, определяющая его равновесную цену. Модели *авторегрессионной условной гетероскедастичности* (ARCH) были разработаны для учета эмпирических закономерностей в финансовых данных. Многим финансовым временным рядам свойственны следующие стилизованные факты:

- Цены активов, вообще говоря, нестационарны. Доходности обычно стационарны. Некоторые финансовые временные ряды являются дробно интегрированными.
- Автокорреляция в рядах доходностей обычно слаба или отсутствует.

---

<sup>1</sup>Этот раздел главы представляет собой сокращенный вариант русскоязычной версии работы Э. Росси (E. Rossi), опубликованной в электронном журнале «Квантиль» (№ 8, 2010) в переводе Б. Гершмана. Любезные согласия на включение этого материала в наш учебник мы получили от автора Эдуардо Росси и главного редактора электронного журнала «Квантиль» Станислава Анатольева.  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.рф>

- Серийная независимость между квадратами значений ряда часто отвергается в пользу наличия нелинейной зависимости между последовательными наблюдениями.
- Волатильность рядов доходностей кластеризована.
- Нормальность отвергается в пользу некоторого распределения с тяжелыми хвостами.
- В некоторых рядах присутствует так называемый *эффект рычага*, т. е. изменения цен акций отрицательно коррелируют с изменениями волатильности. Когда рыночная стоимость фирмы падает, соотношение заемного и собственного капиталов обычно растет. Это повышает волатильность акционерного капитала, если доходность постоянна. Однако Блэк утверждает (см. [Black (1976)]), что реакция волатильности на направление изменения доходности слишком велика, чтобы полностью объясняться эффектом рычага.
- Волатильности динамических характеристик различных ценных бумаг очень часто движутся вместе.

Модель ARCH и ее обобщения применяются для моделирования волатильности доходностей большого числа финансовых активов, таких как ценные бумаги с фиксированным доходом, обменные курсы, индивидуальные акции и фондовые индексы. В классе ARCH-моделей с дискретным временем ожидания формулируются в терминах напрямую наблюдаемых величин, в то время как модели стохастической волатильности в дискретном или непрерывном времени включают латентные переменные состояния. Предложено, оценено и изучено огромное число моделей. Продолжают появляться новые модификации. Однако Энгл [Engle (2002)] выделяет как наиболее влиятельные модель GARCH, предложенную Боллерслевом [Bollerslev (1986)], и модель EGARCH Нельсона [Nelson (1991)]. Имеется множество обзоров разрастающейся литературы об ARCH-моделях, например [Andersen & Bollerslev (1998)], [Andersen et al. (2006)], [Bauwens et al. (2006)], [Bera & Higgins (1993)], [Bollerslev et al. (1992)], [Bollerslev et al. (1994)], [Degiannakis & Xekalaki (2004)], [Diebold (2004)], [Diebold & Lopez (1995)], [Engle (2001, 2004)], [Engle & Patton (2001)], [Pagan (1996)], [Palm (1996)], [Shephard (1996)] и [Teräsvirta (2009)].

Эти обзоры и главы в учебниках содержат все увеличивающийся список акронимов и аббревиатур, используемых для обозначения всего изобилия предложенных моделей и методов. Например, [Bollerslev (2009)] в качестве приложения к традиционным обзорам приводит справочник с длинным списком связанных с ARCH-моделями сокращений

Первые исследования в области эконометрического моделирования волатильности были исключительно параметрическими, но в последние годы происходит сдвиг в сторону менее параметрических и даже полностью непараметрических методов. Непараметрические подходы к моделированию волатильности, которые, как правило, не делают предположений о функциональных формах, позволяют получать гибкие и в то же время состоятельные (по мере увеличения частоты выборки для ряда доходностей) оценки реализованной волатильности, см. обзор в [Andersen et al. (2009)].

### 5.1.2. Для чего нужны ARCH-модели?

Теорема Волда о разложении устанавливает, что любой ковариационно стационарный ряд  $\{y_t\}$  можно записать в виде суммы линейно детерминированной компоненты и линейно стохастической, представимой в виде квадратично суммируемого одностороннего скользящего среднего. Таким образом,

$$y_t = d_t + u_t,$$

где  $d_t$  — линейно детерминированная компонента, а  $u_t$  — линейно регулярный ковариационно стационарный случайный процесс:

$$u_t = B(L)\varepsilon_t,$$

$$B(L) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i L^i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 < \infty, \quad b_0 = 1,$$

где  $L$  — лаговый оператор, т. е.  $x_{t-1} = Lx_t$ , и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varepsilon_t] &= 0, \\ \mathbf{E}[\varepsilon_t \varepsilon_\tau] &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 < \infty, & t = \tau, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Некоррелированная последовательность остатков  $\varepsilon_t$  необязательно гауссова, а следовательно, необязательно независимая. Зависимые остатки свойственны нелинейным временным рядам вообще и условно гетероскедастичным временным рядам в частности.

Предположим, что  $y_t$  — линейный ковариационно стационарный процесс с *iid* остатками, а не просто белый шум. Безусловные среднее и дисперсия равны

$$\mathbf{E}[y_t] = 0,$$

$$\mathbf{E}[y_t^2] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2$$



и оба неизменны во времени. Условное среднее меняется во времени и имеет вид

$$\mathbf{E} [y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varepsilon_{t-i},$$

где  $\mathcal{F}_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$  — информационное множество, состоящее из прошлых значений процесса и другой информации, доступной в момент времени  $t-1$ . Эта модель не способна уловить динамику условной дисперсии. Действительно, условная дисперсия  $y_t$  постоянна:

$$\mathbf{E} \left[ (y_t - \mathbf{E} [y_t | \mathcal{F}_{t-1}])^2 | \mathcal{F}_{t-1} \right] = \sigma_{\varepsilon}^2.$$

Это ограничение проявляется в свойствах условной дисперсии ошибки прогноза на  $k$  шагов вперед. Условный прогноз на  $k$  шагов вперед имеет вид

$$\mathbf{E} [y_{t+k} | \mathcal{F}_t] = \sum_{i=0}^{\infty} b_{k+i} \varepsilon_{t-i},$$

а соответствующая ошибка прогноза равна

$$y_{t+k} - \mathbf{E} [y_{t+k} | \mathcal{F}_t] = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \varepsilon_{t+k-i}$$

с условной дисперсией

$$\mathbf{E} \left[ (y_{t+k} - \mathbf{E} [y_{t+k} | \mathcal{F}_t])^2 | \mathcal{F}_t \right] = \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{i=0}^{k-1} b_i^2.$$

При  $k \rightarrow \infty$  условная дисперсия ошибки прогноза сходится к безусловной дисперсии  $\sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2$ . Для любого  $k$  условная дисперсия ошибки прогноза зависит только от  $k$ , но не от  $\mathcal{F}_t$ . Таким образом, простая модель с *iid* остатками не способна учесть важную информацию, доступную в момент времени  $t$ .

### 5.1.3. ARCH-модели (определения, свойства)

Обозначим  $\{\varepsilon_t(\theta)\}$  случайный процесс в дискретном времени с условными средним и дисперсией, параметризованными конечномерным вектором  $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^m$ , где  $\theta_0$  — истинное значение вектора параметров. Предположим для начала, что  $\varepsilon_t(\theta_0)$  является скалярным.

Обозначим

Скопировано с сайта

<http://учебники.информ2000.рф>

$\mathbf{E}_{t-1} [\cdot] \equiv \mathbf{E} [\cdot | \mathcal{F}_{t-1}]$ .

Разработка электронных библиотек

<https://право.информ2000.рф>

Аналогично определяется условная дисперсия:

$$\mathbf{D}_{t-1}[\cdot] \equiv \mathbf{D}[\cdot | \mathcal{F}_{t-1}].$$

**Определение 5.1** [Bollerslev et al. (1994)]. *Процесс  $\{\varepsilon_t(\theta_0)\}$  следует модели авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH), если*

$$\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t(\theta_0)] = 0, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

*и условная дисперсия*

$$\sigma_t^2(\theta_0) \equiv \mathbf{D}_{t-1}[\varepsilon_t(\theta_0)] = \mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2(\theta_0)], \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

*нетривиально зависит от  $\sigma$ -поля, порожденного прошлыми наблюдениями  $\{\varepsilon_{t-1}(\theta_0), \varepsilon_{t-2}(\theta_0), \dots\}$ .*

Пусть  $\{y_t(\theta_0)\}$  — исследуемый случайный процесс с условным средним

$$\mu_t(\theta_0) \equiv \mathbf{E}_{t-1}(y_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

Как  $\mu_t(\theta_0)$ , так и  $\sigma_t^2(\theta_0)$  измеримы относительно информационного множества на момент времени  $t - 1$ . Обозначим  $\{\varepsilon_t(\theta_0)\}$  процесс

$$\varepsilon_t(\theta_0) \equiv y_t - \mu_t(\theta_0).$$

Из уравнений (5.1) и (5.2) следует, что стандартизированный процесс

$$z_t(\theta_0) \equiv \varepsilon_t(\theta_0) \sigma_t^2(\theta_0)^{-1/2}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

имеет нулевое условное среднее ( $\mathbf{E}_{t-1}[z_t(\theta_0)] = 0$ ) и неизменную во времени единичную условную дисперсию. Можно считать, что  $\varepsilon_t(\theta_0)$  порождается процессом

$$\varepsilon_t(\theta_0) = z_t(\theta_0) \sigma_t^2(\theta_0)^{1/2},$$

где  $\varepsilon_t^2(\theta_0)$  — несмещенная оценка  $\sigma_t^2(\theta_0)$ . Предположим, что  $z_t(\theta_0) \sim \text{nid}(0, 1)$  и не зависит от  $\sigma_t^2(\theta_0)$ . Тогда

$$\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \mathbf{E}_{t-1}[\sigma_t^2] \mathbf{E}_{t-1}[z_t^2] = \mathbf{E}_{t-1}[\sigma_t^2],$$

<sup>2</sup>[Andersen (1996)] различает детерминированный, условно гетероскедастичный, условно стохастический и современно стохастический процессы для волатильности. Процесс волатильности является *детерминированным*, если информационное множество ( $\sigma$ -поле), обозначаемое как  $\mathcal{F}$ , совпадает с  $\sigma$ -полем всех случайных векторов в системе до момента  $t = 0$  включительно; *условно гетероскедастичным*, если  $\mathcal{F}$  содержит информацию, доступную и наблюдаемую в момент времени  $t - 1$ ; *условно стохастическим*, если  $\mathcal{F}$  содержит все случайные вектора до момента  $t - 1$ ; и *современно стохастическим*, если информационное множество  $\mathcal{F}$  содержит случайные векторы вплоть до момента времени  $t$ .

поскольку  $z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1} \sim \chi^2(1)$ . Медиана  $\chi^2(1)$  равна 0,455, так что  $P[\varepsilon_t^2 < \frac{1}{2}\sigma_t^2] > \frac{1}{2}$ . Прокси  $\varepsilon_t^2$  создает потенциально значительную ошибку при анализе малых выборок  $\sigma_t^2$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , хотя ошибка уменьшается по мере роста  $T$ .

Если условное распределение  $z_t$  неизменно во времени и имеет конечный четвертый момент, то

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] = \mathbf{E}[z_t^4] \mathbf{E}[\sigma_t^4] \geq \mathbf{E}[z_t^4] (\mathbf{E}[\sigma_t^2])^2 = \mathbf{E}[z_t^4] (\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2,$$

т. е.  $\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] \geq \mathbf{E}[z_t^4] (\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2$ , согласно неравенству Йенсена<sup>3</sup>. Строгое равенство имеет место только в случае постоянной условной дисперсии. Если  $z_t \sim \text{nid}(0, 1)$ , то  $\mathbf{E}[z_t^4] = 3$ , а следовательно, безусловное распределение  $\varepsilon_t$  имеет положительный эксцесс:

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] \geq 3 (\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2, \quad \mathbf{E}[\varepsilon_t^4] / (\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2 \geq 3.$$

Более того, эксцесс можно выразить как функцию от изменчивости условной дисперсии. Если  $\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , то  $\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^4] = 3(\mathbf{E}_{t-1}[\sigma_t^2])^2$  и

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] = 3\mathbf{E}[(\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2])^2] \geq 3(\mathbf{E}[\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2]])^2 = 3(\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2.$$

Далее

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] = 3(\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2 + 3\mathbf{E}[(\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2])^2] - 3(\mathbf{E}[\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2]])^2$$

и

$$k = \frac{\mathbf{E}[\varepsilon_t^4]}{(\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 + 3 \frac{\mathbf{E}[(\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2])^2] - (\mathbf{E}[\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t^2]])^2}{(\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2} = 3 + 3 \frac{\mathbf{D}[\sigma_t^2]}{(\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2}.$$

Другое важное свойство ARCH-процесса состоит в отсутствии условной серийной корреляции. Учитывая, что  $\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$ , по закону повторных математических ожиданий, имеем

$$\mathbf{E}_{t-h}[\varepsilon_t] = \mathbf{E}_{t-h}[b\mathbf{E}_{t-1}(\varepsilon_t)] = \mathbf{E}_{t-h}[0] = 0.$$

Из этого свойства ортогональности следует, что процесс  $\{\varepsilon_t\}$  условно некоррелирован:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{t-h}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}] &= \mathbf{E}_{t-h}[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}] - \mathbf{E}_{t-h}[\varepsilon_t] \mathbf{E}_{t-h}[\varepsilon_{t+k}] = \\ &= \mathbf{E}_{t-h}[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}] = \mathbf{E}_{t-h}[\mathbf{E}_{t+k-1}[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}]] = \\ &= \mathbf{E}[\varepsilon_t \mathbf{E}_{t+k-1}[\varepsilon_{t+k}]] = 0. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Неравенство Йенсена. Пусть  $X$  и  $g(X)$  — интегрируемые случайные величины. Тогда  $\mathbf{E}[g(X)] \leq g(\mathbf{E}[X])$ , если  $g(\cdot)$  — вогнутая функция, и  $\mathbf{E}[g(X)] \geq g(\mathbf{E}[X])$ , если  $g(\cdot)$  — выпуклая функция. Скопировано с сайта <http://www.chebfun.org> © 2000. Разработка электронных библиотек <http://www.chebfun.org> © 2000. <http://www.chebfun.org> © 2000. <http://www.chebfun.org> © 2000.

**Модель ARCH( $q$ )**, предложенная в [Engle (1982)], представляет условную дисперсию как линейную функцию квадратов прошлых возмущений:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2. \tag{5.3}$$

В этой модели для обеспечения положительности условной дисперсии параметры должны удовлетворять следующим условиям:  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_q \geq 0$ . Определив

$$\sigma_t^2 \equiv \varepsilon_t^2 - v_t,$$

где  $\mathbf{E}_{t-1}[v_t] = 0$ , можно записать модель (5.3) в виде  $AR(q)$ -процесса для  $\varepsilon_t^2$ :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + v_t,$$

где  $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ . Этот процесс является слабо стационарным тогда и только тогда, когда  $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ ; в этом случае безусловная дисперсия равна

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^2] = \omega / (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q).$$

Процесс характеризуется положительным эксцессом. Например, в случае модели ARCH(1) с  $\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \in N(0, \sigma_t^2)$ , эксцесс равен

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] / (\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2 = 3(1 - \alpha_1^2) / (1 - 3\alpha_1^2),$$

если  $3\alpha_1^2 < 1$ , а при  $3\alpha_1^2 = 1$

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] / (\mathbf{E}[\varepsilon_t^2])^2 = \infty.$$

В обоих случаях эксцесс превышает значение 3, характерное для нормального распределения, для которого коэффициент эксцесса, как известно, равен нулю.

Важнейшее свойство ARCH-модели состоит в том, что  $\text{cov}[\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-j}^2] \neq 0$ , хотя  $\text{cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}] = 0$  для  $j \neq 0$ . Рассмотрим связь ARCH-модели с билинейной моделью. Временной ряд  $\{\varepsilon_t\}$  следует билинейной модели, если

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s b_{jk} \varepsilon_{t-j} u_{t-k} + u_t,$$

где  $u_t$  — последовательность  $iid(0, \sigma_u^2)$  величин. Первые два условных момента имеют вид

$$\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t] = \sum_{i=1}^p \phi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s b_{jk} \varepsilon_{t-j} u_{t-k} + u_t,$$

В отличие от ARCH-модели, в которой условная дисперсия меняется во времени, в билинейной модели условная дисперсия постоянна. Тем не менее безусловные моменты в обеих моделях могут быть похожи. Например, билинейной модели

$$\varepsilon_t = b_{21}\varepsilon_{t-2}u_{t-1} + u_t, \quad \mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0, \quad \text{cov}[\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2] = b_{21}^2\sigma_u^2,$$

автокоррелированной для квадратов наблюдений, свойственна кластеризация больших и малых отклонений, как и ARCH-процессу.

#### 5.1.4. GARCH( $p, q$ )-модели

Для лаконичного моделирования условной гетероскедастичности [Bollerslev (1986)] и независимо от него [Taylor (1986)] предложили обобщенную ARCH-модель — GARCH( $p, q$ ):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2, \quad (5.4)$$

где  $\alpha(L) = \alpha_1L + \dots + \alpha_qL^q$ ,  $\beta(L) = \beta_1L + \dots + \beta_pL^p$ . Модель GARCH(1, 1) наиболее популярна в прикладных исследованиях<sup>4</sup>:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2. \quad (5.5)$$

Для корректного определения условной дисперсии в модели GARCH( $p, q$ ) все коэффициенты в соответствующей линейной ARCH-модели бесконечного порядка должны быть положительными. Записывая GARCH( $p, q$ )-модель как ARCH( $\infty$ ), получаем:

$$\sigma_t^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i\right)^{-1} \left(\omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2\right) = \omega^* + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \varepsilon_{t-k-1}^2. \quad (5.6)$$

Таким образом,  $\sigma_t^2 \geq 0$ , если  $\omega^* \geq 0$  и все  $\phi_k \geq 0$ . Неотрицательность  $\omega^*$  и  $\phi_k$  является также и необходимым условием неотрицательности  $\sigma_t^2$ . Чтобы  $\omega^*$  и  $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$  были корректно определены, предположим, что:

- i. Корни уравнения  $\beta(x)=1$  лежат вне единичного круга, и  $\omega \geq 0$ . Это условие гарантирует, что величина  $\omega^*$  конечна и положительна.
- ii. Полиномы  $\alpha(x)$  и  $1 - \beta(x)$  не имеют общих корней.

<sup>4</sup>Модель GARCH принадлежит к классу моделей детерминированной условной гетероскедастичности, в которых условная дисперсия является функцией от пере-  
Скопировано с сайта <http://www.nauka.ru> Разработка электронных библиотек  
информационном множестве на момент времени  $t$  <http://www.nauka.ru>

Эти условия не гарантируют ни то, что  $\sigma_t^2 \leq \infty$ , ни строгую стационарность ряда  $\{\sigma_t^2\}_{t=-\infty}^{\infty}$ . В простой GARCH(1, 1)-модели для положительности  $\sigma_t^2$  почти наверное требуется [Nelson & Cao (1992)], наряду с условиями (i) и (ii), чтобы

$$\begin{aligned}\omega &\geq 0, \\ \beta_1 &\geq 0, \\ \alpha_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

В моделях GARCH(1,  $q$ ) и GARCH(2,  $q$ ) эти условия можно ослабить. Например, в модели GARCH(1, 2) необходимыми и достаточными условиями являются:

$$\begin{aligned}\omega &\geq 0, \\ 1 > \beta_1 &\geq 0, \\ \beta_1\alpha_1 + \alpha_2 &\geq 0, \\ \alpha_1 &\geq 0.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Для модели GARCH(2, 1) условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega &\geq 0, \\ \alpha_1 &\geq 0, \\ \beta_1 &\geq 0, \\ \beta_1 + \beta_2 &< 1, \\ \beta_1^2 + 4\beta_2 &\geq 0.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Эти условия не такие строгие, как предложенные в [Bollerslev (1986)]:

$$\begin{aligned}\omega &\geq 0, \\ \beta_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \alpha_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, q.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Модель GARCH(2, 2) изучена в [He & Teräsvirta (1999)]. Эти результаты нельзя перенести на многомерный случай, в котором условие положительности  $\{\sigma_t^2\}$  означает положительную определенность условной ковариационной матрицы. Для идентификации GARCH-модели, в которой по крайней мере один из коэффициентов  $\beta_j > 0$ , необходимо также потребовать, чтобы как минимум один из коэффициентов  $\alpha_j > 0$ . Если  $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$ , условная и безусловная дисперсии  $\varepsilon_t$  равны, и  $\beta_1, \dots, \beta_p$  — неидентифицируемые мешающие параметры. С точки зрения оценивания модели GARCH( $p, q$ ) методом максимального правдоподобия необходимо рекурсивно подсчитать  $\{\sigma_t^2\}_{t=0}^{\infty}$ , начиная с момента 0 и применяя (5.4), предполагая произвольные значения  $\{\sigma_{-1}^2, \dots, \sigma_{-p}^2, \varepsilon_{-1}^2, \dots, \varepsilon_{-q}^2\}$  для периодов, предшествующих выборке. Условия (5.9) гарантируют, что ряд  $\{\sigma_t^2\}_{t=0}^{\infty}$  неотрицателен при

любых неотрицательных значениях  $\{\sigma_{-1}^2, \dots, \sigma_{-p}^2, \varepsilon_{-1}^2, \dots, \varepsilon_{-q}^2\}$ . С другой стороны, условия, гарантирующие, что  $\omega^* \geq 0$  и  $\phi_k \geq 0$  (см. (5.7) для модели GARCH(1, 2) и (5.8) для модели GARCH(2, 1)), этого обеспечить не могут. Проблему можно решить, выбрав начальные значения, которые гарантируют неотрицательность  $\{\sigma_t^2\}_{t=0}^\infty$  с вероятностью 1 при неотрицательных  $\omega^*$  и  $\{\phi_k\}_{k=0}^\infty$ . [Nelson & Cao (1992)] предлагают случайно выбрать  $\varepsilon^2 \geq 0$  и положить  $\varepsilon_t^2 = \varepsilon^2$  для  $t$  от  $-1$  до  $-\infty$  и  $\sigma_t^2 = \sigma^2$  для  $1 - p \leq t \leq 0$ , где

$$\sigma^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{-1} \left[\omega + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^q \alpha_j\right] = \omega^* + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^\infty \phi_k.$$

Таким образом, получаем последовательность  $\{\sigma_t^2\} \geq 0$  для всех  $t \geq 0$  с вероятностью 1, поскольку

$$\sigma_t^2 = \omega^* + \sum_{k=0}^{t-1} \phi_k \varepsilon_{t-k-1}^2 + \sum_{k=t}^\infty \phi_k \varepsilon^2.$$

Предполагая, что  $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$ , можно положить  $\sigma^2$  и  $\varepsilon^2$  равными их общему безусловному среднему:

$$\sigma^2 \equiv \varepsilon^2 \equiv \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i - \sum_{j=1}^q \alpha_j\right)^{-1} \omega.$$

В стационарной GARCH-модели в [Engle & Mezrich (1996)] предложено *таргетирование дисперсии*, а именно замена константы  $\omega$  в (5.4) на  $(1 - \sum_j \alpha_j - \sum_i \beta_i) \sigma^2$ . Оценка  $\sigma^2$ , т.е.  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ , подставляется вместо  $\sigma^2$  перед оцениванием других параметров. Модель содержит на один параметр меньше, чем стандартная модель GARCH( $p, q$ ).

### Уравнения Юла–Уолкера для процесса квадратов

Процесс  $\{\varepsilon_t^2\}$  можно представить в виде ARMA( $m, p$ ):

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon_{t-j}^2 + \left(v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i}\right),$$

где  $m = \max(p, q)$ ,  $\mathbf{E}_{t-1}[v_t] = 0$ ,  $v_t \in [-\sigma_t^2, \infty)$ . Таким образом, применены классические результаты для ARMA-моделей. В частности, разработана электронная библиотека

смотрим автоковариационную функцию, см. [Bollerslev (1988)], т. е.

$$\begin{aligned} \gamma^2(k) &= \text{cov} [\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2], \\ \gamma^2(k) &= \text{cov} \left[ \omega + \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon_{t-j}^2 + \left( v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} \right), \varepsilon_{t-k}^2 \right], \\ \gamma^2(k) &= \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \text{cov} [\varepsilon_{t-j}^2, \varepsilon_{t-k}^2] + \\ &+ \text{cov} \left[ v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i}, \varepsilon_{t-k}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Когда  $k$  достаточно велико, последний член в правой части выражения (5.10) равен нулю. Последовательность автоковариаций удовлетворяет линейному разностному уравнению порядка  $\max(p, q)$  для  $k \geq p + 1$ :

$$\gamma^2(k) = \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \gamma^2(k - j).$$

Эту систему можно использовать для идентификации лаговых порядков  $m$  и  $p$ , т. е.  $p$  и  $q$ , если  $q \geq p$ , и  $p$  при  $q < p$ . Автокорреляционная функция  $\varepsilon_t^2$ , если таковая существует, убывает медленно, хотя и экспоненциально. В ARCH-модели скорость убывания слишком высокая по сравнению с той, которая обычно наблюдается в финансовых временных рядах, если только максимальный лаг  $q$  невелик.

### Стационарность

Процесс  $\{\varepsilon_t\}$ , следующий модели GARCH( $p, q$ ), является последовательностью мартингальных приращений. Для доказательства ковариационной стационарности достаточно показать, что дисперсия

$$\mathbf{D}[\varepsilon_t] = \mathbf{D}[\mathbf{E}_{t-1}[\varepsilon_t]] + \mathbf{E}[\mathbf{D}_{t-1}[\varepsilon_t]] = \mathbf{E}[\sigma_t^2]$$

асимптотически постоянна во времени.

**Утверждение.** Процесс  $\{\varepsilon_t\}$ , следующий модели GARCH( $p, q$ ) с положительными коэффициентами  $\omega \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , является ковариационно стационарным тогда и только тогда, когда

$$\alpha(1) + \beta(1) < 1.$$

Это условие является достаточным, но не необходимым для строгой стационарности. Каждый слабо стационарный GARCH-процесс является также строго стационарным. Поскольку ARCH-процессы имеют



тяжелые хвосты, условия ковариационной стационарности часто более жесткие, чем условия строгой стационарности. Если  $\alpha(1) + \beta(1) < 1$ , слабо стационарное решение единственно и совпадает с единственным стационарным решением.

Для поиска строго стационарного решения рассмотрим  $\varepsilon_t^2 = z_t^2 \sigma_t^2$ . Модель GARCH(1, 1) можно записать в виде

$$\sigma_t^2 = \omega + \sigma_{t-1}^2 (\alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_1). \quad (5.11)$$

Рекурсивная подстановка приводит к записи GARCH(1, 1)-модели в виде

$$\sigma_t^2 = \omega \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k (\beta_1 + \alpha_1 z_{t-i}^2) \right).$$

Обозначая

$$\begin{aligned} A_t &= \beta_1 + \alpha_1 z_t^2, \\ B_t &= \omega, \\ Y_t &= \sigma_{t+1}^2, \end{aligned}$$

получаем, что  $Y_t = \sigma_{t+1}^2$  является решением стохастического рекуррентного уравнения  $Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t$ , где  $\{A_t, B_t\}$  — IID. Каждое строго стационарное решение  $\{\sigma_t^2\}$  уравнения (5.11) можно выразить в виде функции процесса  $\{z_t\}$ , так что из стационарности  $\{\sigma_t^2\}$  следует стационарность  $\{\sigma_t^2, z_t\}$ , а значит, и  $\{\varepsilon_t, \sigma_t\}$ . Таким образом, существование строго стационарных решений для GARCH(1, 1)-процесса сводится к изучению строго стационарных решений уравнения (5.11), см. [Lindner (2009b)]. Решение  $\{Y_t\}$  стохастического рекуррентного уравнения (с iid коэффициентами) — это последовательность случайных величин. Каждое решение удовлетворяет

$$\begin{aligned} Y_t &= A_t Y_{t-1} + B_t = \\ &= A_t A_{t-1} Y_{t-2} + A_t B_{t-1} + B_t = \\ &= \dots \\ &= \left( \prod_{j=0}^k A_{t-j} \right) Y_{t-k-1} + \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \end{aligned}$$

для всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , где  $\prod_{j=0}^{-1} A_{t-j} = 1$  для произведения по пустому множеству индексов. Для существования стационарного решения необходимо, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=0}^k A_{t-j} \right) Y_{t-k-1} = 0 \quad \text{почти наверное (п.н.)}$$

и сумма  $\sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}$  сходилась почти наверное (п.н.) при  $k \rightarrow \infty$ . В случаях GARCH(1, 1) и ARCH(1)

$$\sigma_{t+1}^2 = Y_t = \left( \prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2 + \omega \sum_{i=0}^k \left( \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right).$$

Поскольку это сумма неотрицательных компонент, ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}$  сходится почти наверное для каждого  $t$ , и, следовательно,  $\prod_{i=0}^k A_{t-i}$  сходится почти наверное к 0 при  $k \rightarrow \infty$ . Если процесс  $\{\sigma_{t+1}^2\}$  строго стационарный, то  $\left( \prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2$  сходится к 0 по распределению и по вероятности при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, существует не более одного строго стационарного решения  $\sigma_t^2 = Y_{t-1}$ :

$$Y_t = \omega \sum_{i=0}^{\infty} \left( \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right).$$

Таким образом, из существования строго стационарного процесса GARCH(1, 1) или ARCH(1) следует сходимость к 0 почти наверное произведения  $\prod_{i=0}^k A_{t-i}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Но верно также и обратное утверждение, а значит, строго стационарное решение GARCH(1, 1)/ARCH(1)-процесса существует тогда и только тогда, когда  $\prod_{i=0}^k A_{t-i}$  сходится п.н. к 0 при  $k \rightarrow \infty$ .

В [Nelson (1990b)] показано, что при  $\omega > 0$   $\sigma_t^2 < \infty$  (почти наверное), и  $\{\varepsilon_t, \sigma_t^2\}$  строго стационарны тогда и только тогда, когда  $\mathbf{E} [\ln (\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)] \leq 0$ . Учитывая, что

$$\mathbf{E} [\ln (\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)] \leq \ln (\mathbf{E} [\beta_1 + \alpha_1 z_t^2]) = \ln (\alpha_1 + \beta_1),$$

при  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  модель строго стационарна. Поэтому  $\mathbf{E} [\ln (\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)] \leq \leq 0$  является более мягким требованием, чем  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Для модели ARCH(1) при  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$  и  $z_t \sim iid(0, 1)$

$$\mathbf{E} [\ln (z_t^2)] \leq \ln (\mathbf{E} [z_t^2]) = \ln (1).$$

Таким образом, интегрированная ARCH(1)-модель является строго стационарной, но не ковариационно стационарной.

Для анализа условий существования строго стационарных решений модели GARCH(p, q) необходимо расширить стохастическое рекуррентное уравнение на многомерный случай, см. [Bougerol & Picard (1992a)].

Скопировано с сайта <http://www.ekonika.ru> / Разработка электронных библиотек <http://www.ekonika.ru>

Строгая стационарность многомерных стохастических рекуррентных уравнений

уравнений исследуется в терминах максимальной экспоненты Ляпунова. [Bougerol & Picard (1992b)] показали, что неприводимые рекуррентные уравнения с *iid* коэффициентами  $\{A_t, B_t\}$ , такими, что  $\mathbf{E}[\ln^+ \|A_0\|] < \infty$  и  $\mathbf{E}[\ln^+ \|B_0\|] < \infty$ , допускают неупреждающее строго стационарное решение тогда и только тогда, когда максимальная экспонента Ляпунова, связанная с  $\{A_t\}$ , строго отрицательна. Они также показали, что GARCH( $p, q$ )-процесс допускает строго стационарное решение тогда и только тогда, когда максимальная экспонента Ляпунова для последовательности  $\{A_t\}$  строго отрицательна. Это решение единственно.

### Прогнозирование волатильности

Модель GARCH( $p, q$ ) можно представить в виде ARMA-процесса, учитывая, что  $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + v_t$ , где  $\mathbf{E}_{t-1}[v_t] = 0$ ,  $v_t \in [-\sigma_t^2, \infty)$ :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon_{t-j}^2 + \left( v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} \right).$$

Таким образом,  $\varepsilon_t^2 \sim \text{ARMA}(m, p)$ , где  $m = \max(p, q)$ . Прогнозирование для GARCH( $p, q$ )-модели рассмотрено в [Engle & Bollerslev (1986)]. Запишем

$$\sigma_{t+k}^2 = \omega + \sum_{i=1}^n (\alpha_i \varepsilon_{t+k-i}^2 + \beta_i \sigma_{t+k-i}^2) + \sum_{i=k}^m (\alpha_i \varepsilon_{t+k-i}^2 + \beta_i \sigma_{t+k-i}^2),$$

где  $n = \min\{m, k-1\}$  и по определению суммы от 1 до 0 и от  $k > m$  до  $m$  обе равны нулю.

Тогда

$$\mathbf{E}_t[\sigma_{t+k}^2] = \omega + \sum_{i=1}^n ((\alpha_i + \beta_i) \mathbf{E}_t[\sigma_{t+k-i}^2]) + \sum_{i=k}^m (\alpha_i \varepsilon_{t+k-i}^2 + \beta_i \sigma_{t+k-i}^2).$$

В частности, для GARCH(1, 1)-модели при  $k > 2$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t[\sigma_{t+k}^2] &= \sum_{i=0}^{k-2} (\alpha_1 + \beta_1)^i \omega + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \sigma_{t+1}^2 = \\ &= \omega \frac{(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1})}{(1 - (\alpha_1 + \beta_1))} + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \sigma_{t+1}^2 = \\ &= \sigma^2 \left(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\right) + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \sigma_{t+1}^2 = \end{aligned}$$

Когда процесс является ковариационно стационарным,  $\mathbf{E}_t [\sigma_{t+k}^2]$  сходится к  $\sigma^2$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Модель IGARCH( $p, q$ )**

**Определение 5.2.** GARCH( $p, q$ )-процесс, имеющий первые два условных момента вида

$$\mathbf{E}_{t-1} [\varepsilon_t] = 0,$$

$$\sigma_t^2 \equiv \mathbf{E}_{t-1} [\varepsilon_t^2] = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

где  $\omega \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  и  $\beta_i \geq 0$  для всех  $i$ , и для которого уравнение

$$1 - \alpha(x) - \beta(x) = 0$$

имеет  $d > 0$  единичных корней, а  $\max\{p, q\} - d$  корней лежат вне единичного круга, называют:

- i) интегрированным относительно дисперсии порядка  $d$ , если  $\omega = 0$ ;
- ii) интегрированным относительно дисперсии порядка  $d$  с трендом, если  $\omega > 0$ .

**Интегрированные GARCH( $p, q$ )-модели (IGARCH)** как с трендом, так и без него являются, таким образом, частью более широкого класса моделей со свойством «устойчивой дисперсии», когда текущая информация остается важной для прогнозирования условных дисперсий при любом горизонте планирования.

Интегрированная GARCH( $p, q$ )-модель имеет место, если выполняется необходимое условие

$$\alpha(1) + \beta(1) = 1.$$

Для примера рассмотрим модель IGARCH(1, 1), в которой  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ . Процесс можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) \sigma_{t-1}^2, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2), \quad 0 < \alpha_1 \leq 1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для этой конкретной модели прогноз условной дисперсии на  $k$  шагов вперед имеет вид

$$\mathbf{E}_t [\sigma_{t+k}^2] = (k - 1) \omega + \sigma_{t+1}^2$$

[Nelson (1991)] показал, что при инициализации процесса IGARCH в некоторый конечный момент времени его поведение зависит от параметра  $\omega$ . Если  $\omega > 0$ , то безусловная дисперсия  $\varepsilon_t$  линейно растет со временем. Если  $\omega = 0$ , реализации процесса почти наверное сходятся к нулю. Параметр  $\beta_1$  влияет на скорость этой сходимости. Важно отметить, что безусловная дисперсия  $\varepsilon_t$  не существует, когда условная дисперсия следует модели IGARCH. В случае GARCH(1, 1)-модели возможное объяснение того факта, что оценка  $\alpha_1 + \beta_1$  близка к единице, состоит в том, что во время периода оценивания GARCH-модели происходит смена константы [Diebold (1986)], [Lamoureaux & Lastrapes (1990)]. Это означает, что порождающий данные GARCH-процесс нестационарный.

Модель IGARCH(1, 1) в (5.12) также можно записать в форме ARIMA(0, 1, 1):

$$(1 - L)\varepsilon_t^2 = \omega + v_t - \beta_1 v_{t-1},$$

где  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  является мартингальным приращением относительно  $\sigma_t^2$ .

Являются ли шоки у  $\{\sigma_t^2\}$  устойчивыми или нет, напрямую зависит от используемого определения. Условный момент может расходиться для одного значения  $\eta$ , но сходить к конкретному пределу, не зависящему от начальных условий, для другого значения  $\eta$ , даже если  $\{\sigma_t^2\}$  стационарна и эргодична.

Для GARCH(1, 1)-модели

$$\mathbf{E}_s [\sigma_t^2] = \omega \sum_{k=0}^{t-s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^k + \sigma_{t-s}^2 (\alpha_1 + \beta_1)^{t-s}.$$

$\mathbf{E}_s [\sigma_t^2]$  сходится к безусловной дисперсии  $\omega / (1 - \alpha_1 - \beta_1)$  при  $t \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . В модели IGARCH(1, 1) с  $\omega > 0$  и  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  величина  $\mathbf{E}_s [\sigma_t^2] \rightarrow \infty$  п.н. при  $t \rightarrow \infty$ . Тем не менее IGARCH-модели строго стационарны и эргодичны. [Nelson (1990)] показал, что в IGARCH(1, 1)-модели  $\mathbf{E}_s [\sigma_t^{2\eta}]$  сходится к конечному пределу, не зависящему от информации на момент времени  $s$  при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\eta < 1$ . Если носитель  $z_t$  неограничен, из этого следует, что в каждой стационарной и эргодичной GARCH(1, 1)-модели  $\mathbf{E}_s [\sigma_t^{2\eta}]$  расходится для всех достаточно больших значений  $\eta$  и сходится для всех достаточно малых значений  $\eta$ .

### 5.1.5. Асимметричные модели

Для повышения гибкости исходная GARCH-модель была обобщена и расширена в разных направлениях. Первоначальная спецификация

GARCH-модели предполагает, что реакция на шок не зависит от знака шока, а является функцией только от его размера. Тем не менее один из стилизованных фактов о финансовой волатильности состоит в том, что плохие новости (отрицательные шоки) обычно оказывают большее влияние на волатильность, чем хорошие новости (положительные шоки). То есть волатильность стремится быть выше на падающем рынке, чем на растущем. [Black (1976)] объясняет этот эффект тем, что плохие новости обычно снижают цену акций, увеличивая коэффициент рычага (т.е. отношение заемного и собственного капитала) и приводя к большей волатильности капитала. На основании этого предположения асимметричное воздействие новостей на волатильность обычно называют эффектом рычага. Альтернативные параметризации пытаются учесть асимметрию поведения волатильности. В этой главе представлены наиболее популярные в литературе асимметричные модели.

### Модель EGARCH( $p, q$ )

Простая структура (5.4) накладывает важные ограничения на GARCH-модели (Nelson, 1991).

- Существует отрицательная корреляция между доходностью капитала и изменениями волатильности доходов, т.е. волатильность обычно растет в ответ на «плохие новости» (избыточная доходность меньше ожидаемой) и падает в ответ на «хорошие новости» (избыточная доходность выше ожидаемой). GARCH-модели, тем не менее, предполагают, что только величина, но не положительность или отрицательность неожиданной избыточной доходности определяет  $\sigma_t^2$ . Если распределение  $z_t$  симметрично, изменение дисперсии завтра условно не коррелирует с избыточной доходностью сегодня [Nelson (1991)]. Если записать  $\sigma_t^2$  как функцию лагов  $\sigma_t^2$  и  $z_t^2$ , где  $\varepsilon_t^2 = z_t^2 \sigma_t^2$ , т.е.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j z_{t-j}^2 \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

становится очевидным, что условная дисперсия не зависит от изменений знака  $z_t$ . Более того, инновации  $z_{t-j}^2 \sigma_{t-j}^2$  не являются *iid*.

- Другое ограничение GARCH-моделей возникает из-за условий неотрицательности на  $\omega^*$  и  $\phi_k$  в (5.6), которые накладываются для обеспечения неотрицательности  $\sigma_t^2$  для всех  $t$  с вероятностью 1. Из этих ограничений следует, что рост  $z_t^2$  в любом периоде увеличивает  $\sigma_{t+m}^2$  для всех  $m \geq 1$ , исключая случайное осциллирование

- GARCH-модели неспособны объяснить наблюдаемую ковариацию между  $\varepsilon_t^2$  и  $\varepsilon_{t-j}$ . Это возможно, только если условная дисперсия является асимметричной функцией от  $\varepsilon_{t-j}$ .
- В модели GARCH(1, 1) шоки могут быть устойчивыми в одной норме и затухающими в другой, так что условные моменты GARCH(1, 1)-модели могут взрываться, даже когда процесс строго стационарный и эргодичный.
- GARCH-модели, по сути, специфицируют поведение квадратов данных. Поэтому несколько больших наблюдений могут доминировать в выборке.

Асимметричные модели дают объяснение так называемому *эффекту рычага*, когда неожиданное падение цены увеличивает волатильность больше, чем аналогичное неожиданное повышение цены. В экспоненциальной GARCH( $p, q$ )-модели (EGARCH( $p, q$ )), предложенной в [Nelson (1991)],  $\sigma_t^2$  впервые зависит как от размера, так и от знака лагированных шоков. Модель определяется следующим образом:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\phi z_{t-i} + \psi (|z_{t-i}| - \mathbf{E}[|z_{t-i}|])) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2), \quad (5.13)$$

где  $\alpha_1 \equiv 1$ ,  $\mathbf{E}[|z_t|] = (2/\pi)^{1/2}$ , если  $z_t \sim iidn(0, 1)$ , и где на параметры  $\omega$ ,  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$  не накладывается ограничение неотрицательности. Положим

$$g(z_t) \equiv \phi z_t + \psi (|z_t| - \mathbf{E}[|z_t|]).$$

По построению,  $\{g(z_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  — iid случайная последовательность с нулевым средним. Компонентами  $g(z_t)$  являются  $\phi z_t$  и  $\psi (|z_t| - \mathbf{E}[|z_t|])$ , и каждая имеет нулевое среднее. Если распределение  $z_t$  симметрично, компоненты ортогональны, хотя не являются независимыми. На множестве  $0 < z_t < \infty$  функция  $g(z_t)$  линейна по  $z_t$  с углом наклона  $\phi + \psi$ , а на множестве  $-\infty < z_t \leq 0$   $g(z_t)$  линейна с углом наклона  $\phi - \psi$ . Таким образом,  $g(z_t)$  позволяет процессу для условной дисперсии  $\{\sigma_t^2\}$  асимметрично реагировать на увеличение и падение цены акций. Член  $\psi (|z_t| - \mathbf{E}[|z_t|])$  представляет собой эффект величины. Если  $\psi > 0$  и  $\phi = 0$ , инновация в  $\ln(\sigma_{t+1}^2)$  положительна (отрицательна), когда величина  $z_t$  больше (меньше), чем ее математическое ожидание. Если  $\psi = 0$  и  $\phi < 0$ , инновация в  $\ln(\sigma_{t+1}^2)$  положительна (отрицательна), когда инновации доходностей отрицательны (положительны). Отрицательный шок доходностей, увеличивающий отношение заемного и собственного капитала и, следовательно, неопределенность будущих доходов, можно

Как и в случае стандартной GARCH-модели, модель первого порядка на практике является самой популярной в семействе EGARCH.

Многие авторы, например [Nelson (1991)], обнаружили, что распределение стандартизированных остатков оцененных GARCH-моделей имеет положительный коэффициент эксцесса, см. также [Engle & Gonzalez-Rivera (1991)]. В [Nelson (1991)] предполагается, что  $z_t$  имеет так называемое GED-распределение (также называемое семейством *экспоненциально-степенных распределений*). Плотность нормированной (с нулевым средним и единичной дисперсией) GED-распределенной случайной величины имеет вид

$$f(z; \nu) = \frac{\nu \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)|z/\lambda|^\nu\right]}{\lambda 2^{(1+1/\nu)} \Gamma(1/\nu)}, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 < \nu \leq \infty,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция, а

$$\lambda \equiv \left(2^{(-2/\nu)} \Gamma(1/\nu) / \Gamma(3/\nu)\right)^{1/2}.$$

Параметр  $\nu$  отвечает за толщину хвостов распределения. Если  $\nu = 2$ ,  $z$  имеет стандартное нормальное распределение. При  $\nu < 2$  распределение  $z$  имеет более толстые хвосты, чем нормальное (например, при  $\nu = 1$   $z$  имеет двойное экспоненциальное распределение), а при  $\nu > 2$  распределение  $z$  имеет более тонкие хвосты, чем нормальное (например, при  $\nu = \infty$   $z$  равномерно распределена на отрезке  $[-3^{1/2}, 3^{1/2}]$ ). Для такой функции плотности  $\mathbf{E}[|z_t|] = \lambda 2^{1/\nu} \Gamma(2/\nu) / \Gamma(1/\nu)$  [Hamilton (1994)].

Для анализа стационарности перепишем модель EGARCH( $p, q$ ) в виде

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i\right) \ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i (\phi z_t + \psi (|z_t| - \mathbf{E}[|z_t|])),$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{-1} \omega + \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i L^i\right) g(z_t),$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega^* + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i g(z_{t-i}).$$

В EGARCH( $p, q$ )-модели  $\ln(\sigma_t^2)$  — линейный процесс, поэтому его стационарность (ковариационную или строгую) и эргодичность легко уста-



которых сложно оценить устойчивость шоков дисперсии. Если  $\phi \neq 0$  или  $\psi \neq 0$ , процессы  $\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$  и  $\{\exp(-\omega^*/2)\varepsilon_t\}$  строго стационарны и эргодичны, а процесс  $\{\ln(\sigma_t^2) - \omega^*\}$  ковариационно стационарен тогда и только тогда, когда  $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2 < 0$  см. [Nelson (1991)]. Поскольку

процесс  $\ln(\sigma_t^2)$  записан в форме ARMA( $p, q$ ), если полиномы  $1 - \sum_{i=1}^p \beta_i x^i$

и  $\sum_{i=1}^q \alpha_i x^i$  не имеют общих корней, то условия строгой стационарности

$\ln(\sigma_t^2)$  эквивалентны требованию, чтобы все корни  $1 - \sum_{i=1}^p \beta_i x^i$  лежали вне единичного круга.

Из строгой стационарности  $\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$  и  $\{\exp(-\omega^*/2)\varepsilon_t\}$  необязательно следует ковариационная стационарность  $\sigma_t^2$ , так как  $\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$  и  $\{\exp(-\omega^*/2)\varepsilon_t\}$  могут не иметь конечные безусловные среднее и дисперсию. Для некоторых распределений  $\{z_t\}$  (например, для  $t$ -распределения Стьюдента с конечным числом степеней свободы), конечные безусловные моменты  $\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$  и  $\{\exp(-\omega^*/2)\varepsilon_t\}$  не существуют. Если  $z_t$  имеет GED-распределение с более тонкими хвостами, чем у двойного экспоненциального распределения, и если  $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2 < \infty$ , то  $\{\sigma_t^2\}$  и  $\{\varepsilon_t\}$  не только строго стационарны и эргодичны, но и имеют произвольные конечные моменты, из чего следует их ковариационная стационарность.

В [He et al. (2002)] замечено, что убывание автокорреляций квадратов наблюдений в модели EGARCH первого порядка быстрее экспоненциального в начале, а затем замедляется, достигая экспоненциального падения. Более того, [Malmsten & Teräsvirta (2004)] показали, что симметричная EGARCH(1, 1)-модель с нормальными остатками недостаточно гибка для характеристики рядов как с большим эксцессом, так и с медленно убывающими автокорреляциями. В этом случае выбор распределения стандартизированных остатков особенно важен. Предположение о нормальных остатках означает, что автокорреляция квадратов наблюдений первого порядка растет достаточно быстро как функция от эксцесса для любого фиксированного значения  $\beta_1$ , прежде чем увеличение замедляется. [Nelson (1991)] предложил использовать для остатков GED-распределение, в то время как выбор  $t$ -распределения может означать бесконечную безусловную дисперсию  $\{\varepsilon_t\}$ . Как и в случае модели GARCH(1, 1), выбор распределения остатков с более толстыми, чем у нормального распределения, хвостами увеличивает эксцесс и в то же время уменьшает автокорреляцию квадратов или абсолютных значений наблюдений.

## Другие асимметричные модели

Нелинейная GARCH( $p, q$ )-модель [Engle & Bollerslev (1986)]:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |\varepsilon_{t-i} - k|^\delta + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

где  $k \neq 0$  и инновации в  $\sigma_t^2$  зависят как от размера, так и от знака лагированных остатков, улавливая таким образом эффект рычага в волатильности доходности капитала.

**Модель GJR-GARCH**, предложенная в [Glosten et al. (1993)]:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2),$$

где

$$S_t^- = \begin{cases} 1, & \varepsilon_t < 0, \\ 0, & \varepsilon_t \geq 0, \end{cases}$$

относится к так называемым *пороговым*.

**Асимметричная GARCH( $p, q$ )-модель (AGARCH)**, предложенная в [Engle (1990)]:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} + \gamma)^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2.$$

Отрицательные значения  $\gamma$  означают, что положительные шоки ведут к меньшим увеличениям будущей волатильности, чем отрицательные шоки той же абсолютной величины.

**Нелинейная AGARCH(1, 1)-модель (NAGARCH)** из [Engle & Ng (1993)] имеет вид:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \left( \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \gamma \right)^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Так называемая квадратичная QGARCH( $p, q$ )-модель из [Sentana (1995)] определяется соотношением:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \Psi' \mathbf{x}_{t-q} + \mathbf{x}'_{t-q} \mathbf{A} \mathbf{x}_{t-q} + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

где  $\mathbf{x}_{t-q} = (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})'$ . Линейный член  $(\Psi' \mathbf{x}_{t-q})$  допускает асимметрию. Внедиагональные элементы симметричной матрицы параметров  $\mathbf{A}$  учитывают эффекты взаимодействия лагированных значений  $x_t$  на условную дисперсию. Условная дисперсия  $\sigma_t^2$  положительна, тогда

и только тогда, когда  $\mathbf{A}$  в квадратичной форме положительно определена. Модель QGARCH включает как частные случаи несколько асимметричных моделей. Обобщенная расширенная ARCH-модель (AARCH), являющаяся обобщением AARCH-модели из [Bera et al. (1992)], предполагает, что  $\Psi = \mathbf{0}$ . Модель ARCH( $q$ ) соответствует случаю, в котором  $\Psi = \mathbf{0}$ ,  $\beta_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ , и  $\mathbf{A}$  диагональна. Асимметричная GARCH-модель предполагает диагональную  $\mathbf{A}$ . Модель линейного стандартного отклонения соответствует значениям  $\beta_i = 0$ ,  $\sigma^2 = \rho^2$ ,  $\Psi = 2\rho\phi$  и  $\mathbf{A} = \phi\phi'$ :

$$\sigma_t^2 = (\rho + \phi' \mathbf{x}_{t-q})^2.$$

### Кривая воздействия новостей

Новости оказывают асимметричное воздействие на волатильность. В модели с асимметричной волатильностью хорошие и плохие новости имеют разную предсказательную силу для будущей волатильности. *Кривая воздействия новостей (КВН)*, предложенная в [Pagan & Schwert (1990)] и получившая свое название в [Engle & Ng (1993)], характеризует воздействие прошлых шоков доходности на волатильность доходности, неявное в модели волатильности. Фиксируя информацию на момент  $t-2$  и раньше, можно исследовать подразумеваемую взаимосвязь между  $\varepsilon_{t-1}$  и  $\sigma_t^2$ . Все лагированные условные дисперсии оцениваются на уровне безусловной дисперсии доходности акций. КВН связывает прошлые шоки доходности (новости) с текущей волатильностью. Эта кривая указывает на то, как новая информация включается в оценки волатильности.

В GARCH-модели КВН центрирована в  $\varepsilon_{t-1} = 0$ . В случае EGARCH-модели кривая достигает наименьшего значения в  $\varepsilon_{t-1} = 0$  и экспоненциально возрастает в обоих направлениях, но с разными параметрами.

GARCH(1, 1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

Если  $\sigma_{t-1}^2 = \sigma^2$ , КВН имеет следующий вид:

$$\sigma_t^2 = A + \alpha\varepsilon_{t-1}^2, \quad A \equiv \omega + \beta\sigma^2.$$

EGARCH(1, 1):

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \phi z_{t-1} + \psi(|z_{t-1}| - \mathbf{E}[|z_{t-1}|]),$$

где  $z_t = \varepsilon_t/\sigma_t$ . Кривая воздействия новостей имеет вид

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\phi + \psi}{\sigma} \varepsilon_{t-1}\right), & \text{при } \varepsilon_{t-1} > 0, \\ A \exp\left(\frac{\phi - \psi}{\sigma} \varepsilon_{t-1}\right), & \text{при } \varepsilon_{t-1} < 0, \end{cases}$$

где  $A \equiv \sigma^{2\beta} \exp\left(\omega - \psi\sqrt{2/\pi}\right)$ ,  $\phi < 0$ ,  $\psi + \phi > 0$ .

- Модель EGARCH позволяет хорошим и плохим новостям иметь различный эффект на волатильность, в отличие от стандартной GARCH-модели.
- Модель EGARCH позволяет важным новостям иметь большее воздействие на волатильность по сравнению с обычной GARCH-моделью. В EGARCH-модели дисперсия в обоих направлениях выше, поскольку экспонента в конечном счете доминирует квадратичную функцию.

Для асимметричной GARCH(1, 1)-модели [Engle (1990)]

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

КВН, имеющая вид

$$\sigma_t^2 = A + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2,$$

где  $A \equiv \omega + \beta\sigma^2$ ,  $\omega > 0$ ,  $0 \leq \beta < 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , асимметрична и центрирована в  $\varepsilon_{t-1} = -\gamma$ .

Для GJR-GARCH-модели

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2$$

КВН имеет вид

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} A + \alpha\varepsilon_{t-1}^2, & \varepsilon_{t-1} \geq 0, \\ A + (\alpha + \gamma)\varepsilon_{t-1}^2, & \varepsilon_{t-1} < 0, \end{cases}$$

где  $A \equiv \omega + \beta\sigma^2$ ,  $\omega > 0$ ,  $0 \leq \beta < 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $\alpha + \beta < 1$ , и центрирована в  $\varepsilon_{t-1} = -\gamma$ .

Эти различия между кривыми воздействия новостей имеют большие последствия для выбора портфеля и ценообразования активов. Поскольку предсказуемая волатильность рынка связана с рыночной премией, две модели ведут к очень разным рыночным рисковым премиям, а следовательно, разным рисковым премиям для индивидуальных акций в условной версии модели CAPM<sup>5</sup>. Различия в предсказуемой волатильности после выхода некоторой важной новости ведут к существенным различиям текущей цены опционов и разным динамическим стратегиям хеджирования.

<sup>5</sup>CAPM — Capital Asset Pricing Model (модель ценообразования на основной капитал). Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru> и размещено на портале [www.berndt.com](http://www.berndt.com). Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

### 5.1.6. Нелинейные и пороговые GARCH-модели

#### GARCH с плавным переходом

Реакция условной дисперсии на шоки может быть **нелинейной**, как, например, в модели GJR-GARCH. Нелинейная версия модели GJR-GARCH получается, если сделать переход между режимами плавным. Модель GARCH с плавным переходом **STGARCH** [Gonzalez-Rivera (1998)], и [Anderson et al. (1999)] позволяет эффекту квадратов прошлых инноваций зависеть как от знака, так и от величины  $\varepsilon_{t-i}$  через функцию плавного перехода:

$$\sigma_t^2 = \omega_1 + \sum_{i=1}^q \alpha_{1i} \varepsilon_{t-i}^2 + \left( \omega_2 + \sum_{i=1}^q \alpha_{2i} \varepsilon_{t-i}^2 \right) G(\gamma, c; \varepsilon_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i},$$

где функция перехода имеет вид

$$G(\gamma, c; \varepsilon_{t-i}) = \left( 1 + \exp \left\{ -\gamma \prod_{k=1}^K (\varepsilon_{t-i} - c_k) \right\} \right)^{-1}$$

(подробнее см., например, в [Росси (2010)]).

#### Пороговая GARCH (TGARCH)

В пороговой GARCH-модели, предложенной в [Zakoïan (1994)], условное стандартное отклонение определяется соотношением:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \alpha_i^- \varepsilon_{t-i}^-) + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i},$$

где  $\varepsilon_{t-i}^+ = \max(\varepsilon_{t-i}, 0)$ ,  $\varepsilon_{t-i}^- = \min(\varepsilon_{t-i}, 0)$ , и  $\alpha_i^+$ ,  $\alpha_i^-$ ,  $i = 1, \dots, q$ , — параметры. TGARCH-модель линейна по параметрам, поскольку пороговый параметр полагается равным нулю. ARCH-модель с двойным порогом (**DTARCH**), предложенная в [Li & Li (1996)], позволяет параметрам условного среднего и дисперсии меняться в зависимости от режима. Условное среднее определяется следующим образом:

$$y_t = \sum_{k=1}^K \left( \phi_{0k} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_{ik} y_{t-i} \right) \mathbf{I}_{\{c_{k-1}^{(m)} < y_{t-b} \leq c_k^{(m)}\}} + \varepsilon_t, \quad (5.14)$$

а условная дисперсия имеет вид

$$\sigma_t^2 = \sum_{l=1}^L \left( \alpha_{0l} + \sum_{i=1}^{p_l} \alpha_{il} \varepsilon_{t-i}^2 \right) \mathbf{I}_{\{c_{l-1}^{(m)} < y_{t-b} \leq c_l^{(m)}\}} \quad (5.15)$$

где  $b$  и  $d$  — параметры запаздывания,  $b, d \geq 1$ . Число режимов в (5.14) и (5.15),  $K$  и  $L$ , соответственно, не должно совпадать, как и две пороговые переменные. Можно использовать другие пороговые переменные, помимо лагов  $y_t$ .

### GARCH с марковскими переключениями

Модель с марковскими переключениями (MS) имеет нелинейную спецификацию, в которой различные состояния среды воздействуют на динамику временного ряда. Динамические свойства зависят от текущего режима, а сами режимы являются реализациями скрытой марковской цепи с конечным пространством состояний. Модели с марковскими переключениями были введены в мейнстрим эконометрики в [Hamilton (1989, 1990)]. [Hamilton & Susmel (1994)] заметили, что последствия очень больших шоков, таких как биржевой крах в октябре 1987 г., для последующей волатильности могут настолько отличаться от последствий малых шоков, что стандартная ARCH или GARCH-модель неспособны это уловить надлежащим образом. Более того, они различают режимы с низкой, средней и высокой волатильностью в данных о недельных доходностях акций, причем режимы высокой волатильности связаны с рецессиями, в то время как [Maheu & McCurdy (2000)] выделяют «рынки медведей и быков» и обнаруживают, что волатильность намного выше на медвежьих рынках.

Модель ARCH с переключением режимов (SWARCH), независимо предложенная в [Cai (1994)] и [Hamilton & Susmel (1994)], расширяет стандартную линейную ARCH( $q$ )-модель, позволяя константе,  $\omega_{s(t)}$ , или величине квадратов инноваций, входящих в уравнение условной дисперсии, зависеть от некоторой латентной переменной  $s(t)$ , причем переход между разными состояниями происходит в соответствии с марковской цепью. Модель из [Hamilton & Susmel (1994)] выглядит следующим образом:

$$\sigma_t^2 = \omega(s_t) + \sum_{i=1}^q \alpha_i(s_t) \varepsilon_{t-i}^2, \quad (5.16)$$

где  $s_t$  — дискретная ненаблюдаемая эргодичная марковская цепь, заданная на множестве  $\mathbb{S} = \{1, \dots, S\}$  индикаторов режимов с переходными вероятностями

$$p_{ij} = P\{s_t = j | s_t = i\}, \quad i, j = 1, \dots, S,$$

где по определению  $\sum_{j \in \mathbb{S}} p_{ij} = 1, \forall i \in \mathbb{S}$ . В моделях с марковскими переключениями переменная переключения  $s_t$  экзогенна в том смысле, что она не подвержена обратному воздействию со стороны наблюдаемого процесса. При  $q = 1$   $\mathbf{D}[\varepsilon_t | s_t = i, \varepsilon_{t-1}] = \omega(i) + \alpha_1(i) \varepsilon_{t-1}^2$

модель позволяет  $\sigma_t^2$  меняться между режимами высокой и низкой волатильности, что измеряется значениями параметров ARCH. Cai (1994) рассматривает частный случай (5.16), в котором переключается только константа  $\omega(s_t)$  и  $S = 2$ . Обобщение моделей с марковскими переключениями на случай GARCH-моделей было предложено в [Gray (1996)] и [Dueker (1997)] и позже модифицировано в [Klaassen (2002)]. Модель GARCH(1, 1) с марковскими переключениями имеет вид

$$\sigma_t^2 = \omega(s_t) + \alpha_1(s_t)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1(s_t)\sigma_{t-1}^2.$$

Условия стационарности, существование моментов, автокорреляционные функции и эргодичность были изучены в [Francq et al. (2001)] и [Francq & Zakoïan (2005)].

Подробнее о моделях с марковскими переключениями и о так называемых *обобщающих моделях* см., например, в [Росси (2010)].

### 5.1.7. Модели GARCH в среднем (GARCH-M)

GARCH-модели часто используют для прогнозирования риска портфеля в определенный момент времени. [Engle et al. (1987)] рассматривают экономику, в которой не склонные к риску агенты выбирают из двух видов финансовых вложений, чтобы максимизировать свою ожидаемую полезность. Первая возможность представлена рисковым активом с нормально распределенной доходностью, для которого риск измеряется дисперсией доходности, а компенсация — ростом ожидаемой доходности. Второй тип инвестиций представлен безрисковым активом. Максимизация агентами своей функции полезности при условиях баланса на рынках приводит к стандартной связи между математическим ожиданием и дисперсией доходности рискового актива. Авторы исследуют эту взаимосвязь в случае, когда дисперсия доходности рискового актива меняется во времени, а следовательно, меняется и цена рискового актива. Приведенные предположения определяют взаимосвязь между средним и дисперсией доходности актива, которая по-прежнему положительна, но не постоянна. Из этого следует, что модель условной дисперсии наподобие GARCH может быть полезным представлением меняющейся во времени рисковой премии при объяснении избыточной доходности. Избыточная доходность в таком случае является комбинацией непредсказуемой разности  $\varepsilon_t$  между ожидаемой и реализованной нормами доходности и функции условной дисперсии портфеля [Teräsvirta (2009)]. Таким образом, если  $y_t$  — избыточная доходность на момент  $t$ ,

модель GARCH в среднем (GARCH-M), предложенная в [Engle et al. (1987)], представляет собой систему

$$\begin{aligned} y_t &= \gamma + g(\sigma_t^2) - \mathbf{E}[g(\sigma_t^2)] + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Эта модель одновременно характеризует динамику среднего и дисперсии временного ряда.

[Engle et al. (1987)] использовали функцию  $g(\sigma_t^2) = \delta \sqrt{\sigma_t^2}$ , но альтернативные варианты  $g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$  и  $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$  также предлагались в литературе. Процесс GARCH-M обладает интересной структурой моментов. Предположим, что  $\mathbf{E}[z_t^3] = 0$  и  $\mathbf{E}[\varepsilon_t^4] < \infty$ . Из уравнения (5.17) следует, что

$$\mathbf{E}[(y_t - \mathbf{E}[y_t])(y_{t-k} - \mathbf{E}[y_t])] = \mathbf{E}[\varepsilon_{t-k} g(\sigma_t^2)] + \text{cov}[g(\sigma_t^2), g(\sigma_{t-k}^2)].$$

Это означает, что в  $y_t$  присутствует прогнозируемая компонента. Более того,

$$\mathbf{E}[(y_t - \mathbf{E}[y_t])^3] = 3\mathbf{E}[\sigma_t^2 (g(\sigma_t^2) - \mathbf{E}[g(\sigma_t^2)])] + \mathbf{E}[(g(\sigma_t^2) - \mathbf{E}[g(\sigma_t^2)])^3] \neq 0.$$

Отсюда следует, что модель GARCH-M подразумевает скошенное частное распределение  $y_t$ , если только  $g(\sigma_t^2)$  не константа. При  $(g(\sigma_t^2) = \delta \sigma_t^2$  и  $\delta < 0$  это частное распределение отрицательно скошено.

### 5.1.8. GARCH-модели с долгой памятью

На практике часто случается, что оценка суммы параметров GARCH(1, 1)-модели,  $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ , близка к единице. Другими словами, оказывается, что модель IGARCH(1, 1) является разумным приближением процесса, порождающего данные. Однако применение IGARCH(1, 1) означает предположение о том, что безусловная дисперсия моделируемого процесса не существует. Более того, в модели IGARCH воздействие шока на оптимальный прогноз будущей условной дисперсии приводит к тому, что соответствующие накопленные веса импульсного отклика сходятся к ненулевой константе, так что прогнозы линейно возрастают по мере расширения горизонта прогнозирования. Это означает, что ценообразование рискованных ценных бумаг, включая долгосрочные опционы и фьючерсы, может крайне сильно зависеть от начальных условий или текущего состояния экономики. Но такая сильная зависимость не соответствует наблюдаемому поведению цен. [Taylor (1986)], [Dacorogna



памяти в рядах эмпирических автокорреляций для абсолютных значений и квадратов доходностей различных финансовых активов. Эти исследования четко свидетельствуют в пользу моделей с автокорреляциями, медленно убывающими по лагу как функция  $k^{-\gamma}$ , для некоторого  $0 < \gamma < 1$ .

Хотя эмпирический анализ свидетельствует о том, что долгая память — это свойство квадратов или абсолютных значений доходностей, нет согласия по поводу возможных причин этого стилизованного факта. [Granger & Ding (1996)] показали, что текущее агрегирование стабильных GARCH(1, 1)-процессов дает агрегированный процесс с гиперболически убывающими автокорреляциями. Хотя это свойство вроде бы согласуется с долгой памятью, [Zaffaroni (2007)] показал, что автокорреляционная функция этого процесса суммируема, что не позволяет классифицировать его как процесс с долгой памятью. [Andersen & Bollerslev (1997)] показывают, что текущее агрегирование потоковых процессов со слабо зависимой информацией может привести к долгой памяти в рядах волатильности. Еще одно обоснование приводят [Müller et al. (1997)], предполагая, что долгая память в рядах волатильности может возникать из-за реакции краткосрочных дилеров на динамику прокси-переменной для тренда ожидаемой волатильности (грубой волатильности), что ведет к устойчивости процессов волатильности для более высоких частот (очищенной волатильности).

Если приведенные выше статьи исследовали причины долгой памяти в рядах волатильности, то другие, в сущности, ставили под сомнение само наличие долгой памяти. В частности, один из аргументов состоит в том, что структурные сдвиги различных типов способны объяснить крайнюю устойчивость волатильности, а также могут порождать ряд, который выглядит как ряд с долгой памятью. [Mikosch & Starica (1998)] и [Granger & Nyung (2004)] приводят теорию и симуляции в подтверждение того, что ложные свидетельства долгой памяти можно обнаружить во временном ряде со сдвигами. Более того, хотя [Granger & Nyung (2004)] показали для ряда абсолютных значений доходности индекса S&P500, что модель с нерегулярными сдвигами обладает худшей предсказательной силой, чем модель с долгой памятью; для того же ряда [Starica & Granger (2005)] получили, что нестационарная модель, позволяющая сдвиги в безусловной дисперсии, превосходит модель с долгой памятью при прогнозировании, но не на коротком горизонте. [Diebold & Inoue (2001)] также показали, как процессы с марковскими переключениями могут порождать долгую память в условном среднем, а [Granger & Teräsvirta (1999)] показали, что процесс с переключениями знака обладает признаками процесса с долгой памятью. Возможное на-

устойчивости в форме IGARCH изначально предложили [Lamougeux & Lastrapes (1990)] и [Diebold (1986)].

Долгосрочная зависимость, или долгая память (иногда также называемые строгой зависимостью или устойчивостью), означает устойчивое поведение временных рядов. Концепция долгой памяти впервые была разработана в [Hurst (1951)]. Долгую память можно определить в терминах скорости убывания автокорреляций для больших лагов. В частности, стационарный процесс обладает долгой памятью (или долгосрочной зависимостью), если существует вещественное число  $d$  и константа  $c_\rho > 0$ , такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{2d-1}} = 1,$$

где  $\rho(k)$  — автокорреляция для лага  $k$ , а  $d$  — параметр долгой памяти. Автокорреляции процесса с долгой памятью несуммируемы. Альтернативное, хотя и не эквивалентное определение долгосрочной зависимости можно дать, используя спектральную плотность  $f(\lambda)$  процесса:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda)}{c_f |\lambda|^{-2d}} = 1, \quad 0 < c_f < \infty.$$

Спектральная плотность  $f(\lambda)$  имеет полюс и в начале координат ведет себя как константа  $c_f$ , помноженная на  $\lambda^{-2d}$ . Автокорреляции стационарного и обратимого ARMA-процесса геометрически ограничены, т. е.  $|\rho(k)| \leq ct^{-k}$ , где  $0 < t < 1$ , и, следовательно, это процесс с короткой памятью. Популярный подход к моделированию долгой памяти состоит в использовании класса моделей **ARFIMA** (the **A**uto**R**egressive, **F**ractionally **I**ntegrated, **M**oving **A**verage models), предложенного в [Granger & Joyeux (1980)] и [Hosking (1981)]. Он обобщает ARIMA-модели, позволяя дробную степень интегрированности. В классе  $I(d)$  дробно интегрированных дискретных процессов с долгой памятью в дискретном времени распространение шоков среднего происходит с медленной гиперболической скоростью убывания, по сравнению с крайними случаями: классом стационарных и обратимых  $I(0)$  процессов ARMA с экспоненциальным убыванием и классом  $I(1)$ -процессов с бесконечной устойчивостью.

Класс моделей ARFIMA( $k, d, l$ ) для дискретного процесса  $\{y_t\}$  с вещественными значениями имеет вид (см. [Granger & Joyeux (1980)] и [Hosking (1981)]):

$$a(L)(1-L)^d y_t = b(L)\varepsilon_t,$$

где  $a(L)$  и  $b(L)$  — полиномы от  $L$  порядков  $k$  и  $l$ , соответственно, скопировано с сайта <http://www.math.ru.nl/~wvz/teaching/2000/ps19/> и разработана электронная библиотека ВУЗов России. Все права защищены. © 2000.

корни  $a(L)$  и  $b(L)$  лежат вне единичного круга. Процесс определяется как  $I(d)$ . Оператор дробной разности,  $(1-L)^d$ , имеет биномиальное разложение. Используя разложение Тейлора — Маклорена в точке  $z = 0$ , получаем

$$(1-z)^d = 1 - dL + \frac{d(d-1)}{2!}L^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-1)^j z^j, \quad \binom{d}{j} = \frac{d!}{(d-j)!j!}.$$

Коэффициенты при  $L^j$  убывают медленно и асимптотически пропорциональны  $j^{-(1+d)}$ . Учитывая, что  $\Gamma(j+1) = j! = j\Gamma(j)$ , где  $\Gamma(j) = \int_0^{\infty} x^{j-1} \exp(-x) dx$ ,  $j > 0$ , — гамма-функция, можно записать

$$\binom{d}{j} = \frac{d!}{(d-j)!j!} = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)}.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-1)^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} L^j = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j L^j = F(-d, 1, 1; L), \end{aligned}$$

где  $F(-d, 1, 1; L)$  — гипергеометрическая функция, определяемая как

$$\begin{aligned} F(m, n, s; x) &= \\ &= \Gamma(s)\Gamma(m)^{-1}\Gamma(n)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma(m+j)\Gamma(n+j)\Gamma(s+j)^{-1}\Gamma(j+1)^{-1} x^j. \end{aligned}$$

Если  $\mathbb{V}[\varepsilon_t] < \infty$  и  $-1/2 < d < 1/2$ , процесс  $\{y_t\}$  является слабо стационарным и обратимым и единственным образом представим в виде скользящего среднего и авторегрессии бесконечных порядков. При  $d < 1$  процесс возвращается к среднему. При  $1/2 < d < 1$ ,  $y_t$  не является ковариационно стационарным, но возвращается к среднему. Модель ARFIMA разделяет краткосрочную и долгосрочную динамику, улавливая краткосрочное поведение с помощью обыкновенных лаговых полиномов ARMA,  $a(L)$  и  $b(L)$ , а долгосрочное — параметром дробной интегрированности  $d$ .

**Модель FIGARCH (Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models).** Процесс FIGARCH, предложенный в [Baillie et al. (1996)], объединяет многие свойства дробно интегрированных процессов для среднего с обыкновенным GARCH-процессом для условной дисперсии. Модель FIGARCH

свойственна медленная гиперболическая скорость убывания лагированных квадратов инноваций в условной дисперсии, хотя накопленные веса импульсных откликов, связанных с воздействием шока волатильности на оптимальные прогнозы будущей условной дисперсии, сходятся к нулю. Это свойство модель разделяет со слабо стационарными GARCH-процессами. Модель FIGARCH предлагает альтернативу подходу, рассматривающему изменения параметров GARCH-модели как главную причину медленного убывания автокорреляций. Тем не менее свойство долгой памяти (и даже существование стационарного режима) для модели FIGARCH не доказано (см. [Giraitis et al. (2000)], GARCH( $p, q$ )-процесс как ARMA( $m, p$ ) для  $\varepsilon_t^2$ , где  $m = \max(p, q)$ ,

$$(1 - \alpha(L) - \beta(L))\varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(L))v_t, \quad v_t = \varepsilon_t - \sigma_t^2,$$

является последовательностью мартингалльных приращений. В ковариационно стационарной GARCH-модели эффект квадратов прошлых остатков на текущую условную дисперсию экспоненциально убывает по величине лага. Если авторегрессионный полином  $1 - \alpha(x) - \beta(x)$  содержит единичный корень, получаем модель IGARCH( $p, q$ ), определяемую как

$$\phi(L)(1 - L)\varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(L))v_t,$$

где  $\phi(L) \equiv (1 - \alpha(L) - \beta(L))(1 - L)^{-1}$  имеет порядок  $m - 1$ ,  $m = \max(p, q)$ . Модель FIGARCH получается простой заменой оператора  $(1 - L)$  оператором дробной разности. Аналогично ARFIMA( $k, d, l$ )-процессу для среднего, FIGARCH( $p, d, q$ ) для  $\{\varepsilon_t\}$  естественно определяется как

$$\phi(L)(1 - L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(L))v_t,$$

где  $0 < d < 1$ , и все корни  $\phi(L)$  и  $(1 - \beta(L))$  лежат вне единичного круга. Это означает, что процесс для  $\{\varepsilon_t^2\}$  является ARFIMA( $m - 1, d, p$ ). Учитывая, что  $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ , альтернативное представление модели FIGARCH( $p, d, q$ ) имеет вид

$$(1 - \beta(L))\sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta(L) - \phi(L)(1 - L)^d)\varepsilon_t^2,$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1}\omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2, \tag{5.18}$$

где

$$\lambda(L) \equiv 1 - (1 - \beta(L))^{-1}\phi(L)(1 - L)^d$$

и  $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \lambda_3 L^3 + \dots$ . FIGARCH( $p, d, q$ )-модель корректно определена, и  $\sigma_t^2 > 0$  п.н. для любого  $t$ , если все коэффициенты бесконечного ARCH-представления неотрицательны, т.е.  $\lambda_k > 0$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При  $0 \leq d \leq 1$   $F(-d, 1, 1; L = 1) = 1$  так что  $\lambda(0) = 1$ .

Следовательно, второй момент безусловного распределения  $\varepsilon_t$  бесконечен, и FIGARCH-процесс не является слабо стационарным. Это свойство он делит с классом IGARCH-процессов. [Baillie et al. (1996)] утверждают, что, поскольку лаги высоких порядков в бесконечном ARCH-представлении любой FIGARCH-модели могут доминироваться в смысле абсолютных значений соответствующими IGARCH-коэффициентами, класс FIGARCH( $p, d, q$ ) строго стационарен и эргодичен для  $0 \leq d \leq 1$ .

Однако доказательство существования стационарного решения (5.18), приведенное в [Baillie et al. (1996)], по всей видимости, неверно (см. [Giraitis et al. (2007)]). Вопрос существования стационарного решения уравнения FIGARCH («проблема FIGARCH») остается открытым и весьма сложным. [Giraitis et al. (2000)], [Mikosch & Starica (2000, 2003)] обсуждают споры вокруг FIGARCH-модели.

Модель FIGARCH( $p, d, q$ ) включает ковариационно стационарную GARCH( $p, q$ )-модель при  $d = 0$  и IGARCH( $p, q$ )-модель при  $d = 1$ . Если позволить параметру  $d$  принимать значения в интервале от нуля до единицы, модель получает дополнительную гибкость, что важно при моделировании долговременной зависимости в условной дисперсии.

Следует проявлять осторожность при интерпретации устойчивости в нелинейных моделях. В случае, когда условная дисперсия является линейной функцией прошлых  $\varepsilon_t^2$ , устойчивость просто характеризовать в терминах коэффициентов импульсного отклика для оптимального прогноза будущей условной дисперсии как функции от инновации в момент времени  $t$ ,  $v_t$ :

$$\gamma_k \equiv \frac{\partial \mathbf{E}_t[\varepsilon_{t+k}^2]}{\partial v_t} - \frac{\partial \mathbf{E}_t[\varepsilon_{t+k-1}^2]}{\partial v_t}.$$

В более общих моделях условной дисперсии параметры  $\gamma_i$  зависят от информационного множества на момент  $t$ . В моделях FIGARCH коэффициенты импульсного отклика не зависят от  $t$ . Их можно определить по коэффициентам лагового полинома  $\gamma(L)$ :

$$(1-L)\varepsilon_t^2 = (1-L)^{1-d}\phi(L)^{-1}\omega + (1-L)^{1-d}\phi(L)^{-1}(1-\beta(L))v_t \equiv \zeta + \gamma(L)v_t$$

Долгосрочное воздействие прошлых шоков на процесс волатильности теперь можно оценить в терминах предела накопленных весов импульсного отклика. Действительно,

$$\sum_{i=0}^k \gamma_i = \sum_{i=0}^k \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_t[\varepsilon_{t+i}^2]}{\partial v_t} - \frac{\mathbf{E}_t[\varepsilon_{t+i-1}^2]}{\partial v_t} \right] = \frac{\partial \mathbf{E}_t[\varepsilon_{t+k}^2]}{\partial v_t},$$

а

Тогда

$$\gamma(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \gamma_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = F(d-1, 1, 1; 1) \phi(1)^{-1} (1 - \beta(1)).$$

В ковариационно стационарной GARCH(p, q)-модели и FIGARCH(p, d, q)-модели с 0 < d < 1 шоки в условной дисперсии в конечном счете исчезают с точки зрения прогнозирования. В то время как шоки в GARCH-процессах (d = 0) убывают с быстрой экспоненциальной скоростью, в FIGARCH-модели λ<sub>k</sub> доминируется гиперболической скоростью убывания. Таким образом, несмотря на то, что кумулятивная функция импульсного отклика сходится к нулю при 0 ≤ d < 1, параметр дробной разности несет важную информацию относительно того, как и с какой скоростью распространяются шоки волатильности. С другой стороны, при d = 1 F(d - 1, 1, 1; 1) = 1, и накопленные веса импульсных откликов сходятся к не равной нулю константе γ(1) = φ(1)<sup>-1</sup>(1 - β(1)). Поэтому с точки зрения прогнозирования шоки σ<sub>t</sub><sup>2</sup> в модели IGARCH сохраняются навсегда. При d > 1 F(d - 1, 1, 1; 1) = ∞, что ведет к не наблюдаемому в данных взрывному процессу для условной дисперсии, и γ(1) становится не определена.

Рассмотрим в качестве примера модель GARCH(1, 1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

в форме ARMA:

$$(1 - \phi_1 L) \varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta_1 L) v_t,$$

где φ<sub>1</sub> ≡ α<sub>1</sub> + β<sub>1</sub>. Веса импульсных откликов для этой модели являются коэффициентами полинома

$$\gamma(L) = (1 - L)(1 - \phi_1 L)^{-1} (1 - \beta_1 L),$$

т. е.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1, \\ \gamma_1 &= \phi_1 - \beta_1 - 1, \\ \gamma_k &= (\phi_1 - \beta_1)(\phi_1 - 1)\phi_1^{k-2}, \quad k > 2. \end{aligned}$$

Накопленные веса импульсных откликов равны

$$\lambda_k = (\phi_1 - \beta_1)\phi_1^{k-1}, \quad k > 1,$$

и в пределе γ(1) = 0, если 0 < φ<sub>1</sub> < 1. Следовательно, эффект шока на прогноз будущей условной дисперсии сходится к нулю с быстрой экспоненциальной скоростью. В модели IGARCH(1, 1), т. е. при φ<sub>1</sub> = 1,

коэффициенты  $\lambda(L)$  имеют вид

$$\lambda_k = (1 - \beta_1), \quad \forall k > 1,$$

и накопленные веса импульсных откликов равны ненулевой константе  $\gamma(1) = 1 - \beta_1$ . Модель FIGARCH(1,  $d$ , 0) имеет вид

$$(1 - \phi_1 L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta_1 L) v_t.$$

Можно показать, что накопленные коэффициенты отклика в ARCH-представлении бесконечного порядка для FIGARCH(1,  $d$ , 0)-модели

$$\lambda(L) \equiv 1 - (1 - \beta_1 L)^{-1} (1 - L)^d$$

равны

$$\lambda_k = (1 - \beta_1 - (1 - d)k^{-1}) \Gamma(k + d - 1) \Gamma(k)^{-1} \Gamma(d)^{-1}$$

при  $k > 1$  и  $\lambda_0 = 1$ . Поэтому, если  $\omega > 0$ , условие  $0 \leq \beta_1 < d \leq 1$  является необходимым и достаточным для гарантии, что условная дисперсия в FIGARCH(1,  $d$ , 0)-модели положительна п.н. для всех  $t$ . Более того, из формулы Стирлинга следует, что для больших лагов  $k$

$$\lambda_k \approx ((1 - \beta_1) \Gamma(d)^{-1}) k^{d-1}.$$

В отличие от ковариационно стационарной GARCH(1, 1)-модели или модели IGARCH(1, 1), в которых воздействие шоков условной дисперсии либо экспоненциально убывает, либо сохраняется бесконечно, в модели FIGARCH(1,  $d$ , 0) реакция условной дисперсии на прошлые шоки убывает медленно, гиперболически.

## Модели FIGARCH

Поскольку оценки стандартной GARCH( $p$ ,  $q$ )-модели часто указывают на близкий к единичному корень в авторегрессионном полиноме, при оценивании модели EGARCH( $p$ ,  $q$ ), имеющей вид (5.13), наибольший корень оцененного полинома  $1 - \hat{\beta}(x)$  очень близок к единице. Тем не менее, как заметил [Nelson (1991)], модель EGARCH( $p$ ,  $q$ ) также можно расширить, позволив дробный порядок интегрированности. В работе [Bollerslev & Mikkelsen (1996)] предложено разложение на множители авторегрессионного полинома  $(1 - \beta(L)) = \phi(L)(1 - L)^d$ , где все корни  $\phi(x) = 0$  лежат вне единичного круга. Тогда модель может быть записана в виде

где  $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ . Очевидно, модель FIEGARCH( $p, d, q$ ) включает в себя обычную EGARCH-модель при  $d = 0$  и интегрированную EGARCH-модель при  $d = 1$ . По аналогии с классом ARFIMA моделей условного среднего,  $\{\ln(\sigma_t^2)\}$  является ковариационно стационарным и обратимым при  $d$  в интервале от  $-1/2$  до  $1/2$ . Шоки на оптимальные прогнозы будущих значений  $\ln(\sigma_t^2)$  исчезают при всех  $d < 1$ . Более того, в отличие от формулировки FIGARCH, параметры FIEGARCH необязательно должны удовлетворять каким-либо ограничениям неотрицательности, чтобы модель была корректно поставлена.

### 5.1.9. Процедуры оценивания параметров моделей

По сравнению с другими моделями волатильности (например, стандартной моделью стохастической волатильности) GARCH-модели легче оценивать, что сильно способствовало их популярности. Поскольку волатильность является функцией прошлых наблюдений, функция правдоподобия имеет явный вид и с ней просто работать, см. [Francq & Zakoïan (2009)]. Оценивание ARCH-моделей методом наименьших квадратов и максимального квазиправдоподобия рассмотрено в пионерской статье Энгла [Engle (1982)]. Асимптотические свойства оценки методом максимального квазиправдоподобия (ММКП) получили широкий интерес за последние 20 лет. Первые статьи ограничивались моделями ARCH (см. [Weiss (1986)]) или GARCH(1, 1) [Lee & Hansen (1994)], [Lumsdaine (1996)]. ММКП-оценивание общей GARCH( $p, q$ )-модели изучено в [Berkes & Horváth (2003), (2004)], [Berkes, Horváth & Kokosza (2003)], [Francq & Zakoïan (2004)] и [Hall & Yao (2003)]. [Straumann (2005)] является обширной монографией об оценивании GARCH-моделей. Подробнее о реализации обсуждаемых в этих работах подходах к оцениванию и о свойствах получаемых при этом оценок см., например, в [Росси (2010)].

### 5.1.10. Процедуры статистической проверки гипотез

#### Тестирование на ARCH-эффекты

Тесты на наличие ARCH-эффектов подробно рассмотрены в литературе. Простой и часто применяемый тест нулевой гипотезы

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$$

против альтернативы



хотя бы с одним строгим неравенством — это *тест множителей Лагранжа (LM-тест)*, предложенный в [Engle (1982)]. Тест основан на так называемой *скор-функции* и информационной матрице при нулевой гипотезе, в предположении, что стандартизированные инновации  $z_t$  нормально распределены. Рассмотрим ARCH-модель в (5.3):  $\sigma_t^2 = \zeta_t \alpha$ . Пусть  $\zeta_t = (1, \hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q}^2)$ ,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)'$ , где  $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \mu_t(\hat{\theta})$  — остатки. При справедливости нулевой гипотезы  $\sigma_t^2$  постоянна, т.е.  $\sigma_t^2 = \sigma_0^2$ . Скор-функция гауссовского логарифмического правдоподобия (см. [Росси (2010)]) при справедливости нулевой гипотезы имеет вид

$$\frac{\partial L_T}{\partial \alpha} \Big|_0 = \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_t \zeta_t' \left( \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{2\sigma_0^2} Z' f^0,$$

где  $f^0 = \left[ \left( \frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{\sigma_0^2} - 1 \right), \dots, \left( \frac{\hat{\varepsilon}_T^2}{\sigma_0^2} - 1 \right) \right]'$ , и  $Z' = (\zeta_1', \dots, \zeta_T')$  —  $(q+1) \times T$  матрица. Матрица вторых производных имеет вид

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = - \left( \frac{1}{\sigma_t^2} \right)^2 \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma_t^2} \zeta_t' \zeta_t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_t^2} \right)^2 \zeta_t' \zeta_t.$$

Отсюда находим информационную матрицу при нулевой гипотезе, равную среднему по всем  $t$  ожидаемым значениям условного математического ожидания:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha,0} &= -\frac{1}{T} \mathbf{E} \left[ \mathbf{E} \left[ \sum_t \frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \right] \Big|_0 = \\ &= -\frac{1}{T} \mathbf{E} \left[ \sum_t \mathbf{E} \left[ - \left( \frac{1}{\sigma_t^2} \right)^2 \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma_t^2} \zeta_t' \zeta_t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_t^2} \right)^2 \zeta_t' \zeta_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \right] \Big|_0 = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} \right)^2 \mathbf{E} [\zeta_t' \zeta_t] + \left( \frac{1}{\sigma_0^2} \right)^2 \mathbf{E} [\zeta_t' \zeta_t] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} \right)^2 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{E} [\zeta_t' \zeta_t]. \end{aligned}$$

LM-статистика равна

$$\xi_{LM} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial L_T}{\partial \alpha} \Big|_0 \right)' A_{\alpha\alpha,0}^{-1} \left( \frac{\partial L_T}{\partial \alpha} \Big|_0 \right)$$

LM-статистику можно состоятельно оценить:

$$\begin{aligned}\xi_{LM} &= f^{0'} Z \frac{1}{2\sigma_0^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} \right)^2 \sum_{t=1}^T \mathbf{E} [\zeta_t' \zeta_t] \right]^{-1} \frac{1}{2\sigma_0^2} Z' f^0 = \\ &= \frac{1}{2} f^{0'} Z (Z' Z)^{-1} Z' f^0.\end{aligned}$$

Если предположить нормальность, то  $p \lim (f^{0'} f^0 / T) = 2$ . Таким образом, асимптотически эквивалентная статистика имеет вид

$$\xi^* = T f^{0'} Z (Z' Z)^{-1} Z' f^0 / (f^{0'} f^0) = TR^2, \quad (5.19)$$

где  $R^2$  — квадрат коэффициента множественной корреляции между  $f^0$  и  $Z$ . Поскольку добавление константы и умножение на число не меняют  $R^2$  регрессии, это также  $R^2$  регрессии  $\hat{\varepsilon}_t^2$  на константу и  $q$  лагированных значений  $\hat{\varepsilon}_t^2$ . Статистика имеет асимптотическое хи-квадрат распределение с  $q$  степенями свободы, если нулевая гипотеза верна. Тест состоит в регрессировании квадратов остатков на константу и  $q$  лагов и сравнением  $TR^2$  с  $\chi^2(q)$ . Это асимптотически локально наиболее мощный тест.

Однако LM-тест (5.19) может отвергать нулевую гипотезу при неверной спецификации уравнения для условного среднего (5.10). Можно показать, что ошибки спецификации приводят к серийной корреляции остатков  $\hat{\varepsilon}_t$ , а следовательно, и их квадратов,  $\hat{\varepsilon}_t^2$ . Следовательно, нужно быть аккуратным при спецификации уравнения условного среднего (5.10) прежде, чем тестировать на ARCH-эффекты.

В [Lee & Hansen (1993)] обсуждается локально наиболее мощный в среднем скор-тест на наличие ARCH и GARCH-эффектов. Тест основан на сумме скор-функций при нулевой гипотезе, когда мешающие параметры заменяются ММП-оценками. В отсутствие мешающих параметров этот тест локально наиболее мощный в среднем. Затем сумма скор-функций стандартизируется путем деления на асимптотическую стандартную ошибку. Полученный тест имеет асимптотическое  $N(0, 1)$ -распределение. Тест-статистики, применяемые для тестирования против ARCH( $q$ )-процесса, можно также использовать для тестирования против GARCH( $p, q$ )-процесса. В малых выборках этот тест более мощный, чем LM-тест, и его асимптотические критические значения по меньшей мере так же точны.

Критерии Вальда и отношения правдоподобия (LR) также можно применять для тестирования гипотезы об условной гомоскедастичности. Например, против GARCH(1, 1) в качестве альтернативы

Статистика для тестирования  $H_0 : \alpha_1 = \beta_1 = 0$  против  $H_1 : \alpha_1 \geq 0$  или  $\beta_1 \geq 0$  с хотя бы одним строгим неравенством не следует  $\chi^2$ -распределению с двумя степенями свободы, поскольку стандартное предположение о том, что истинный параметр при  $H_0$  не лежит на границе пространства параметров, нарушается.

### IGARCH(1,1) против GARCH(1,1)

Если необходимо тестировать наличие единичного корня в GARCH(1,1), можно использовать *тест отношения правдоподобия* (LR), скор-тест (LM) или тест Вальда. Хорошо известно, что при нулевой гипотезе все три статистики *асимптотически* распределены как  $\chi^2(1)$ . Однако их свойства в *конечных* выборках различаются. Предположим, что истинная модель имеет вид

$$y_t = \mu + \varepsilon_{0t}, \quad \varepsilon_{0t} | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_{0t}^2), \\ \sigma_{0t}^2 = \omega_0 + \alpha_0 \varepsilon_{0t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{0t-1}^2, \quad \theta_0 = (\mu_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0)'$$

Определим нулевую гипотезу:

$$H_0 : \alpha_0 + \beta_0 = 1,$$

или

$$H_0 : g(\theta_0) = \alpha_0 + \beta_0 - 1 = 0,$$

против альтернативы

$$H_1 : \alpha_0 + \beta_0 < 1.$$

Теперь предположим, что оцениваемая модель верно специфицирована для условного среднего и дисперсии:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad \theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta)', \\ L_T(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta), \quad A_0 = -\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right].$$

Оцененная матрица Гессе имеет вид

$$A_T(\theta) = -\frac{1}{T} \sum_t \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'},$$

а в случае GARCH-моделей

$$A_T(\theta) = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\sigma_t^2)^{-2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta'} + \sum_{t=1}^T (\sigma_t^2)^{-1} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta'} \right]$$

Информационная матрица

$$B_0 = \frac{1}{T} \mathbf{E} \left[ \frac{\partial L_T(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial L_T(\theta_0)}{\partial \theta'} \right]$$

оценивается с помощью

$$B_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'}.$$

Здесь  $A_T(\hat{\theta})$  и  $B_T(\hat{\theta})$  — состоятельные оценки  $A$  и  $B$ , где  $\hat{\theta}$  — ММП-оценка  $\theta_0$ . Если условное распределение  $\varepsilon_0$  нормально, то  $A = B$ . Более того,

$$D\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, I_k)$$

$D$  равна  $A^{1/2}$  в случае условного нормального распределения и  $B^{-1/2}A$  в общем случае.

В [Lumsdaine (1996)] исследованы свойства в конечных выборках в предположении, что истинное распределение нормально. Пусть  $\hat{\theta}_R$  и  $\hat{\theta}_U$  — ММП-оценки моделей с ограничением и без ограничения соответственно. При нулевой гипотезе следующие статистики имеют  $\chi^2(1)$ -распределение:

$$\xi_{LR} = -2 \left( L_T(\hat{\theta}_R) - L_T(\hat{\theta}_U) \right),$$

$$\xi_{LM}^{NR} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial L_T(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right)' A_T^{-1}(\hat{\theta}_R) \left( \frac{\partial L_T(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right), \quad (5.20)$$

$$\xi_{WR}^{NR} = Tg(\hat{\theta}_U)' \left[ \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_U)}{\partial \theta'} \right) A_T^{-1}(\hat{\theta}_U) \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right) \right]^{-1} g(\hat{\theta}_U). \quad (5.21)$$

Робастные версии (5.20) и (5.21) имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{LM}^R &= \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial L_T(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right)' A_T^{-1}(\hat{\theta}_R) \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right) \right] \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta'} \right) A_T^{-1}(\hat{\theta}_R) B_T(\hat{\theta}_R) A_T^{-1}(\hat{\theta}_R) \right]^{-1} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta'} \right) A_T^{-1}(\hat{\theta}_R) \left( \frac{\partial L_T(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\xi_{WR}^R = Tg(\hat{\theta}_U)' \left[ \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_U)}{\partial \theta'} \right) A_T^{-1}(\hat{\theta}_U) B_T(\hat{\theta}_U) A_T^{-1}(\hat{\theta}_U) \left( \frac{\partial g(\hat{\theta}_R)}{\partial \theta} \right) \right]^{-1} g(\hat{\theta}_U).$$

Статистики Вальда ( $\xi_W^R$  и  $\xi_W^{NR}$ ) равны квадратам (робастной и неробастной соответственно)  $t$ -статистик для  $g(\theta) = 0$ . [Lumsdaine (1995)] сравнивает робастную и неробастную версии LM и вальдовской статистик методом Монте-Карло и обнаруживает, что робастные версии обладают более желательными свойствами размера теста и частоты отвержения нулевой гипотезы. LM-тесты склонны к значительному превышению размера при нулевой гипотезе.

### Тест на асимметричные эффекты

В каждой модели волатильности неявно присутствует определенная кривая воздействия новостей. В стандартной GARCH-модели кривая воздействия новостей симметрична и центрирована в  $\varepsilon_{t-1} = 0$ . То есть положительные и отрицательные шоки доходности одного размера приводят к одинаковой волатильности. Кроме того, большие шоки доходности предсказывают большую волатильность, пропорционально квадрату размера шока доходности. Если отрицательный шок доходности ведет к большей волатильности, чем положительный шок того же размера, прогноз GARCH-модели занижает объем волатильности вследствие плохих новостей и завышает его для хороших новостей. Далее, если большие шоки доходности ведут к большей волатильности, чем допускает квадратичная функция, прогноз стандартной GARCH-модели занижает волатильность вследствие большого шока доходности и завышает ее для малого шока доходности.

[Engle & Ng (1993)] предложили три диагностических теста для моделей волатильности: *тест на смещение для шоков разного знака*, *тест на смещение для размера отрицательных шоков* и *тест на смещение для размера положительных шоков*. Эти тесты проверяют, можно ли прогнозировать квадрат нормализованных остатков некоторыми переменными, наблюдаемыми в прошлом, которые не включены в используемую модель волатильности. Если эти переменные могут прогнозировать квадрат нормализованного остатка, то модель для дисперсии неверно специфицирована. Тест на смещение для шоков разного знака рассматривает воздействие положительных и отрицательных шоков доходности на волатильность, не прогнозируемое рассматриваемой моделью. Тест на смещение для размера отрицательных шоков рассматривает разные эффекты, оказываемые большими и малыми отрицательными шоками доходности на волатильность, которые не предсказываются моделью для волатильности. Тест на смещение для размера положительных шоков рассматривает разные эффекты, которые большие и малые положительные шоки доходности оказывают на волатильность, не предсказываемые моделью для волатильности.

Для получения оптимальной формы этих тестов в [Engle & Ng (1993)] предполагается, что модель волатильности при верной нулевой гипотезе является частным случаем более общей модели следующего вида:

$$\ln(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_{0t}^2 (\delta_0' z_{0t})) + \delta_a' z_{at}, \quad (5.22)$$

где  $\sigma_{0t}^2 (\delta_0' z_{0t})$  — модель волатильности при верной нулевой гипотезе,  $\delta_0$  —  $(k \times 1)$  вектор параметров при верной нулевой гипотезе,  $z_{0t}$  —  $(k \times 1)$  вектор объясняющих переменных при верной нулевой гипотезе,  $\delta_a$  —  $(m \times 1)$  — вектор дополнительных параметров,  $z_{at}$  —  $(m \times 1)$  — вектор пропущенных объясняющих переменных. Эта форма включает как GARCH, так и EGARCH модели. Например, GARCH(1,1)-модель соответствует случаю

$$\begin{aligned} \sigma_{0t}^2 (\delta_0' z_{0t}) &= \delta_0' z_{0t}, \quad z_{0t} \equiv [1, \sigma_{t-1}^2, \varepsilon_{t-1}^2]', \\ \delta_0 &\equiv [\omega, \beta, \alpha]', \quad \delta_a = [\beta^*, \phi^*, \psi^*]', \\ z_{at} &= \left[ \log(\sigma_{t-1}^2), \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \left( \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{2/\pi} \right) \right]'. \end{aligned}$$

Обобщающая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \log(\sigma_t^2) &= \log(\omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2) + \beta^* \log(\sigma_{t-1}^2) + \\ &+ \phi^* \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \psi^* \left( \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{2/\pi} \right), \end{aligned}$$

и при  $\alpha = \beta = 0$  это модель EGARCH(1,1), а при  $\beta^* = \phi^* = \psi^* = 0$  это GARCH(1,1)-модель.

Нулевая гипотеза имеет вид  $\delta_a = 0$ . Пусть  $v_t$  — нормализованный остаток, соответствующий наблюдению  $t$  при модели волатильности, соответствующей нулевой гипотезе, т.е.  $v_t \equiv \varepsilon_t / \sigma_t$ . LM-тест статистика для  $H_0 : \delta_a = 0$  в (5.22) — это тест на  $\delta_a = 0$  во вспомогательной регрессии

$$v_t^2 = z_{0t}' \delta_0 + z_{at}' \delta_a + u_t, \quad (5.23)$$

где  $z_{0t}' \equiv \sigma_{0t}^{-2} \left( \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_0} \right)$ ,  $z_{at}' \equiv \sigma_{0t}^{-2} \left( \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_a} \right)$ . Как  $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_0}$ , так и  $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_a}$  оцениваются в  $\delta_a = 0$  и  $\delta_0$  (ММП-оценка  $\delta_0$  при верной  $H_0$ ). Если ограничения на параметры соблюдены, переменные в правой части (5.23) не должны иметь объясняющей силы. Поэтому тест часто подсчитывается как

где  $R^2$  — квадрат коэффициента множественной корреляции в (5.23), а  $T$  — число наблюдений в выборке<sup>6</sup>. LM-статистика имеет асимптотическое распределение хи-квадрат с  $m$  степенями свободы при верной нулевой гипотезе, где  $m$  — число ограничений на параметры. Для обобщающей модели (5.22)  $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_a}$  равна<sup>7</sup>  $\sigma_{0t}^2 z_{at}$  при верной нулевой гипотезе, а следовательно,  $z_{at}^* = z_{at}$ .  $v_t^2$  регрессируется на константу  $z_{0t}^*$  и  $z_{at}$ . Переменные в  $z_{at}$  — это  $S_{t-1}$ ,  $S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}$  и  $S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}$ . Оптимальная форма теста на смещение для шоков разного знака следующая:

$$v_t^2 = a + b_1 S_{t-1}^- + \gamma' z_{0t}^* + e_t,$$

где

$$S_{t-1}^- = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1} < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Регрессия для теста на смещение для размера отрицательных шоков имеет вид

$$v_t^2 = a + b_2 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + \gamma' z_{0t}^* + e_t,$$

а для теста на смещение для размера отрицательных шоков

$$v_t^2 = a + b_3 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + \gamma' z_{0t}^* + e_t, \quad S_{t-1}^+ = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1} > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$t$ -статистики для  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  являются статистиками для тестов на смещение знака отрицательное смещение знака и положительное смещение знака соответственно. Совместный тест — это LM-тест на добавление трех переменных в уравнение дисперсии (5.22) при предполагаемой спецификации:

$$v_t^2 = a + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + \gamma' z_{0t}^* + e_t.$$

Тестовая статистика — это  $TR^2$ . Если модель волатильности верна, то  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ,  $\gamma = 0$  и  $e_t$  является *iid*. Если  $z_{0t}^*$  не включать, то тест будет консервативен; размер (уровень значимости) теста будет меньше либо равен номинальному, а мощность, вероятно, снижена.

<sup>6</sup> Для сильно нелинейных моделей алгоритмы численной оптимизации обычно не гарантируют точную ортогональность  $v_t^2$  и  $z_{0t}^*$ . В [Engle & Ng (1993)] предлагается регрессировать  $v_t^2$  только на  $z_{0t}$ , а затем использовать полученные остатки (которые ортогональны  $z_{0t}$ ) вместо  $v_t^2$  в (5.23).

<sup>7</sup> Действительно,  $\sigma_t^2 = \sigma_{0t}^2 (\delta'_a z_{at}) \exp(\delta'_a z_{at})$ ,  $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_a} = \sigma_{0t}^2 z_{at} \exp(\delta'_a z_{at})$  при нулевой гипотезе.  $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \delta_a} = \sigma_{0t}^2 z_{at}$ .

### 5.1.11. Эмпирические приложения в статистическом пакете Eviews: одномерные ARCH и GARCH модели

#### Цены на нефть, добытую на западе Техаса

На сайте Федеральной резервной службы Сент-Луиса в свободном доступе размещаются данные для экономических и финансовых временных рядов (база этих данных называется FRED II). Поскольку стоимость топлива — это одна из основных статей расходов, которые приходится нести компании, мы проанализируем спотовые цены на нефть, добытые на западе Техаса. Месячные данные для этих цен могут быть загружены из вышеупомянутого сайта.

Мы рассмотрим выборку за период с января 1981 г. по апрель 2005 г., поскольку более ранние данные отвечают совершенно иной структуре рынка и нескольким структурным сдвигам, произошедшим в результате некоторых шоков. Анализ будет включать в себя использование фиктивных переменных как в уравнении для условного среднего, так и в уравнении для условной дисперсии, так же как и использование распределений, отличных от нормального.

Графики логарифмов цен, первых разностей логарифмов цен и их коррелограммы представлены на рис. 5.1 и 5.2.

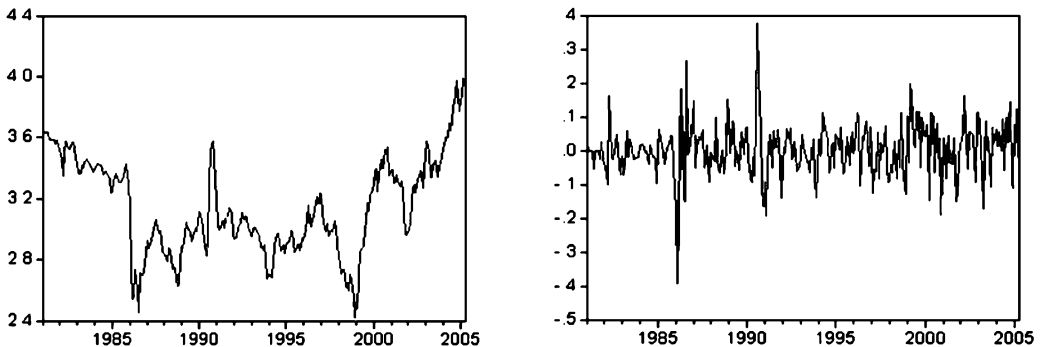


Рис. 5.1. Графики логарифмов цен и разностей логарифмов цен

Из графиков, приведенных выше, можно предположить, что логарифмы цен интегрированы порядка 1. Чтобы проверить это, мы проведем три теста на единичные корни (из тех, что мы рассматривали выше). Эти тесты могут быть проведены при помощи следующих команд в Eviews (описание самих тестов см. в гл. 4):



```
log_price.uroot(adf, const)
log_price.uroot(pp, const)
log_price.uroot(kpss, const)
```

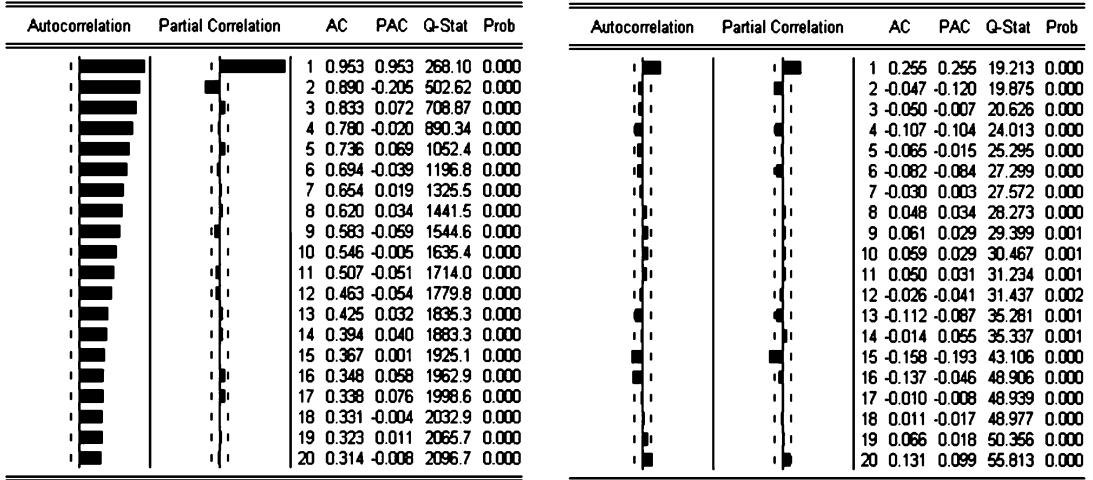
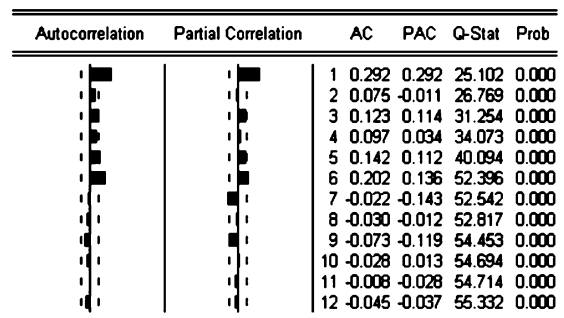
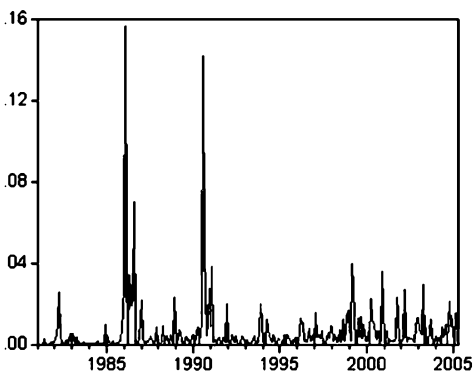


Рис. 5.2. Коррелограммы для  $\log(\text{price})$  и  $d\log(\text{price})$

$ADF$ -статистика равна  $-2,42$  с  $p$ -значением, равным  $0,13$ .  $PP$ -статистика равна  $-1,84$  с  $p$ -значением, равным  $0,36$ . Наконец,  $KPSS$ -статистика равна  $0,350$ , что больше, чем  $10\%$ -ное критическое значение, равное  $0,347$ : все три теста подтверждают тот факт, что логарифмы цен на нефть представляют собой  $I(1)$ -процесс. Более того, если мы взглянем на график и коррелограмму квадратов логарифмов цен (см. рис. 5.3), мы заключим, что условная дисперсия меняется со временем. Для учета временных эффектов мы можем использовать ARCH-модель. Начнем с  $ARIMA(2,1,0)$ -модели с  $ARCH(1)$ -моделью для условной дисперсии. Результаты оценивания параметров этой модели представлены в табл. 5.1.



**Таблица 5.1** Оценки для ARIMA(2,1,0)-ARCH(1)-модели

Dependent Variable: DLOG(PRICE)  
 Method: ML - ARCH (Marquardt)  
 Sample: 1981:01 2005:04  
 Included observations: 292 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 13 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003775	0.003710	1.017407	0.3090
DLOG(PRICE(-1))	0.221628	0.049148	4.509390	0.0000
DLOG(PRICE(-2))	-0.100077	0.054719	-1.828923	0.0674
Variance Equation				
C	0.003110	0.000361	8.607234	0.0000
ARCH(1)	0.546603	0.091644	5.964438	0.0000
R-squared	0.073894	Mean dependent var		0.001233
Adjusted R-squared	0.060986	S.D. dependent var		0.078908
S.E. of regression	0.076464	Akaike info criterion		-2.420123
Sum squared resid	1.678009	Schwarz criterion		-2.357165
Log likelihood	358.3380	F-statistic		5.724908
Durbin-Watson stat	1.868037	Prob(F-statistic)		0.000191

Эта модель дает неплохие результаты, но коррелограммы стандартизованных остатков и квадратов стандартизованных остатков (см. рис. 5.4) указывают на наличие некоторой остаточной корреляции.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.002	0.002	0.0013	0.971		1	-0.073	-0.073	1.5794	0.209	
2	-0.006	-0.006	0.0136	0.993		2	0.024	0.018	1.7434	0.418	
3	0.030	0.030	0.2861	0.963		3	0.120	0.123	6.0037	0.111	
4	-0.102	-0.102	3.3997	0.493		4	0.020	0.038	6.1216	0.190	
5	-0.028	-0.027	3.6346	0.603		5	0.108	0.108	9.5978	0.087	
6	0.005	0.003	3.6429	0.725		6	0.127	0.132	14.403	0.025	
7	-0.020	-0.014	3.7604	0.807		7	-0.040	-0.030	14.877	0.038	
8	0.036	0.027	4.1443	0.844		8	0.114	0.081	18.787	0.016	
9	0.053	0.047	4.9830	0.836		9	-0.048	-0.070	19.491	0.021	
10	0.053	0.055	5.8281	0.829		10	-0.004	-0.031	19.495	0.034	
11	0.050	0.046	6.5872	0.831		11	-0.018	-0.071	19.589	0.051	
12	-0.014	-0.011	6.6491	0.880		12	-0.052	-0.068	20.418	0.060	
13	-0.142	-0.135	12.818	0.462		13	0.040	0.026	20.901	0.075	
14	0.026	0.036	13.021	0.525		14	-0.048	-0.048	21.612	0.087	
15	-0.168	-0.163	21.788	0.113		15	0.036	0.074	22.018	0.107	
16	-0.110	-0.107	25.525	0.061		16	-0.030	-0.022	22.306	0.134	
17	0.013	-0.025	25.574	0.083		17	0.004	0.047	22.311	0.173	
18	-0.040	-0.042	26.077	0.098		18	0.031	0.038	22.615	0.206	
19	0.007	-0.026	26.090	0.128		19	-0.069	-0.061	24.099	0.192	
20	0.105	0.073	29.577	0.077		20	0.054	0.057	25.021	0.201	

**Рис. 5.4.** Коррелограммы для стандартизованных остатков и квадратов стандартизованных остатков

```
arch1.correl(20)
arch1.correlsq(20)
```

Аналогичные результаты получены с использованием LM-ARCH-теста порядка 6

`arch1.archtest(6)`,

который отвергает нулевую гипотезу об отсутствии гетероскедастичности на 5%-ном уровне. Более того, тест Jarque-Bera на 1%-ном уровне отвергает нулевую гипотезу о наличии нормальности `arch1.hist`.

Основываясь на вышеприведенных графиках, включим 15-ый лаг в авторегрессионную компоненту, описывающую уравнение для условного среднего, и вторую ARCH-компоненту в уравнение для условной дисперсии, см. таблицу 5.2. Теперь все диагностические тесты не сигнализируют о наличии остаточной корреляции, и нулевая гипотеза о нормальности также не отвергается на 10% уровне. Более того, критерии Акаике и Шварца достигают своих наименьших значений. Значимость 15-го лага можно легко интерпретировать тем, что все крупные нефтяные корпорации и производители стремятся сохранить запасы и резервы для того, чтобы иметь возможность сгладить дисбалансы в поставках нефти и ее потреблении.

**Таблица 5.2** Результаты для ARIMA(2,1,0)-ARCH(1)-модели

Dependent Variable: DLOG(PRICE)

Method: Method: ML - ARCH (Marquardt)

Sample: 1981:01 2005:04

Included observations: 292 after adjusting endpoints

Convergence achieved after 12 iterations

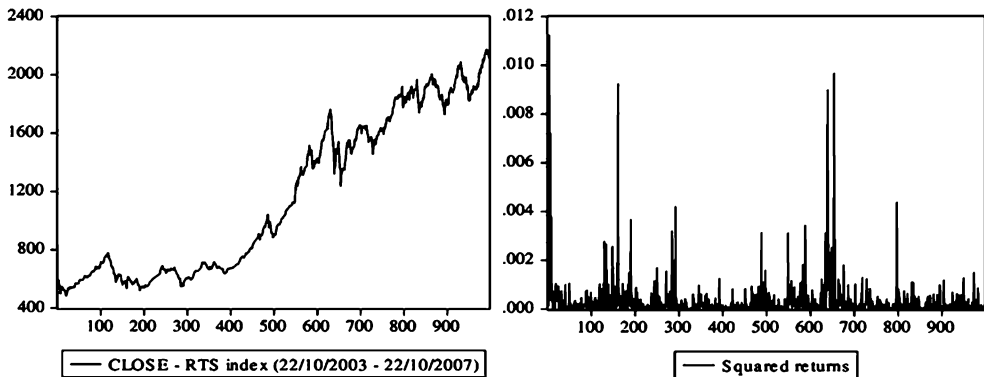
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001734	0.003421	0.506993	0.6122
DLOG(PRICE(-1))	0.205768	0.065161	3.157871	0.0016
DLOG(PRICE(-2))	-0.171889	0.059001	-2.913333	0.0036
DLOG(PRICE(-15))	-0.182143	0.047582	-3.827992	0.0001
Variance Equation				
C	0.002219	0.000343	6.468073	0.0000
ARCH(1)	0.434721	0.107615	4.039610	0.0001
ARCH(2)	0.260177	0.106528	2.442334	0.0146
R-squared	0.100088	Mean dependent var		0.001233
Adjusted R-squared	0.081142	S.D. dependent var		0.078908
S.E. of regression	0.075639	Akaike info criterion		-2.485958
Sum squared resid	1.630548	Schwarz criterion		-2.397816
Log likelihood	369.9498	F-statistic		5.282912
Durbin-Watson stat	1.844087	Prob(F-statistic)		0.000035

Наконец, мы представим результаты прогнозирования на один шаг времени вперед на интервале от 2000:05 до 2005:04 (см. рис. 5.5).



## AR-GARCH-модель для российского фондового индекса RTS

Рассмотрим дневные цены закрытия для российского фондового индекса RTS между 22/10/2003 и 22/10/2007, так же как квадраты доходностей (см. рис. 5.7).



**Рис. 5.7.** Индекс RTS: дневные цены закрытия и квадраты доходностей (2003–2007)

Мы хотим найти наилучшую модель в классе AR-GARCH-моделей для первых разностей логарифмов индекса RTS,  $\Delta Y_t$ . Если мы посмотрим на: i) информационный критерий Шварца (см. табл. 5.3); ii) свойства остатков (ACF & PACF, Ljung-Box статистики, см. табл. 5.4) и iii) значимость оценок параметров вместе с результатами тестов множителей Лагранжа (LM-тестов), то выясним, что AR(1)-Threshold-GARCH(1,1)-модель со стандартизированными остатками, имеющими распределение Стьюдента, адекватно описывает эмпирические свойства индекса RTS.

**Таблица 5.3** Результаты оценивания AR(1)-TGARCH(1,1)-модели со стандартизированными остатками, подчиняющимися распределению Стьюдента

Dependent Variable: DLOG(CLOSE)  
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution  
Sample (adjusted): 3 996  
Included observations: 994 after adjustments  
Convergence achieved after 17 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.002329	0.000439	5.307604	0.0000
DLOG(CLOSE(-1))	0.063278	0.032911	1.922667	0.0545
Variance Equation				
C	2.01E-05	5.66E-06	3.552492	0.0004
RESID(-1)^2	0.039363	0.032684	1.204348	0.2285
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.134842	0.047118	2.861799	0.0042
GARCH(-1)	0.813445	0.037875	21.47732	0.0000
T-DIST. DOF	4.994905	0.875731	5.703696	0.0000
R-squared	0.001184	Mean dependent var		0.001288
Adjusted R-squared	-0.00489	S.D. dependent var		0.017697
S.E. of regression	0.01774	Akaike info criterion		-5.51895
Sum squared resid	0.310627	Schwarz criterion		-5.48444
Log likelihood	2749.92	F-statistic		0.195019
Durbin-Watson stat	1.967154	Prob(F-statistic)		0.902255

**Таблица 5.4** Ljung-Box-тесты для стандартизованных остатков (левая часть таблицы) и квадратов стандартизованных остатков (правая часть таблицы)

Standardized Residuals			Standardized Residuals Squared		
Lag	Q-Stat	P-value	Lag	Q-Stat	P-value
1	0.9523	0.329	1	1.0782	0.299
2	1.7626	0.414	2	2.7034	0.259
3	2.8505	0.415	3	4.0098	0.260
4	3.5951	0.464	4	4.0109	0.405
5	4.177	0.524	5	4.0921	0.536
6	7.3259	0.292	6	4.8179	0.567
7	7.4971	0.379	7	4.826	0.681
8	8.1215	0.422	8	5.9319	0.655
9	10.862	0.285	9	5.9356	0.746
10	10.983	0.359	10	6.3304	0.787
11	17.089	0.105	11	6.3308	0.850
12	17.133	0.145	12	6.6783	0.878
13	19.05	0.122	13	8.1772	0.832
14	19.405	0.150	14	8.3205	0.872
15	19.469	0.193	15	9.1009	0.872
16	19.525	0.242	16	9.1656	0.906
17	20.612	0.244	17	10.245	0.893
18	21.298	0.265	18	11.048	0.892
19	21.306	0.320	19	14.134	0.776
20	23.572	0.262	20	14.156	0.823
...	...	...	...	...	...
200	168.77	0.947	200	153.11	0.994

## 5.2. Многомерные GARCH-модели (MGARCH)

### 5.2.1. Введение

Обобщение одномерных GARCH-моделей на  $n$ -мерный случай требует некоторых предположений относительно зависимости условной ковариационной матрицы  $n$ -мерных случайных величин  $\varepsilon_t$  с нулевым и средними значениями от элементов информационного множества  $\mathcal{F}_t$ .

Основными областями приложения многомерных GARCH-моделей (MGARCH-моделей) являются управление *портфельными* инвестициями и риском, хеджирование, анализ внешних воздействий на волатильность отдельно взятого рынка, условные CAPM-модели и ценообразование опционов. Для того чтобы более четко продемонстрировать необходимость развития этих моделей, рассмотрим следующий пример.

**Пример 5.1** (граница потерь для портфеля активов).

Предположим, что имеется инвестор, который заинтересован в оценке границы потерь (ГП) своего портфеля, составленного из  $n$  акций.

широко используется в качестве числовой меры риска. Более детальное рассмотрение этой меры будет представлено в гл. 7.

Обозначим  $n \times 1$ -вектор доходностей для  $n$  акций через  $r$ . А доходность портфеля, составленного из этих акций с весами  $w$ , обозначим через  $r_p$ . Тогда мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_p &= w'r \\ \mu_p \equiv \mathbf{E}[r_p] &= w'\mu, \end{aligned}$$

где  $\mu = \mathbf{E}[r]$

$$\sigma_p^2 \equiv \mathbf{D}r_p = w'\Sigma w,$$

где  $\Sigma$  — это ковариационная матрица вектора  $r$ .

Пусть  $W$  — суммарный объем денежных средств, инвестированных в портфель. ГП уровня  $\alpha$  для портфеля определяется как минимальный объем средств, который может быть утрачен с вероятностью, меньшей или равной  $\alpha$ . ГП уровня  $\alpha$  (в англоязычной литературе  $VaR(\alpha)$ ) — это  $\alpha$ -квантиль распределения убытков и прибылей портфеля. В нашем примере:

$$VaR(\alpha) = W g_p(\alpha),$$

где  $g_p(\alpha)$  — это квантиль случайной величины  $r_p$  уровня  $\alpha$ , т. е.  $P[r_p < g_p(\alpha)] = \alpha$ . Поскольку ГП определяется в денежных средствах, то  $W$  входит в формулу для ГП мультипликативно. В предположении нормальности  $r_p$  (т. е.  $r_p \in N(\mu_p, \sigma_p^2)$ ) мы имеем:

$$VaR(\alpha) = (\mu_p + z_\alpha \sigma_p)W = (w'\mu + z_\alpha \sqrt{w'\Sigma w})W,$$

где  $z_\alpha$  —  $\alpha$ -квантиль стандартного нормального распределения.

В приведенном выше примере предположение о постоянстве во времени параметров  $\mu$  и  $\Sigma$  является весьма ограничительным. Одной из возможностей обойти такое ограничение — это оценить одномерную GARCH-модель для условной дисперсии  $\sigma_{p,t}^2$  случайной величины  $r_p$  (при условии известной информации до момента  $t$ ). Но ограничительной особенностью такого подхода является необходимость переоценки модели для каждого набора весов  $w$ . Если мы используем MGARCH-модель, то нам нет необходимости переоценивать модель при каждом новом наборе весов  $w$ , поскольку дисперсия доходности портфеля равна  $w'\Sigma w$ . Более того, значительно проще оценить чувствительность ГП

### 5.2.2. Общая структура многомерной модели

Пусть  $Y_t$  — векторный стохастический процесс размерности  $(n \times 1)$ , а  $\theta$  — конечный вектор параметров:

$$Y_t = \mathbf{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \varepsilon_t,$$

с

$$\varepsilon_t = \left( \Sigma^{(t)}(\theta) \right)^{1/2} \cdot z_t,$$

где  $\Sigma^{(t)}(\theta)$  — положительно определенная матрица размерности  $n \times n$ ,  $z_t$  — *iid* случайные вектора размерности  $(n \times 1)$ , для которых:

- $\mathbf{E}[z_t] = 0$
- $\Sigma_{z_t} = \mathbf{I}_n$ ,

а  $\mathcal{F}_t$  — информационное множество, накопленное до момента времени  $t$  (т. е. состоящее из значений  $Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$ ).

Учитывая заданную спецификацию ошибки, мы можем вычислить ковариационную матрицу  $Y_t$ , а именно:

$$\Sigma_{Y_t}(\mathcal{F}_{t-1}) = \Sigma_{Y_t}^{(t-1)} = \Sigma_{\varepsilon_t}^{(t-1)} = \left( \Sigma^{(t)} \right)^{1/2} \Sigma_{z_t}^{(t-1)} \left[ \left( \Sigma^{(t)} \right)^{1/2} \right]' = \Sigma^{(t)},$$

где для простоты мы использовали сокращенное обозначение для условной ковариационной матрицы  $\Sigma_{Y_t}^{(t-1)}$ .

Параметризация  $\Sigma^{(t)}$  в виде многомерной GARCH-модели позволяет выражать каждый элемент матрицы  $\Sigma^{(t)}$  через  $q$  лагированных значений квадратов и попарных произведений  $\varepsilon_t$ , так же, как с использованием  $p$  лагированных значений элементов матрицы  $\Sigma^{(t)}$ . Таким образом, элементы ковариационной матрицы отвечают векторному ARMA-процессу для квадратов и попарных произведений остатков.

Хотя MGARCH-модели представляют собой прямое обобщение одномерных GARCH-моделей, они обладают рядом недостатков:

- необходимы условия на  $\theta$ , обеспечивающие положительную определенность  $\Sigma^{(t)}$  для всех  $t$ ;
- параметров должно быть немного, чтобы оценка модели была возможной;
- необходимы условия, обеспечивающие стационарность остатков  $\varepsilon_t$ .

Для решения указанных выше проблем были предложены различные спецификации, которые могут быть категоризированы в две



- модели для условной ковариационной матрицы  $\Sigma^{(t)}$ ;
- модели для условной корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_t$ , получаемой из разложения  $\Sigma^{(t)} = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$ , где  $\mathbf{D}_t$  — диагональная матрица с частными дисперсиями на главной диагонали.

### 5.2.3. VEC-модели

VEC( $p, q$ )-модель была впервые предложена в работе [Bollerslev et al. (1988)]. При построении этой модели используется так называемый “vech”-оператор, который позволяет представить нижнетреугольную матрицу размерности  $n \times n$  вектором размерности  $(\frac{n(n+1)}{2} \times 1)$ . VEC( $p, q$ )-модель определяется следующим соотношением:

$$\sigma_t = c + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^p \mathbf{G}_j \sigma_{t-j}, \quad (5.24)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \text{vech} \Sigma^{(t)}, \quad \eta_t = \text{vech}(\varepsilon_t \varepsilon_t'), \\ \text{vech} \Sigma^{(t)} &= (\sigma_{11t}, \sigma_{21t}, \sigma_{22t}, \sigma_{31t}, \dots, \sigma_{nnt})', \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{G}_j$  — квадратные матрицы параметров размерности  $(\frac{(n+1)n}{2} \times \frac{(n+1)n}{2})$ , а  $c$  — вектор-параметр размерности  $(\frac{(n+1)n}{2} \times 1)$ . Количество параметров в модели равно  $[1 + (p+q)[n(n+1)/2]^2]$ , что соответствует порядку  $n^4$ . Даже при малых размерностях  $n$  и малых значениях  $p$  и  $q$ , количество параметров довольно велико: для  $n = 5$  и  $p = q = 1$ , «неурезанная» версия модели (5.24) включает в себя 465 параметров.

Для того чтобы проиллюстрировать действие “vech”-оператора и дать общее представление относительно динамики, описываемой VEC-моделью, мы рассмотрим двумерную VEC(1, 1)-модель:

**Пример 5.2** (двумерная VEC(1,1)-модель).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В этом случае уравнение для условной ковариации имеет вид:

$$\sigma_{21t} = c_2 + a_{21} \varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{22} \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + a_{23} \varepsilon_{2,t-1}^2 + g_{21} \sigma_{11,t-1} +$$

В соответствии с определением VEC-модели каждый элемент ее ковариационной матрицы в момент времени  $t$  является функцией не только своих лаговых значений и соответствующих квадратов остатков, но также и лаговых значений других компонент ковариационной матрицы и лаговых значений квадратов других компонент вектора остатков. Это позволяет рассматривать довольно гибкую спецификацию, в которой можно изучать влияние волатильности одного актива (или рыночного индекса) на волатильность других активов (рыночных индексов), которое известно в литературе как «эффект распространения волатильности». В целом волатильность отдельного актива зависит не только от своих прошлых значений, но также от прошлых значений волатильностей других активов. Однако учет этого свойства в рамках VEC-модели связан с использованием большого числа параметров.

Естественным шагом, позволяющим сократить количество параметров, является использование *диагонального представления*, в котором каждый элемент ковариационной матрицы зависит только от своих прошлых значений и прошлых значений для  $\epsilon_{jt}\epsilon_{kt}$ . В диагональной модели  $\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{G}_j$  — диагональные матрицы. Для  $n = 2$  и  $p = q = 1$  диагональная модель записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix},$$

где

$$\sigma_{ij,t} = c_i + a_{ii}\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1} + g_{ii}\sigma_{ij,t-1}.$$

Таким образом,  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $\Sigma^{(t)}$  зависит от соответствующих  $(i, j)$ -х элементов матриц  $\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1}$  и  $\Sigma^{(t-1)}$ . Это ограничение позволяет снизить количество параметров до  $[n(n+1)/2](1+p+q)$ . Однако такая модель не позволяет обнаруживать эффекты причинности в дисперсии, персистентности и асимметрии.

Следующее упрощение VEC-модели — *скалярная VEC-модель*, в которой  $\mathbf{A}_i = a_i\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{G}_j = g_j\mathbf{U}$ , где  $a_i$  и  $g_j$  — скалярные величины, а  $\mathbf{U}$  — матрица, составленная из единиц.

Условия *стационарности* для VEC(1,1)-модели могут быть получены при помощи представления в виде VARMA(1,1) системы:

или, что то же:

$$\begin{aligned}\eta_t &= c + (\mathbf{A} + \mathbf{G})\eta_{t-1} + (\eta_t - \sigma_t) - \mathbf{G}(\eta_{t-1} - \sigma_{t-1}) \\ &= c + (\mathbf{A} + \mathbf{G})\eta_{t-1} + w_t - \mathbf{G}w_{t-1}.\end{aligned}$$

Процесс  $w_t = \eta_t - \sigma_t$  является мартингалом-разностью, поскольку

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t' | \mathcal{F}_{t-1}) = \Sigma_{\varepsilon_t}(\mathcal{F}_{t-1}) + \mathbf{E}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot \mathbf{E}(\varepsilon_t' | \mathcal{F}_{t-1}).$$

В результате условия стационарности могут быть получены как условия для стационарности ARMA-модели. Таким образом, VEC(1,1)-модель слабостационарна, если собственные значения матрицы  $(\mathbf{A} + \mathbf{G})$  по модулю меньше единицы. В этом случае безусловное среднее для  $\sigma_t$  равно:

$$\mathbf{E}[\sigma_t] = \mathbf{E}[\text{vech}\Sigma^{(t)}] = (\mathbf{I}_{n^*} - \mathbf{A} - \mathbf{G})^{-1}c,$$

где  $n^* = n(n+1)/2$ . Из представленного выше следует, что необходимым и достаточным условием стационарности для диагональной VEC-модели является условие:  $a_{ii} + g_{ii} < 1$  для всех  $i$ .

Другой недостаток этой модели (помимо большого числа параметров) — это ограничения на параметры, которые необходимы для обеспечения того, чтобы  $\Sigma^{(t)}$  была положительно определена (см. [Bauwens et al. (2006)]).

#### 5.2.4. ВЕКК-модели

В работе [Engle, Kroner (1995)] предложена параметризация, которая обеспечивает положительную определенность матрицы ковариаций. ВЕКК( $p, q, K$ )-модель определяется следующим образом:

$$\Sigma^{(t)} = \mathbf{C}^* \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q \mathbf{A}_{jk}^* \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j}' \mathbf{A}_{jk}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p \mathbf{G}_{jk}^* \Sigma^{(t-j)} \mathbf{G}_{jk}^*, \quad (5.25)$$

где  $\mathbf{C}^*$ ,  $\mathbf{A}_{jk}^*$  и  $\mathbf{G}_{jk}^*$  — матрицы размерности  $(n \times n)$ , а  $\mathbf{C}^*$  — верхнетреугольная матрица. Число  $K$  определяет уровень общности модели, которая при больших  $K$  аппроксимирует VEC-модель. Количество параметров ВЕКК(1,1,1)-модели равно  $\frac{n(5n+1)}{2}$ , что значительно меньше, чем количество параметров в VEC(1,1)-модели. Одно из главных преимуществ ВЕКК-моделей состоит в том, что такие модели гарантируют положительную определенность ковариационных матриц.

**Пример 5.3** (ВЕКК(1,1,1)-модель).

При  $p = q = K = 1$  мы имеем:

$$\Sigma^{(t)} = \mathbf{C}^* \mathbf{C}^* + \mathbf{A}_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' \mathbf{A}_{11}^* + \mathbf{G}_{11}^* \Sigma^{(t-1)} \mathbf{G}_{11}^*$$

для двумерного случая (т.е. при  $n = 2$ ) мы имеем:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11t} & \sigma_{21t} \\ \sigma_{21t} & \sigma_{22t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11}^* & 0 \\ c_{21}^* & c_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{21}^* \\ 0 & c_{22}^* \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} & \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Записывая уравнения для элементов ковариационной матрицы, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11t} &= c_{11}^{*2} + a_{11}^{*2}\varepsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11}^*a_{21}^*\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + a_{21}^{*2}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \\ &+ g_{11}^{*2}\sigma_{11,t-1} + 2g_{22}^*g_{21}^{*2}\sigma_{21,t-1} + g_{21}^{*2}\sigma_{22,t-1}; \\ \sigma_{21t} &= c_{11}^*c_{21}^* + a_{11}^*a_{12}^*\varepsilon_{1,t-1}^2 + (a_{11}^*a_{22}^* + a_{21}^*a_{12}^*)\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \\ &+ a_{21}^*a_{22}^*\varepsilon_{2,t-1}^2 + g_{11}^*g_{12}^*\sigma_{11,t-1} + g_{21}^*g_{22}^*\sigma_{22,t-1} + \\ &+ (g_{11}^*g_{22}^* + g_{21}^*g_{12}^*)\sigma_{21,t-1}; \\ \sigma_{22t} &= c_{11}^*c_{22}^* + a_{12}^{*2}\varepsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{12}^*a_{22}^*\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + a_{22}^{*2}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \\ &+ g_{12}^{*2}\sigma_{11,t-1} + 2g_{12}^*g_{22}^*\sigma_{21,t-1} + g_{22}^{*2}\sigma_{22,t-1}. \end{aligned}$$

Теперь мы видим, что ВЕКК(1,1,1)-модель можно интерпретировать как VEC(1,1)-модель с ограничениями. В частности, в терминах обозначений описанных выше VEC-моделей, мы имеем следующие ограничения на параметры:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \sqrt{a_{11}a_{31}}, \\ a_{22} &= \sqrt{a_{11}a_{33}} + \sqrt{a_{13}a_{31}}. \end{aligned}$$

Сравнивая VEC-модель, в которой количество параметров порядка  $n^4$ , отметим, что в ВЕКК-модели имеется параметров порядка  $n^2$ . Однако по сравнению с VEC-моделями интерпретация параметров в ВЕКК-моделях довольно затруднительна.

**Соотношение между ВЕКК- и VEC-моделями.** Рассмотрим соотношения между ВЕКК- и *vech*-параметризациями. Соотношения между параметрами двух моделей может быть найдено при помощи векторизации уравнения (5.25), где для простоты мы предположим  $K = 1$ :

$$vec(\Sigma(t)) = vec(C^*C^*) + \sum_{j=1}^q vec(A_j^* \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' A_j^*) + \sum_{i=1}^p vec(G^* \Sigma^{(t-i)} G^*).$$

где  $\text{vec}(\mathbf{A})$  — оператор, примененный к  $(n \times n)$ -матрице  $\mathbf{A}$  и дающий вектор  $\text{vec}(\mathbf{A})$  размерности  $(n^2 \times 1)$ . Для оператора  $\text{vec}(\cdot)$  выполняется следующее свойство:

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}).$$

Для симметричной  $(n \times n)$ -матрицы  $\mathbf{A}$  вектор  $\text{vech}(\mathbf{A})$  содержит в точности  $\frac{n(n+1)}{2}$  элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , расположенные ниже главной диагонали (включая элементы самой главной диагонали). Существует единственное линейное преобразование, которому отвечает матрица  $\mathbf{D}_n$  размерности  $n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}$ , на основании которого  $\text{vech}(\mathbf{A})$  переходит в  $\text{vec}(\mathbf{A})$ . Эта матрица называется *матрицей дублирования*:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \mathbf{D}_n \text{vech}(\mathbf{A}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}) &= \text{vec}(\mathbf{C}^{*'}\mathbf{C}^*) + \sum_{j=1}^q (\mathbf{A}_j^* \otimes \mathbf{A}_j^*)' \text{vec}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}') + \\ &+ \sum_{j=1}^p \text{vec}(\mathbf{G}_j^* \otimes \mathbf{G}_j^*)' \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{(t-1)}). \end{aligned}$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_n \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}) &= \mathbf{D}_n \text{vech}(\mathbf{C}^{*'}\mathbf{C}^*) + \sum_{j=1}^q (\mathbf{A}_j^* \otimes \mathbf{A}_j^*)' \mathbf{D}_n \text{vech}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}') + \\ &+ \sum_{j=1}^p (\mathbf{G}_j^* \otimes \mathbf{G}_j^*)' \mathbf{D}_n \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}^{(t-1)}). \end{aligned}$$

Если матрица  $\mathbf{D}_N$  полного ранга, то мы можем определить обобщенное обращение матрицы  $\mathbf{D}_N$ :

$$\mathbf{D}_N^+ = (\mathbf{D}_N' \mathbf{D}_N)^{-1} \mathbf{D}_N',$$

т. е.  $\mathbf{D}_N^+$  есть матрица размерности  $\frac{n(n+1)}{2} \times n^2$ , причем  $\mathbf{D}_N^+ \mathbf{D}_N = \mathbf{I}_N$ . В результате, умножая на  $\mathbf{D}_N^+$ , получим:

$$\begin{aligned} \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}) &= \text{vech}(\mathbf{C}^{*'}\mathbf{C}^*) + \mathbf{D}_N^+ \left( \sum_{j=1}^q (\mathbf{A}_j^* \otimes \mathbf{A}_j^*)' \right) \mathbf{D}_n \text{vech}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}') + \\ &+ \mathbf{D}_N^+ \left( \sum_{j=1}^p (\mathbf{G}_j^* \otimes \mathbf{G}_j^*)' \right) \mathbf{D}_n \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}^{(t-1)}). \end{aligned}$$

Одним из следствий этого результата является тот факт, что *vech*-модель для BEKK-модели является единственной. Переход от *vech*-модели к BEKK-модели не определен единственным образом, поскольку для заданного  $\mathbf{A}_1$  выбор  $\mathbf{A}_1^*$  не единственен. Это можно подтвердить тем, что  $(\mathbf{A}_i^* \otimes \mathbf{A}_i^*) = (-\mathbf{A}_i^* \otimes -\mathbf{A}_i^*)$ . При этом  $\mathbf{A}_i = \mathbf{D}_N^+ (\mathbf{A}_i^* \otimes \mathbf{A}_i^*)' \mathbf{D}_N$  единственно, а выбор  $\mathbf{A}_i^*$  не единственен. Можно также показать, что все положительно-определенные диагональные *vech*-модели могут быть записаны в виде BEKK-модели.

**Условия стационарности для BEKK(1,1,1)-модели.** Для BEKK(1,1,1)-модели имеем:  $\Sigma^{(t)} = \Omega + \mathbf{A}^* \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}' \mathbf{A}^* + \mathbf{G}^* \Sigma^{(t-1)} \mathbf{G}^*$ . Соответственно BEKK(1,1,1)-модель может быть записана в виде VEC-модели следующим образом:

$$vec(\Sigma^{(t)}) = vech(\mathbf{C}^* \mathbf{C}^*) + (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^*)' vec(\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}') + (\mathbf{G}^* \otimes \mathbf{G}^*)' vec(\Sigma^{(t-1)}).$$

Таким образом, BEKK-модель будет слабостационарной, если собственные значения матрицы  $(\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^*) + (\mathbf{G}^* \otimes \mathbf{G}^*)$  по модулю меньше единицы. Если это условие выполнено, безусловное среднее для  $vec(\Sigma^{(t)})$  дается выражением:

$$\mathbf{E}[vec(\Sigma^{(t)})] = (\mathbf{I}_{n^2} - (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^*)' - (\mathbf{G}^* \otimes \mathbf{G}^*)')^{-1} vech(\mathbf{C}^* \mathbf{C}^*).$$

Наконец, для диагональной BEKK-модели необходимое и достаточное условие для слабой стационарности имеет вид:  $a_{ii}^2 + g_{ii}^2 < 1$ .

### 5.2.5. Факторная GARCH-модель

Факторную GARCH-модель, введенную в работе [Engle et al. (1990)], можно рассматривать в качестве альтернативы для BEKK-модели. Предположим, что процесс  $Y_t$ , размерность которого  $(n \times 1)$ , имеет факторную структуру с  $K$  факторами  $\mathbf{f}_t$  и с не зависящей от времени матрицей нагрузок  $\mathbf{B}$  размерности  $(n \times K)$ :

$$Y_t = \mathbf{B} \mathbf{f}_t + \epsilon_t.$$

Предположим, что ошибки  $\epsilon_t$  имеют условную (при заданном  $\mathcal{F}_{t-1}$ ) ковариационную матрицу  $\Psi$ , которая постоянна во времени и положительно полуопределена, а общие факторы характеризуются следующим:

$$\mathbf{E}(\mathbf{f}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{f}_{t-k} \mathbf{f}_t' | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{\Lambda}_t,$$

где  $\mathbf{\Lambda}_t = diag(\lambda_t^{(1)}, \dots, \lambda_t^{(K)})$  и положительно определена. Информационное множество  $\mathcal{F}_{t-1}$  определяется в данном случае значениями  $Y_s$  для  $s < t$ .

$\mathbf{f}_{t-1}, \dots, Y_1, \mathbf{f}_1\}$ . Также предположим, что  $\mathbf{E}(\mathbf{f}_t \varepsilon_t') = \mathbf{0}$ . Условная ковариационная матрица для  $Y_t$  равна:

$$\mathbf{E}(Y_t Y_t' | \mathcal{F}_{t-1}) = \Sigma^{(t)} = \Psi + \mathbf{V} \Lambda_t \mathbf{V}' = \Psi + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \lambda_t^{(k)},$$

где  $\beta_k$  обозначает  $k$ -й столбец матрицы  $\mathbf{V}$ . Таким образом, прогноз дисперсий и ковариаций портфеля активов основан на прогнозах  $K$ -статистик.

Введем веса  $\phi_k = (\phi_{k1} \phi_{k2} \dots \phi_{kn})'$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , — удовлетворяющие условиям

$$\phi_k' \beta_j = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n \phi_{ki} = 1.$$

Тогда существует факторное представление портфелей вида

$$\mathbf{r}_t = \Phi' \cdot Y_t,$$

где  $(K \times n)$ -матрица  $\Phi$  составлена из столбцов  $\phi_1, \dots, \phi_K$ , а компонентами вектора-столбца  $\mathbf{r}_t$  являются числа  $r_{kt} = \phi_k' \cdot Y_t$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ).

Условная дисперсия  $r_{kt}$  равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(r_{kt} | \mathcal{F}_{t-1}) &= \phi_k' \mathbf{E}(Y_t Y_t' | \mathcal{F}_{t-1}) \phi_k = \phi_k' \Sigma_t \phi_k = \\ &= \phi_k' (\Psi + \mathbf{V} \Lambda_t \mathbf{V}') \phi_k = \\ &= \psi_k + \lambda_{kt}, \end{aligned}$$

где  $\psi_k = \phi_k' \Psi \phi_k$ . Для того чтобы оценить эту модель, необходимо параметризовать зависимость  $\lambda_t^{(k)}$  от исторической информации. С этой целью введем параметры  $\theta_{kt}$ :

$$\theta_{kt} \equiv \phi_k' \Sigma^{(t)} \phi_k = \mathbf{D}(r_{kt} | \mathcal{F}_{t-1}) = \psi_k + \lambda_t^{(k)}.$$

В результате мы получим:

$$\sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \theta_{kt} = \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \psi_k + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \lambda_t^{(k)};$$

$$\sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \lambda_t^{(k)} = \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \theta_{kt} - \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \psi_k;$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(t)} &= \Psi + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \lambda_t^{(k)} = \Psi + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \theta_{kt} - \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \psi_k = \\ &= \Psi^* + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \theta_{kt},\end{aligned}$$

где  $\Psi^* = \left( \Psi - \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \psi_k \right)$ . Сделаем наиболее простое предположение, состоящее в том, что существует множество фактор-портфелей, имеющих одномерное GARCH(1,1)-представление. Условная дисперсия  $\theta_{kt}$  отвечает GARCH(1,1)-процессу:

$$\begin{aligned}\theta_{kt} &= \omega_k + \alpha_k (\phi_k' \varepsilon_{t-1})^2 + \gamma_k \mathbf{E}(r_{k,t-1}^2 | \mathcal{F}_{t-2}) = \\ &= \omega_k + \alpha_k \phi_k' (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') \phi_k + \gamma_k \mathbf{E}[(\phi_k' Y_{t-1})(\phi_k' Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-2}] = \\ &= \omega_k + \alpha_k \phi_k' (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') \phi_k + \gamma_k [\phi_k' \mathbf{E}(Y_{t-1} Y_{t-1}') | \mathcal{F}_{t-2}] \phi_k = \\ &= \omega_k + \alpha_k \phi_k' (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') \phi_k + \gamma_k [\phi_k' \Sigma^{(t-1)} \phi_k].\end{aligned}$$

Тогда условная ковариационная матрица для  $Y_t$  может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}\Sigma^{(t)} &= \Psi^* + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \theta_{kt} = \\ &= \Psi^* + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \left\{ \omega_k + \alpha_k [\phi_k' (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') \phi_k] + \gamma_k [\phi_k' \Sigma^{(t-1)} \phi_k] \right\} = \\ &= \left( \Psi^* + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \omega_k \right) + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \left\{ \alpha_k [\phi_k' (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') \phi_k] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_k [\phi_k' \Sigma^{(t-1)} \phi_k] \right\}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получим:

$$\Sigma^{(t)} = \Gamma + \sum_{k=1}^K \alpha_k [\beta_k \phi_k' (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') \phi_k \beta_k'] + \sum_{k=1}^K \gamma_k [\beta_k \phi_k' \Sigma^{(t-1)} \phi_k \beta_k'].$$

где  $\Gamma = \Psi^* + \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \omega_k$ . Следовательно, факторная GARCH-модель может рассматриваться как частный случай ВЕКК-параметризации. Оценка факторной GARCH-модели осуществляется методом максимального правдоподобия. Часто удобно предполагать, что фактор-портфели известны априори.



### 5.2.6. Ортогональные модели

Ортогональные модели представляют собой частный случай факторных моделей. Они основаны на предположении, состоящем в том, что исходные наблюдения являются реализациями случайных векторов, представимых в виде линейной комбинации набора независимых компонент. Компоненты линейной комбинации — главные компоненты вектор-наблюдений. В ортогональной GARCH-модели, предложенной в работах [Alexander, Chibumba (1997)] и [Alexander (2001)], меняющаяся во времени ковариационная матрица  $\Sigma_t$  размерности  $(n \times n)$  сгенерирована  $m$  одномерными GARCH-моделями, где  $m$  ( $m \leq n$ ) определяется с использованием метода главных компонент (см., например, [Айвазян (2010), п. ПЗ.4]).

Возьмем диагональную матрицу  $\mathbf{V}$ , которая составлена из эмпирических оценок дисперсий для компонент  $Y_t$ , т. е.

$$\mathbf{V} = \text{diag}\{s_1^2, \dots, s_n^2\}.$$

Будем полагать в дальнейшем, что  $Y_t$  уже центрированы, т. е.  $\mathbf{E}Y_t = \mathbf{0}$ . Тогда стандартизированные доходности  $\mathbf{u}_t$  равны:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{V}^{-1/2}Y_t, \quad \mathbf{E}[\mathbf{u}_t] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'] = \mathbf{R}.$$

**Ортогональная GARCH-модель (OGARCH  $(p; q; m)$ ).** В этой модели выборочная корреляционная матрица может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}',$$

где  $\mathbf{P}$  — ортонормированная матрица, строками которой являются собственные вектора матрицы  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$  — диагональная матрица, составленная из собственных значений этой матрицы, отранжированных по убыванию:

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

при этом  $\mathbf{P}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}_n.$$

Следовательно,  $\mathbf{R}$  может быть представлена как:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}' = \mathbf{L}\mathbf{L}', \quad \text{где } \mathbf{L} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}.$$

Вектор главных компонент для  $\mathbf{u}_t$  равен

Безусловная ковариационная матрица равна единичной матрице, размерность которой  $(n \times n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{f}_t \mathbf{f}_t'] &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}[\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t'] \mathbf{L}^{-1'} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}^{-1'} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{P}' \mathbf{L}^{-1'} = \\ &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}' \mathbf{L}'^{-1} = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что условная ковариационная матрица для  $\mathbf{f}_t$  является диагональной  $\mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{f}_t \mathbf{f}_t'] = \mathbf{Q}_t$ , где каждый диагональный элемент  $q_{ii,t}$  отвечает одномерной модели GARCH-типа (см. п. 5.1). При этом:

$$\mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t'] = \mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{L} \mathbf{f}_t \mathbf{f}_t' \mathbf{L}'] = \mathbf{L} \mathbf{Q}_t \mathbf{L}'.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t'] = \mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{V}^{1/2} \mathbf{u}_t \mathbf{u}_t' \mathbf{V}^{1/2}] = \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{L} \mathbf{Q}_t \mathbf{L}' \mathbf{V}^{1/2}.$$

Мы можем работать с ограниченным числом  $m < n$  главных компонент (собственных значений), которые объясняют наибольшую долю суммарной дисперсии исходных данных. В этом случае матрица  $\mathbf{L}^{-1}$  заменяется на матрицу размерности  $(m \times n)$ , равную:

$$\mathbf{L}_m^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{P}_m,$$

где  $\mathbf{P}_m$  — матрица размерности  $(n \times m)$ , состоящая из собственных векторов матрицы  $\mathbf{P}$ , отвечающих  $m$  наибольшим собственным значениям.

Суммируя все вышеизложенное, OGARCH( $p, q, m$ )-модель определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{u}_t = \mathbf{L}_m \mathbf{f}_t, \\ \mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{f}_t] &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}_{t-1}[\mathbf{f}_t \mathbf{f}_t'] &= \mathbf{Q}_t = \text{diag}(\sigma_{f_1,t}^2, \dots, \sigma_{f_m,t}^2), \\ \sigma_{f_i,t}^2 &= \left( 1 - \sum_{l=1}^q \alpha_{il} - \sum_{l=1}^p \beta_{il} \right) + \sum_{l=1}^q \alpha_{il} f_{i,t-l}^2 + \\ &+ \sum_{l=1}^p \beta_{il} \sigma_{f_i,t-l}^2, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

**Обобщенная ортогональная GARCH-модель (GOGARCH-model).** В работе [Van der Weide (2002)] указано, что условие ортогональности, предполагаемое в OGARCH-модели, является весьма ограничительным и возникает вопрос: если существует связь с множеством некоррелированных экономических характеристик, то почему ассоциированная матрица является ортогональной? Таким образом, если мы предположим, что

причем наблюдаемый экономический процесс  $Y_t$  представим в виде линейной комбинации независимых экономических компонент  $\{f_t\}$ , т. е.

$$Y_t = Zf_t,$$

где  $f_t$  — взаимно некоррелированные компоненты, а  $|Z| \neq 0$ . Ненаблюдаемые компоненты нормированы:

$$E[f_t f_t'] = I_n$$

$$V = E[Y_t Y_t'] = Z Z'$$

а от матрицы  $Z$  требуется лишь невырожденность (т. е.  $|Z| \neq 0$ ), но не требуется ортогональности, как это было с матрицей  $L_m$  в OGARCH-модели.

$$V_t = E_{t-1}[Y_t Y_t'] = Z E_{t-1}[f_t f_t'] Z' = Z H_t Z',$$

$$H_t = \text{diag}\{h_{1,t}, \dots, h_{n,t}\},$$

$$h_{i,t} = (1 - \alpha_i - \beta_i) + \alpha_i y_{i,t-i}^2 + \beta_i h_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, n,$$

$$V = E[V_t] = Z H Z', \quad H — \text{диагональная матрица.}$$

Определенная таким образом модель называется обобщенной OGARCH-моделью. Возьмем следующее разложение безусловной ковариационной матрицы  $V$ :

$$V = P \Lambda P',$$

где  $P$  — некоторая ортогональная матрица. Тогда она будет совпадать с  $Z$  только в том случае, когда диагональные элементы матрицы  $H$  различны. Предположим, что  $H = I$ , тогда мы имеем:

$$V = E[V_t] = Z I Z' = Z Z'.$$

Матрица  $Z$  теперь не определена однозначно собственными значениями матрицы  $V$ , поскольку для каждой ортогональной матрицы  $Q$  мы имеем:

$$(ZQ)(ZQ)' = I.$$

Матрица  $Z$  однозначно определена только в том случае, если учитывается информационное условие. С использованием сингулярного разложения мы получим:

$$P \Lambda^{1/2} U_0 = Z.$$

Матрицы  $P$  и  $\Lambda$  определяются  $\frac{n(n-1)}{2}$  и  $n$  параметрами соответственно. Таким образом, для матрицы  $Z$  мы имеем  $n^2$  параметров. Матрицы  $P$  и  $\Lambda$  могут быть оценены с использованием безусловной информации, как если бы они были получены из выборочной ковариационной

матрицы  $V$ , которая имеет  $\frac{n(n+1)}{2}$  параметров. Условная информация необходима для оценки  $U_0$ , для которой мы имеем  $\frac{n(n-1)}{2}$  параметров. OGARCH-модель (когда  $m = n$ ) отвечает случаю, когда  $U = I_n$ .

В целях параметризации матрицы  $U_0$  воспользуемся следующим фактом из линейной алгебры. Каждая  $n$ -мерная ортогональная матрица  $U$  с  $\det(U) = 1$  может быть представлена в виде произведения  $\frac{n(n-1)}{2}$  матриц поворота:

$$U = \prod_{i < j} G_{ij}(\theta_{ij}), \quad -\pi \leq \theta_{ij} \leq \pi,$$

где  $G_{ij}(\theta_{ij})$  представляет поворот плоскости, натянутой на  $i$ -й и  $j$ -й вектора канонического базиса  $\mathbb{R}^n$ , на угол  $\theta_{ij}$ . В компактной записи, при  $n = 3$ , мы имеем:  $U = G_{12}G_{13}G_{23}$ . Параметры  $\theta$  измеряют степень некоррелированности компонент, отображаемых в одном направлении. Для  $\theta = 0$  отображение необратимое, что соответствует зависимости между наблюдаемыми переменными, тогда как при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $Z = I$ , что соответствует тому, что наблюдаемые переменные некоррелированы.

Тогда ортогональная матрица  $U_0$  может быть параметризована при помощи  $(n \times n)$ -матриц поворота.  $G_{ij}(\theta_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} G_{ij}(\theta_{ij}) &= \{g_{ij}\} \\ g_{rr} &= g_{ss} = \cos(\theta_{ij}) \\ g_{ii} &= 1 \quad i = 1, \dots, n \quad i \neq r, s \\ g_{sr} &= -\sin(\theta_{ij}) \\ g_{rs} &= \sin(\theta_{ij}), \end{aligned}$$

а все другие параметры предполагаются нулевыми. Например, в трехмерном случае  $n = 3$ ,

$$G_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{12}) & \sin(\theta_{12}) & 0 \\ -\sin(\theta_{12}) & \cos(\theta_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_{13} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{13}) & 0 & \sin(\theta_{13}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{13}) & 0 & \cos(\theta_{13}) \end{bmatrix},$$

а  $G_{23}$  является блочной с  $\cos(\theta_{23})$  и  $\sin(\theta_{23})$  функциями в правом нижнем углу.  $n(n - 1)/2$  углов поворота являются параметрами, которые необходимо оценить.

Условная корреляционная матрица может быть представлена в следующем виде:

$$R_t = D_t^{-1} V_t D_t^{-1},$$

Например, для  $n = 2$  мы имеем:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix},$$

условная корреляционная матрица равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{V}_t \mathbf{D}_t^{-1} = \\ &= \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{H}_t \mathbf{Z}' \mathbf{D}_t^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} h_{1t}^{-1/2} & 0 \\ 0 & h_{2t}^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1t} & h_{12t} \\ h_{12t} & h_{2t} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1t}^{-1/2} & 0 \\ 0 & h_{2t}^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{\text{Cov}_{t-1}(y_{1t}, y_{2t})}{\sqrt{\text{Var}_{t-1}(y_{1t})} \sqrt{\text{Var}_{t-1}(y_{2t})}} = \frac{h_{1t} \cos(\theta)}{\sqrt{h_{1t}} \sqrt{h_{1t} \cos^2(\theta) + h_{2t} \sin^2(\theta)}} = \\ &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta) + \frac{h_{1t}}{h_{2t}} \sin^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_t \tan^2(\theta)}}, \end{aligned}$$

где  $z_t = \frac{h_{1t}}{h_{2t}}$ .

Обозначим через  $(\alpha', \beta', \theta)'$  вектор-параметры, которые необходимо оценить с использованием условной информации. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \\ \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_n), \\ \theta &= (\theta_1, \dots, \theta_m), \quad m = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Логарифмическая функция правдоподобия для  $t$ -го наблюдения имеет вид:

$$\begin{aligned} l_t &= -\frac{1}{2} (n \log(2\pi) + \log |\mathbf{V}_t| + \mathbf{x}_t' \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{x}_t) = \\ &= -\frac{1}{2} (n \log(2\pi) + \log |\mathbf{Z} \mathbf{H}_t \mathbf{Z}'| + \mathbf{x}_t' (\mathbf{Z} \mathbf{H}_t \mathbf{Z}')^{-1} \mathbf{x}_t) = \\ &= -\frac{1}{2} (n \log(2\pi) + \log |\mathbf{Z} \mathbf{Z}'| + \log |\mathbf{H}_t| + \mathbf{x}_t' (\mathbf{Z} \mathbf{H}_t \mathbf{Z}')^{-1} \mathbf{x}_t), \end{aligned}$$

так что логарифмическая функция правдоподобия для всей обучающей выборки равна  $\log L_T = \sum_t l_t$ . Оценка этой модели осуществляется в

1. Оценим  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{\Lambda}$  из выборочной ковариационной матрицы. Мы получим:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{V}} &= \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{P}}', \\ \mathbf{Z} &= \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{\Lambda}}^{1/2}\mathbf{U}.\end{aligned}$$

2. Оценим вектор-параметры  $(\alpha', \beta', \theta)'$  путем максимизации  $\log L_T(\cdot)$ .

Ортогональные модели вкладываются в факторную GARCH-модель, а значит, и в BEKK-модель. Как следствие, результаты, связанные со стационарностью, безусловными моментами и др. для BEKK-модели, могут быть применены к факторным моделям. В частности, очевидно также, что GOGARCH-модель является ковариационно-стационарной в случае, если  $m$ -образующих одномерных GARCH-процессов одновременно являются стационарными.

### 5.2.7. Модели для условной корреляционной матрицы

В MGARCH-моделях, рассматриваемых до сих пор, спецификация условной ковариационной матрицы производилась в дополнение к спецификации условных дисперсий. Это можно интерпретировать как MGARCH-модели «первого уровня». Ниже мы рассмотрим модели, представляющие собой MGARCH-модели «второго уровня». Такие модели допускают большую гибкость в спецификации дисперсий, поскольку они допускают использование разных спецификаций для каждой из одномерных условных дисперсий: например, GARCH(1,1) может быть спецификацией для одной одномерной условной дисперсии, EGARCH — для другой и т.д. Однако спецификация корреляций менее гибка, при этом накладываются условия положительной определенности для  $\Sigma_t$ , что должно быть учтено в процедуре оценки.

MGARCH-модели «второго уровня» основаны на использовании следующего разложения:

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t \\ \mathbf{D}_t &= \text{diag}(\sigma_{11,t}^{1/2} \dots \sigma_{nn,t}^{1/2}) \\ \mathbf{R}_t &= (\rho_{ij,t}), \quad \rho_{ii,t} = 1,\end{aligned}\tag{5.26}$$

где  $\mathbf{R}_t$  — матрица условных корреляций, размерность которой  $(n \times n)$ , а элементы  $\mathbf{D}_t$ ,  $\sigma_{ii,t}$  — одномерные условные дисперсии, для  $\sigma_{ii,t}^2$  будет выбрана GARCH-спецификация. Таким образом, ковариация равна:

Положительная определенность  $\Sigma_t$  следует из положительной определенности  $R_t$  и положительности каждой  $\sigma_{ii,t}$  для  $i = 1, \dots, n$ .

**Модель с постоянной условной корреляцией (ССС-модель).** СССР-модель, представленная в работе [Bollerslev (1990)], определяется следующим образом:

$$\Sigma_t = D_t R D_t = (\rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii,t} \sigma_{jj,t}}),$$

где  $R_t = R = (\rho_{ij})$  и  $\rho_{ii} = 1$ . Таким образом, условная корреляционная матрица постоянна. Следовательно,

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii,t} \sigma_{jj,t}} \quad i \neq j,$$

а значит, динамики ковариаций зависят только от динамик условных дисперсий. Число параметров корреляционной матрицы, которые должны быть оценены в дополнение к параметрам GARCH-моделей, равно  $n(n-1)/2$ .

Каждый элемент последовательности условных ковариационных матриц  $\{\Sigma_t\}$  является положительно определенным почти наверное для всех  $t$  при условии, что диагональные элементы матрицы  $D_t$  также положительны, а условная корреляционная матрица  $R$  является положительно-определенной.

**Модель с динамической условной корреляцией (DCC-модель).** DCC-модель впервые предложена в работе [Tse, Tsui (2002)], которую иногда называют  $DCC_T(M)$ -моделью. Она определяется в соответствии с (5.26), где  $\sigma_{ii,t}$  специфицируется при помощи одномерной GARCH-модели, а  $R_t$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R_t &= (1 - \theta_1 - \theta_2)R + \theta_1 \Psi_{t-1} + \theta_2 R_{t-1}, \\ \psi_{ij,t-1} &= \frac{\sum_{m=1}^M u_{i,t-m} u_{j,t-m}}{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^M u_{i,t-m}^2 u_{j,t-m}^2\right)}}, \\ u_{i,t} &= \varepsilon_{i,t} / \sqrt{\sigma_{ii,t}^2}, \end{aligned}$$

где  $u_{i,t}$  — стандартизированные (одномерные) *остатки*, полученные в предположении справедливости одномерной GARCH-модели для условной дисперсии. Таким образом, условная корреляционная матрица имеет в некотором смысле ARMA-структуру. Кроме того, отметим, что  $u_t$  не совпадают с  $z_t$ .

Параметры модели должны удовлетворять следующим ограничениям:  $\theta_1, \theta_2 > 0$ ,  $\theta_1 + \theta_2 < 1$ ,  $R$  — постоянна. Таким образом,  $R_t$  представляет собой взвешенное среднее долгосрочной (безусловной) корреляции

условной корреляции для последнего периода и шока, также рассчитанного для последнего периода. Сумма весов  $(1 - \theta_1 - \theta_2)$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_1$  равна единице.

Поскольку  $\Psi_{t-1}$  — это выборочная корреляционная матрица, то условие ее положительной определенности требует, чтобы число наблюдений превышало число активов (размерность системы), что означает  $T > n$ .

Более того, по построению мы имеем, что  $\Psi_{ii,t-1} = 1, \forall i$ , что обеспечивает равенство корреляции единице при  $i = j$ .

Положительная определенность  $\mathbf{R}_t$  обеспечивается следующими условиями:  $\theta_1, \theta_2 > 0$  при условии, что матрицы  $\Psi_{t-1}$  и  $\mathbf{R}_{t-1}$  также положительно-определены для всех  $t$ . Для  $\Psi_{t-1}$  это обеспечивается тем, что  $M > n$ .

Недостатки DCC-модели в сравнении с VEC- и BEKK-моделями возникают оттого, что в DCC-модели только два параметра  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отвечающих за динамику всех  $n(n - 1)/2$  корреляционных последовательностей. CCC-модель можно рассматривать как DCC-модель с ограничениями, когда  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Тест отношения правдоподобия для тестирования статистической значимости ограничений. Значит, для тестирования нулевой гипотезы о неизменности во времени условной корреляционной матрицы против альтернативы о наличии меняющихся во времени условных корреляций может быть использован тест отношения правдоподобия.

В качестве альтернативы в работе [Engle (2002)] предлагается другая DCC-модель, которую обычно называют  $DCC_E(S, L)$ -моделью. Эта модель определяется в соответствии с (5.26), где  $\mathbf{R}_t$  определено в следующем образом,

$$\mathbf{R}_t = (\text{diag} \mathbf{Q}_t)^{-1/2} \mathbf{Q}_t (\text{diag} \mathbf{Q}_t)^{-1/2}. \quad (5.27)$$

При этом симметрическая положительно-определенная матрица  $\mathbf{Q}_t$ , размерность которой  $(n \times n)$ , имеет вид:

$$\mathbf{Q}_t = \left( 1 - \sum_{l=1}^L \theta_{1,l} - \sum_{s=1}^S \theta_{2,s} \right) \bar{\mathbf{Q}} + \sum_{l=1}^L \theta_{1,l} u_{t-l} u'_{t-l} + \sum_{s=1}^S \theta_{2,s} \mathbf{Q}_{t-s},$$

где  $u_{it} = \varepsilon_{it} / \sqrt{\sigma_{ii,t}^2}$  как и прежде,  $\bar{\mathbf{Q}}$  — это безусловная ковариационная матрица для  $u_t$ , размерность которой  $(n \times n)$ ,  $\theta_{1,l} (\geq 0)$  и  $\theta_{2,s} (\geq 0)$  — скалярные параметры, удовлетворяющие:  $\sum_{l=1}^L \theta_{1,l} + \sum_{s=1}^S \theta_{2,s} < 1$ , при условии  $\mathbf{Q}_t > 0$  и  $\mathbf{R}_t > 0$ . Если  $\theta_{1,l} = \theta_{2,s} = 0, \forall l, s$  и  $\bar{q}_{ii} = 1$ , то мы получим CCC-модель. Таким образом,  $\mathbf{Q}_t$  — ковариационная матрица для



$u_t$  (по построению  $q_{ii,t}$  не равны единице). При помощи преобразования (5.27) мы получим корреляционную матрицу.

Отличие  $DCC_E(S, L)$ -модели от  $DCC$ -модели из [Tse, Tsui (2002)] в том, что в первой из них мы сначала моделируем  $Q_t$ , которая не является корреляционной матрицей, а затем строим корреляционную матрицу  $R_t$ .

Для того чтобы показать более явно разницу между двумя моделями  $DCC_T$  и  $DCC_E$ , запишем формулу для коэффициентов корреляции в двумерном случае. Для  $DCC_T(M)$ -модели мы имеем:

$$\rho_{12,t} = (1 - \theta_1 - \theta_2)\rho_{12} + \theta_2\rho_{12,t-1} + \theta_1 \frac{\sum_{m=1}^M u_{1,t-m}u_{2,t-m}}{\sqrt{(\sum_{m=1}^M u_{1,t-m}^2)(\sum_{h=1}^M u_{2,t-m}^2)}},$$

для модели  $DCC_E(1, 1)$ -модели:

$$\rho_{12,t} = \frac{(1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{q}_{12} + \theta_1 u_{1,t-1}u_{2,t-1} + \theta_2 q_{12,t-1}}{\sqrt{((1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{q}_{11} + \theta_1 u_{1,t-1}^2 + \theta_2 q_{11,t-1})(1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{q}_{22} + \theta_1 u_{2,t-1}^2 + \theta_2 q_{22,t-1}}}.$$

Корреляция в  $DCC_T(M)$ -модели специфицирована как взвешенная сумма корреляций. В  $DCC_E(1, 1)$ -модели напрямую это не делается, а вместо этого корреляция конструируется с использованием  $u_t$ : матрица  $Q_t$  моделируется аналогично GARCH-модели, а затем осуществляется преобразование к корреляционной матрице.

### 5.2.8. Оценивание MGARCH-моделей

Оценивание MGARCH-модели обычно производится при помощи метода максимального правдоподобия. Это требует задания плотности нормированных остатков  $z_t$  в уравнении MGARCH-модели

$$Y_t = \mathbf{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] + (\Sigma^{(t)}(\theta))^{1/2} \cdot z_t.$$

Обозначим эту плотность через  $g(z_t; \eta)$ , где  $\eta$  — векторный параметр, который должен быть оценен вместе с другими параметрами  $\theta$  MGARCH-модели. Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$\ln L(\theta, \eta) = \sum_{t=1}^T \ln f(Y_t | \theta, \eta, \mathcal{F}_{t-1}),$$

где  $f(Y_t | \theta, \eta, \mathcal{F}_{t-1})$  — плотность распределения процесса  $Y_t$ . Отметим, что для того, чтобы получить плотность  $Y_t$ , зная плотность  $z_t$ , нам необходимо воспользоваться правилом преобразования функций плотности.

при преобразовании случайных величин (см., например, формулу (4.11) в [Айвазян, Мхитарян (2001)]).

В нашем случае мы имеем плотность для  $z_t$ , обозначенную через  $g(z_t; \eta)$ . Функция  $Y_t = \mu_t + (\Sigma^{(t)}(\theta))^{\frac{1}{2}} \cdot z_t$  имеет обратную  $z_t = (\Sigma^{(t)} \times \times(\theta))^{-\frac{1}{2}}(Y_t - \mu_t)$ . Якобиан этой обратной функции равен  $J(z_t, Y_t) = = \det((\Sigma^{(t)}(\theta))^{-\frac{1}{2}})$ . Применяя правило преобразования функции плотности при преобразовании случайных величин, получим:

$$f(Y_t | \theta, \eta, \mathcal{F}_{t-1}) = \left| \det \left( (\Sigma^{(t)})^{-\frac{1}{2}} \right) \right| \cdot g \left( (\Sigma^{(t)})^{-\frac{1}{2}} \cdot (Y_t - \mu_t); \eta \right),$$

где  $\Sigma^{(t)} = \Sigma^{(t)}(\theta)$  и  $\mu_t = \mu_t(\theta)$ , т. е. условное среднее и условная ковариационная матрица являются функциями от вектор-параметра  $\theta$ .

**Гауссовское правдоподобие.** Если предположить, что  $z_t \in N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ , тогда функция логарифмического правдоподобия наблюдений  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) = & -\frac{Tn}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |\Sigma^{(t)}| - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu_t)' (\Sigma^{(t)})^{-1} (Y_t - \mu_t). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Максимизируя  $\ln L(\theta)$ , мы получим оценку квазикаксимального правдоподобия, если  $\mu_t$  и  $\Sigma_t$  правильно специфицированы, даже если фактическая плотность для  $z_t$  не является  $(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ -нормальной.

**Оценка квазикаксимального правдоподобия.** Предположение об условной нормальности может быть несколько ограничительным. Кроме того, симметричность, свойственную нормальному распределению, весьма трудно оправдать. Более того, хвосты фактических условных распределений часто оказываются «тяжелее» по сравнению с хвостами нормального распределения.

Пусть  $\{(Y_t, X_t) : t = 1, 2, \dots\}$  — последовательность наблюдений случайных векторов, где  $Y_t$  имеет размерность  $(n \times 1)$ , а  $X_t$  имеет размерность  $(L \times 1)$ . Вектор  $Y_t$  включает в себя эндогенные переменные, а  $X_t$  состоит из экзогенных переменных. Пусть

$$w_t = (X_t; Y_{t-1}, X_{t-1}; \dots; Y_1, X_1).$$

Условные среднее и ковариационная матрица параметризованы при помощи конечномерного вектора  $\theta$ :

$$\{\Sigma^{(t)}(w_t, \theta), \theta \in \Theta\},$$

где  $\Theta \subset R^P$ , а  $\mu_t$  и  $\Sigma^{(t)}$  — детерминированные и известные функции от  $w_t$  и  $\theta$ . Процедуры оценивания в большинстве случаев дают корректный результат в предположении справедливости нулевой гипотезы, состоящей в том, что первые два условных момента правильно специфицированы, т. е. при некотором  $\theta_0 \in \Theta$  справедливо следующее:

$$\mathbf{E}(Y_t | w_t) = \mu_t(w_t, \theta_0),$$

$$\mathbf{V}(Y_t | w_t) = \Sigma^{(t)}(w_t, \theta_0) \quad t = 1, 2, \dots$$

Достаточно часто для оценки  $\theta_0$  используется процедура, основанная на максимизации функции правдоподобия, которая построена в предположении условной многомерной нормальности случайных векторов  $(Y_t | w_t)$ .

Подход, изложенный ниже, аналогичен, но не основан на предположении о том, что условное распределение для  $Y_t$  является нормальным распределением.

Для наблюдения в момент времени  $t$  квазиусловное логарифмическое правдоподобие определяется выражением:

$$l_t(\theta; Y_t, w_t) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma^{(t)}(w_t, \theta)| - \\ - \frac{1}{2} (Y_t - \mu_t(w_t, \theta))' (\Sigma^{(t)}(w_t, \theta))^{-1} (Y_t - \mu_t(w_t, \theta)).$$

Обозначим через  $\varepsilon_t(Y_t, w_t, \theta) = Y_t - \mu_t(w_t, \theta)$  остаток в момент времени  $t$ . Тогда логарифмическая функция правдоподобия равна:

$$\ln L_T(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta),$$

где

$$l_t(\theta) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Sigma_t(\theta)| - \frac{1}{2} \varepsilon_t'(\theta) (\Sigma^{(t)}(\theta))^{-1} \varepsilon_t(\theta). \quad (5.29)$$

Если  $\mu_t(w_t, \theta)$  и  $\Sigma^{(t)}(\theta) = \Sigma^{(t)}(w_t, \theta)$  дифференцируемы по  $\theta$  и если  $\Sigma^{(t)}(\theta)$  является почти наверное невырожденной матрицей для всех  $\theta \in \Theta$ , тогда, дифференцируя (5.29) по  $\theta$ , получим:

$$s_t(\theta)' = \nabla_{\theta} l_t(\theta)' - \nabla_{\theta} \mu_t(\theta)' (\Sigma^{(t)}(\theta))^{-1} \varepsilon_t(\theta) + \\ + \frac{1}{2} \nabla_{\theta} \left( \Sigma^{(t)}(\theta) \right)' \left[ (\Sigma^{(t)}(\theta))^{-1} \otimes (\Sigma^{(t)}(\theta))^{-1} \right] \times$$

где

$\nabla_{\theta} \mu_t(\theta)$  — матрица размерности  $(n \times P)$ ,

а

$\nabla_{\theta} \Sigma^{(t)}(\theta)$  — матрица размерности  $(n^2 \times P)$ .

Если первые два условных момента правильно специфицированы, то вектор ошибок равен  $\varepsilon_t^0 \equiv \varepsilon_t(\theta_0) = Y_t - \mu_t(w_t, \theta_0)$ , так что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varepsilon_t^0 | w_t) &= 0, \\ \mathbf{E}(\varepsilon_t^0 \varepsilon_t^{0'} | w_t) &= \Sigma^{(t)}(w_t, \theta_0). \end{aligned}$$

При правильной спецификации первых двух условных моментов для  $Y_t$ , при заданном  $w_t$ , мы имеем:

$$\mathbf{E}[s_t(\theta_0) | w_t] = \mathbf{0}.$$

Следовательно, значение  $s_t(\theta)$  при фактическом значении параметра  $\theta$  представляет собой *вектор мартингал-разности* относительно  $\sigma$ -алгебры  $\{\sigma(y_t, w_t) : t = 1, 2, \dots\}$ . Этот результат может быть использован для того, чтобы установить *слабую состоятельность оценки квазимаксимального правдоподобия* (QMLE). Для *надежности выводов* нам также необходимо выражение для гессиана  $h_t(\theta)$  для  $l_t(\theta)$ . Определим следующую  $P \times P$ -матрицу:

$$a_t(\theta_0) = -\mathbf{E}[\nabla_{\theta} s_t(\theta_0) | w_t] = \mathbf{E}[-h_t(\theta_0) | w_t];$$

$$\begin{aligned} a_t(\theta_0) &= \nabla_{\theta} \mu_t(\theta_0)' (\Sigma^{(t)}(\theta_0))^{-1} \nabla_{\theta} \mu_t(\theta_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla_{\theta} \Sigma^{(t)}(\theta_0)' [(\Sigma^{(t)}(\theta_0))^{-1} \otimes (\Sigma^{(t)}(\theta_0))^{-1}] \nabla_{\theta} \Sigma^{(t)}(\theta_0). \end{aligned}$$

В предположении нормальности матрица  $a_t(\theta_0)$  — условная информационная матрица. Однако, если  $Y_t$  не подчиняется условному нормальному распределению, то ковариационная матрица вектора-строки  $s_t(\theta)$  ( $\mathbf{V}[s_t(\theta) | w_t]$ ) не равна  $a_t(\theta_0)$ .

QML-оценка имеет следующие свойства:

$$[\mathbf{A}_T^{0-1} \mathbf{B}_T^0 \mathbf{A}_T^{0-1}]^{-1/2} \sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_P),$$

где

$$\mathbf{A}_T^0 \equiv -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{E}[h_t(\theta_0)] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{E}[a_t(\theta_0)]$$

и

$$\mathbf{V}_T^0 \equiv \mathbf{V} \left[ T^{-1/2} s_T(\theta_0) \right] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{E} \left[ s_t(\theta_0)' s_t(\theta_0) \right].$$

В дополнение:

$$\widehat{\mathbf{A}}_T - \mathbf{A}_T^0 \xrightarrow{p} \mathbf{0}$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_T - \mathbf{B}_T^0 \xrightarrow{p} \mathbf{0}.$$

Матрица  $\widehat{\mathbf{A}}_T^{-1} \widehat{\mathbf{B}}_T \widehat{\mathbf{A}}_T^{-1}$  представляет собой состоятельную оценку асимптотической ковариационной матрицы вектора  $\sqrt{T} (\widehat{\theta}_T - \theta_0)$ . При этом асимптотически по  $T \rightarrow \infty$

$$\widehat{\theta}_T \in N \left( \theta; \widehat{\mathbf{A}}_T^{-1} \widehat{\mathbf{B}}_T \widehat{\mathbf{A}}_T^{-1} / T \right).$$

В условиях нормальности  $Y_t$  оценка ковариационной матрицы для  $\widehat{\theta}_T$  может быть приближенно вычислена как  $\widehat{\mathbf{A}}_T^{-1} / T$  (форма гессiana) или как  $\widehat{\mathbf{B}}_T^{-1} / T$  (внешнее произведение градиентных форм).

Вычисление статистики, отвечающей *тесту Вальда*, довольно трудоемко. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : r(\theta_0) = 0,$$

где  $r : \Theta \rightarrow \mathfrak{R}^Q$  является непрерывно-дифференцируемой на  $\text{int}(\Theta)$  (внутренней части области  $\Theta$ ) и  $Q < P$ . Пусть  $(Q \times P)$ -матрица

$$\mathbf{R}(\theta) = \nabla_{\theta} r(\theta) -$$

градиент функции  $r(\cdot)$  на  $\text{int}(\Theta)$ . Если  $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$  и  $\text{rank}(\mathbf{R}(\theta_0)) = Q$ , тогда статистика Вальда имеет вид:

$$\xi_W = \text{Tr} \left( \widehat{\theta}_T \right)' \left[ \mathbf{R} \left( \widehat{\theta}_T \right) \widehat{\mathbf{A}}_T^{-1} \widehat{\mathbf{B}}_T \widehat{\mathbf{A}}_T^{-1} \mathbf{R} \left( \widehat{\theta}_T \right) \right]^{-1} r \left( \widehat{\theta}_T \right) \xrightarrow{d} \chi^2(Q).$$

Таким образом, при большом числе наблюдений и при справедливости нулевой гипотезы распределение статистики Вальда стремится к  $\chi^2(Q)$ -распределению.

**Двухшаговая оценка ССС- и DCC- моделей.** Если мы учтем соотношение  $\Sigma_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$  в гауссовской логарифмической функции правдоподобия (5.28) и проигнорируем константную часть, которая не влияет на оценки параметров, то получим:

$$\ln L(\theta) \sim -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \log |\mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t| + u_t' \mathbf{R}_t^{-1} u_t \right)$$

где  $u_t = \mathbf{D}_t^{-1}(Y_t - \mu_t)$ , так что  $u_t' \mathbf{R}_t^{-1} u_t = (Y_t - \mu_t)' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} (Y_t - \mu_t)$ .  
 Таким образом,

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &\sim -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |\mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t| + u_t' \mathbf{R}_t^{-1} u_t) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T 2 \log |\mathbf{D}_t| + u_t' u_t}_{\ln L(\theta_1^*)} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |\mathbf{R}_t| + u_t' \mathbf{R}_t^{-1} u_t - u_t' u_t)}_{\ln L(\theta_2^* | \theta_1^*)}, \end{aligned}$$

где  $\theta_1^*$  — параметры условных дисперсий  $\mathbf{D}_t$ , а  $\theta_2^*$  — параметры условных корреляций  $\mathbf{R}_t$ . В результате логарифмическую функцию правдоподобия можно разложить следующим образом:

$$\ln L(\theta) = \ln L(\theta_1, \theta_2) = \ln L(\theta_1^*) + \ln L(\theta_2^* | \theta_1^*).$$

Это разложение позволяет использовать двухшаговую процедуру для оценки DCC-модели, поскольку вначале мы можем оценить модели для условных дисперсий, а затем, используя полученные для них оценки, максимизировать вторую часть функции лог-правдоподобия, которая включает параметры, необходимые для спецификации условных корреляций.

Опишем более формально упомянутую выше двухшаговую процедуру:

Шаг 1. Оценим  $\theta_1^*$  как:

$$\theta_1^* = \operatorname{argmax} \ln L(\theta_1^*).$$

На этом шаге мы оцениваем одномерные GARCH-модели для каждой условной дисперсии в отдельности.

Шаг 2. Оценим  $\theta_2^*$  как:

$$\theta_2^* = \operatorname{argmax} \ln L(\theta_2^* | \theta_1^*).$$

На этом шаге используются оценки, полученные на первом шаге.

Эти оценки являются состоятельными, но не являются асимптотически эффективными, поскольку некоторая информация об  $\theta_1^*$  теряется на первом шаге. Более того, ковариационная матрица оценки  $\theta_2^*$  должна быть скорректирована с учетом процедуры оценки на первом шаге (см. [Newey, McFadden, (1994)] и [Engle (2002)]).  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

## 5.2.9. Эмпирические приложения в статистических пакетах Eviews и R

### 1) Диагональная VEC(1,1)-модель.

Мы рассмотрим дневные цены закрытия для акций четырех российских компаний (Газпром, Лукойл, РБК, Сбербанк) за 2003–2007 гг. (рис. 5.8):

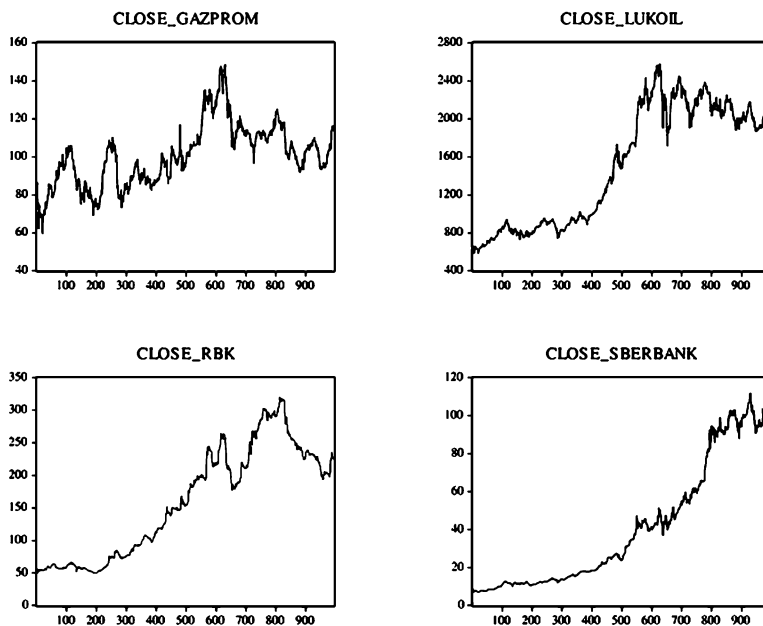


Рис. 5.8. Газпром, Лукойл, РБК, Сбербанк — дневные цены закрытия (2003–2007)

Сначала мы рассмотрим диагональную VEC-модель, описанную ниже с использованием *EViews System Representation* и реализованную в шестой версии Eviews (рис. 5.9, табл. 5.5 и 5.6).

Таблица 5.5. Спецификация диагональной VEC(1,1)-модели — многомерное распределение Стьюдента

<b>Variance-Covariance Representation:</b>	
$GARCH = M + A1.*RESID(-1)*RESID(-1)' + B1.*GARCH(-1)$	
<b>Variance and Covariance Equations:</b>	
$GARCH1 = M(1,1) + A1(1,1)*RESID1(-1)^2 + B1(1,1)*GARCH1(-1)$	
$GARCH2 = M(2,2) + A1(2,2)*RESID2(-1)^2 + B1(2,2)*GARCH2(-1)$	
$GARCH3 = M(3,3) + A1(3,3)*RESID3(-1)^2 + B1(3,3)*GARCH3(-1)$	
$GARCH4 = M(4,4) + A1(4,4)*RESID4(-1)^2 + B1(4,4)*GARCH4(-1)$	
$COV1\_2 = M(1,2) + A1(1,2)*RESID1(-1)*RESID2(-1) + B1(1,2)*COV1\_2(-1)$	
$COV1\_3 = M(1,3) + A1(1,3)*RESID1(-1)*RESID3(-1) + B1(1,3)*COV1\_3(-1)$	
$COV1\_4 = M(1,4) + A1(1,4)*RESID1(-1)*RESID4(-1) + B1(1,4)*COV1\_4(-1)$	
$COV2\_3 = M(2,3) + A1(2,3)*RESID2(-1)*RESID3(-1) + B1(2,3)*COV2\_3(-1)$	
$COV2\_4 = M(2,4) + A1(2,4)*RESID2(-1)*RESID4(-1) + B1(2,4)*COV2\_4(-1)$	
$COV3\_4 = M(3,4) + A1(3,4)*RESID3(-1)*RESID4(-1) + B1(3,4)*COV3\_4(-1)$	

Результаты оценивания параметров представлены ниже:

**Таблица 5.6.** Диагональная VEC(1,1)-модель: оценки параметров

<b>Covariance specification: Diagonal VEC</b>				
<b>GARCH = M + A1.*RESID(-1)*RESID(-1)' + B1.*GARCH(-1)</b>				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	1.92E-05	4.79E-06	4.012423	0.0001
M(1,2)	1.50E-05	3.50E-06	4.293874	0.0000
M(1,3)	1.10E-05	3.20E-06	3.434227	0.0006
M(1,4)	1.59E-05	3.76E-06	4.222375	0.0000
M(2,2)	2.67E-05	6.73E-06	3.965723	0.0001
M(2,3)	1.96E-05	8.20E-06	2.390615	0.0168
M(2,4)	2.45E-05	5.87E-06	4.183931	0.0000
M(3,3)	6.75E-05	1.25E-05	5.392105	0.0000
M(3,4)	2.08E-05	8.63E-06	2.406971	0.0161
M(4,4)	5.67E-05	1.26E-05	4.513535	0.0000
A1(1,1)	0.062662	0.012209	5.132319	0.0000
A1(1,2)	0.042805	0.010665	4.013512	0.0001
A1(1,3)	0.011144	0.016048	0.694419	0.4874
A1(1,4)	0.038029	0.011746	3.237696	0.0012
A1(2,2)	0.065807	0.013848	4.751968	0.0000
A1(2,3)	0.045811	0.022035	2.079006	0.0376
A1(2,4)	0.060513	0.013821	4.378413	0.0000
A1(3,3)	0.208071	0.03877	5.366783	0.0000
A1(3,4)	0.053145	0.025392	2.092989	0.0364
A1(4,4)	0.108757	0.021529	5.051679	0.0000
B1(1,1)	0.899386	0.015475	58.12053	0.0000
B1(1,2)	0.904834	0.015346	58.96254	0.0000
B1(1,3)	0.862866	0.032105	26.87638	0.0000
B1(1,4)	0.888205	0.019318	45.97851	0.0000
B1(2,2)	0.881425	0.021476	41.04203	0.0000
B1(2,3)	0.790895	0.073417	10.7726	0.0000
B1(2,4)	0.851076	0.027217	31.26962	0.0000
B1(3,3)	0.589838	0.053945	10.93414	0.0000
B1(3,4)	0.748108	0.084375	8.866447	0.0000
B1(4,4)	0.784261	0.03496	22.43306	0.0000
t-Distribution (Degree of Freedom)				
C(39)	4.753774	0.412660	11.51983	0.0000

Мы можем оценить свойства остатков с использованием многомерных версий тестов на наличие автокорреляций (так называемых портманто-тестов, см. п. 4.2.8). Мы напомним, что при справедливости нулевой гипотезы статистики этих тестов имеют распределения, близкие к  $\chi^2$ -распределению, для более детальной информации см. раздел об оценке VAR-моделей, см. также работу [Lütkepohl (2005), §16.5] и ссылку в конце.



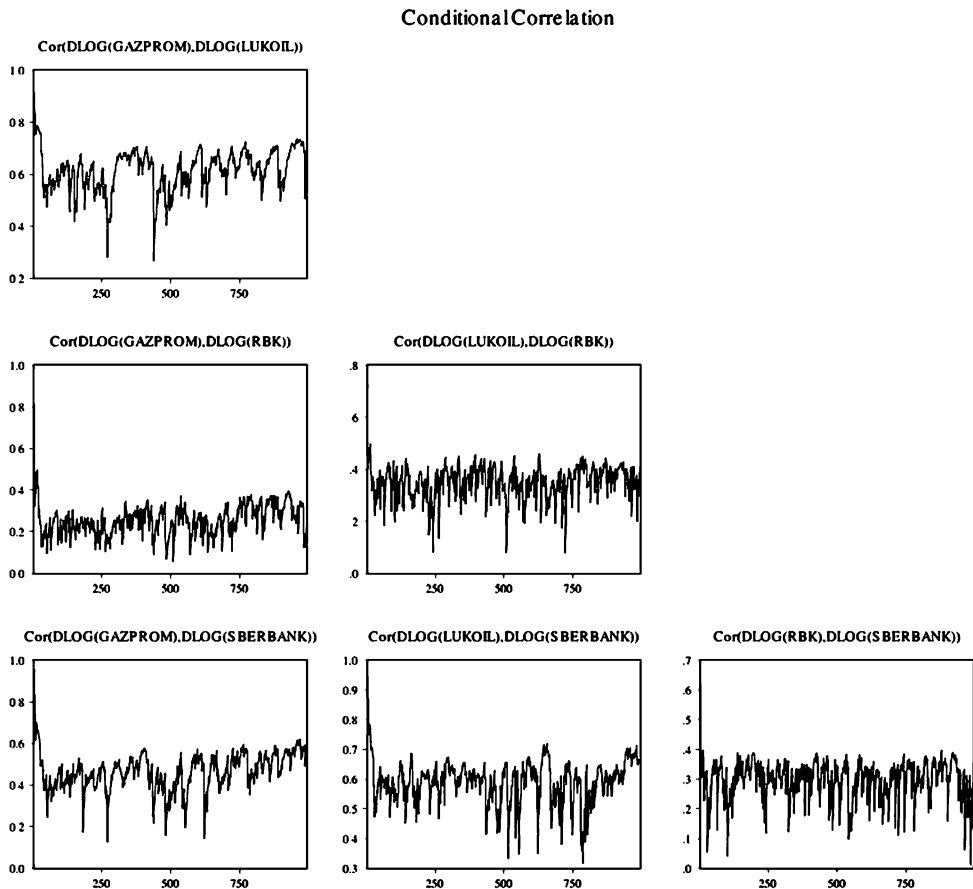


Рис. 5.9. Диагональная VEC(1,1)-модель: условные корреляции

Результаты тестов портманто на наличие автокорреляций в стандартизированных остатках  $\hat{z}_t$  и их квадратах приведены в табл. 5.7 и 5.8.

Таблица 5.7. Диагональная VEC(1,1)-модель: портманто-тесты на наличие автокорреляций в стандартизированных остатках  $\hat{z}_t$

System Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations					
Null Hypothesis: no residual autocorrelations up to lag h					
Orthogonalization: Cholesky (Lutkepohl)					
Sample: 3 994					
Included observations: 993					
Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	23.25884	0.107	23.28231	0.1064	16
2	42.44774	0.1025	42.50998	0.1014	32
...					
11	202.9479	0.0802	204.2023	0.0715	176
12	217.0118	0.1041	218.4384	0.0925	192

\*The test is valid only for lags larger than the System lag order.

**Таблица 5.8.** Диагональная VEC(1,1)-модель: портманто-тесты на наличие автокорреляций в квадратах стандартизированных остатков  $\hat{z}_t^2$

LM TESTS on $\hat{z}_t^2$			PORTMANTEAU TESTS on $\hat{z}_t^2$					
Sample: 1 994			Sample: 1 994					
Included observations: 992			Included observations: 992					
Lags	LM-Stat	Prob	Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
	11.72963	0.7624	1	11.75901	0.7604	11.77088	0.7596	16
2	12.69721	0.6948	2	24.48956	0.8262	24.52715	0.8247	32
	...			...				
11	8.813674	0.9209	11	171.7978	0.5754	172.8443	0.5531	176
12	20.09204	0.2161	12	191.7841	0.4908	193.0753	0.4646	192

## 2) Диагональная ВЕКК(1,1,1)-модель.

Теперь мы рассмотрим диагональную ВЕКК(1,1,1)-модель, предполагая при этом снова многомерное распределение Стьюдента. Спецификация модели представлена в табл. 5.9 с использованием *EViews System Representation*. Оценки параметров представлены в табл. 5.10.

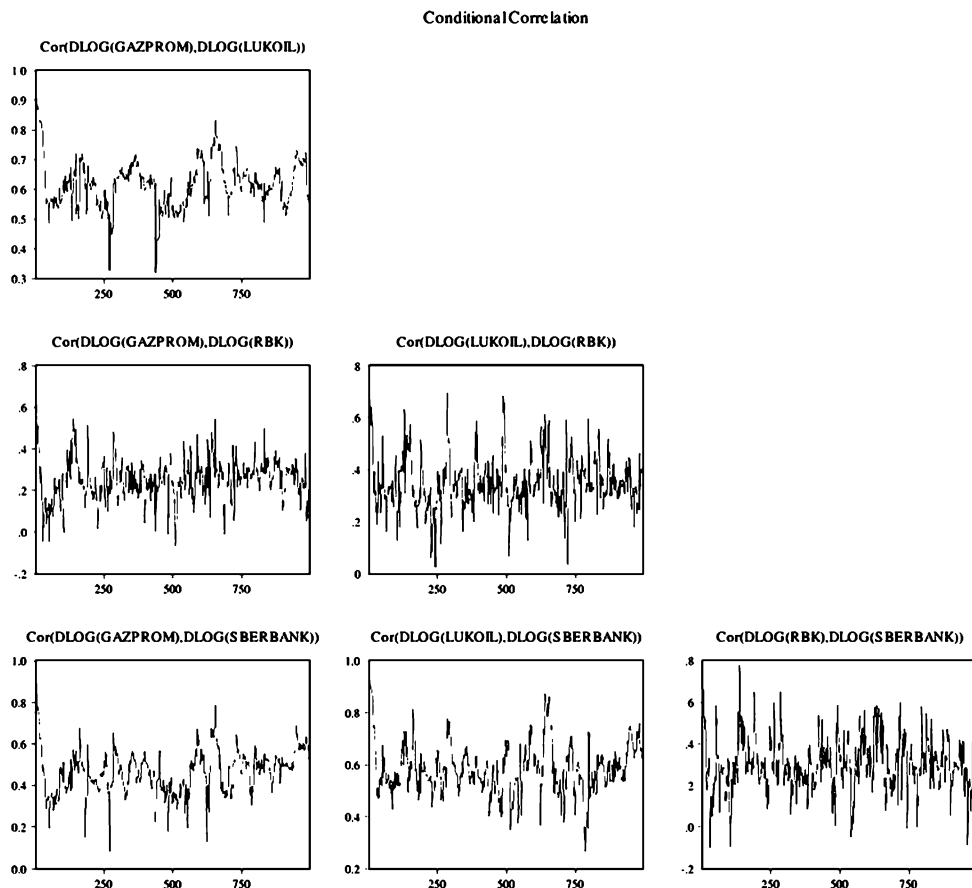
**Таблица 5.9.** Диагональная ВЕКК(1,1,1)-модель — многомерное распределение Стьюдента

<b>Variance-Covariance Representation:</b>
GARCH = M + A1*RESID(-1)*RESID(-1)*A1 + B1*GARCH(-1)*B1
<b>Variance and Covariance Equations:</b>
COV1_2 = M(1,2) + + A1(1,1)*A1(2,2)*RESID1(-1)*RESID2(-1)*RESID1(-1)*RESID2(-1)*RESID1(-1)*RESID2(-1) + B1(1,1)*B1(2,2)*COV1_2(-1)*COV1_2(-1)*COV1_2(-1)
COV1_3 = M(1,3) + + A1(1,1)*A1(3,3)*RESID1(-1)*RESID3(-1)*RESID1(-1)*RESID3(-1) + B1(1,1)*B1(3,3)*COV1_3(-1)*COV1_3(-1)
COV1_4 = M(1,4) + A1(1,1)*A1(4,4)*RESID1(-1)*RESID4(-1) + B1(1,1)*B1(4,4)*COV1_4(-1)
COV2_3 = M(2,3)*RESID2(-1)*RESID3(-1) + + A1(2,2)*A1(3,3)*RESID2(-1)*RESID3(-1)*RESID2(-1)*RESID3(-1)*COV2_3(-1) + + B1(2,2)*B1(3,3)*COV2_3(-1)*COV2_3(-1)
COV2_4 = M(2,4)*RESID2(-1)*RESID4(-1) + A1(2,2)*A1(4,4)*RESID2(-1)*RESID4(-1)*COV2_4(-1) + + B1(2,2)*B1(4,4)*COV2_4(-1)
COV3_4 = M(3,4)*RESID3(-1)*RESID4(-1)*RESID3(-1)*RESID4(-1) + +A1(3,3)*A1(4,4)*RESID3(-1)*RESID4(-1)*COV3_4(-1)*COV3_4(-1) + + B1(3,3)*B1(4,4)*COV3_4(-1)

**Таблица 5.10.** Диагональная ВЕКК(1,1,1)-модель: оценки параметров

<b>Covariance specification: BEKK</b>				
GARCH = M + A1*RESID(-1)*RESID(-1)*A1 + B1*GARCH(-1)*B1				
M is an indefinite matrix				
A1 is diagonal matrix				
B1 is diagonal matrix				
<b>Transformed Variance Coefficients</b>				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	1.41E-05	3.01E-06	4.685195	0.0000
M(1,2)	1.09E-05	2.46E-06	4.419519	0.0000
M(1,3)	1.40E-05	4.12E-06	3.392721	0.0007
M(1,4)	1.54E-05	3.59E-06	4.282469	0.0000
M(2,2)	2.04E-05	5.17E-06	3.945453	0.0001
M(2,3)	1.85E-05	4.76E-06	3.874584	0.0001
M(2,4)	1.93E-05	4.31E-06	4.484269	0.0000
M(3,3)	6.67E-05	1.32E-05	5.038907	0.0000
M(3,4)	1.76E-05	4.57E-06	3.844844	0.0001
M(4,4)	4.69E-05	1.06E-05	4.438965	0.0000
A1(1,1)	0.173441	0.017345	9.999267	0.0000
A1(2,2)	0.223354	0.022188	10.06634	0.0000
A1(3,3)	0.370344	0.039327	9.417132	0.0000
A1(4,4)	0.286524	0.026814	10.6858	0.0000
B1(1,1)	0.969862	0.004159	233.2025	0.0000
B1(2,2)	0.955668	0.007782	122.809	0.0000
B1(3,3)	0.813025	0.031718	25.63285	0.0000
B1(4,4)	0.912848	0.014869	61.39391	0.0000

С целью проверки автокоррелированности стандартизированных остатков и их квадратов мы также осуществим многомерную версию тестов портманто. Результаты этих тестов для  $\hat{z}_t$  и  $\hat{z}_t^2$  представлены в табл. 5.11 и 5.12 соответственно. Наконец, условные корреляции, полученные в предположении диагональной ВЕКК(1,1,1)-модели, представлены на рис. 5.10.



**Рис. 5.10.** Диагональная ВЕКК(1,1,1)-модель: условные корреляции

**Таблица 5.11.** Диагональная ВЕКК(1,1)-модель: тесты портманто на наличие автокорреляций в стандартизированных остатках  $\hat{z}_t$

System Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations					
Null Hypothesis: no residual autocorrelations up to lag h					
Orthogonalization: Cholesky (Lutkepohl)					
Sample: 3 994					
Included observations: 993					
Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	23.39794	0.1035	23.42153	0.1029	16
2	46.54835	0.0465	46.61866	0.0459	32
...			...		
11	205.9609	0.0606	207.2165	0.0537	176
12	219.2309	0.0865	220.6488	0.0766	192

\*The test is valid only for lags larger than the System lag order.

df is degrees of freedom for (approximate) chi-square distribution

**Таблица 5.12.** Диагональная ВЕКК(1,1)-модель: тесты портманто на наличие автокорреляций в квадратах стандартизированных остатков  $\hat{z}_t^2$

LM TESTS on $\hat{z}_t^2$			PORTMANTEAU TESTS on $\hat{z}_t^2$					
Sample: 1 994			Sample: 1 994					
Included observations: 992			Included observations: 992					
Lags	LM-Stat	Prob	Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	29.04697	0.0236	1	28.93447	0.0244	28.96364	0.0242	16
2	23.34343	0.1049	2	52.2799	0.0133	52.35618	0.0130	32
	...			...				
11	9.995047	0.8669	11	207.3001	0.0533	208.4106	0.0478	176
12	33.22188	0.0069	12	240.185	0.0104	241.6977	0.0087	192

### 3) CCC- и DCC- модели.

В этом разделе мы займемся оценкой GARCH(1,1)-DCC(1,1,1)-модели с использованием процедуры `ccgarch` в пакете R. Оценку CCC-модели мы оставим в качестве упражнения, решение которого представляет собой небольшую модификацию программы, представленной ниже. Учитывая программные возможности статистического пакета R, мы вычислим:

- статистику портманто-теста для проверки гипотезы об отсутствии серийной корреляции до порядка  $h$  включительно, которая определяется следующим образом:

$$Q_h = T \sum_{j=1}^h \text{tr}(\hat{C}'_j \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1}),$$

где  $\hat{C}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{u}}'_t$ , а  $(n \times 1)$ -векторы остатков  $\hat{\mathbf{u}}_t$  стандартизированы при помощи условной дисперсии (первый шаг процедуры оценки). Распределение тестовой статистики при большом числе наблюдений и справедливости нулевой гипотезы об отсутствии серийной корреляции до порядка включительно  $h$  близка к  $\chi^2(n^2(h-p))$ -распределению.

Для *малых выборок* и (или) при небольших значениях  $h$  скорректированная тестовая статистика может быть вычислена следующим образом:

$$Q_h^* = T^2 \sum_{j=1}^h \frac{1}{T-j} \text{tr}(\hat{C}'_j \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1}).$$

- *Бреуш-Годфри LM-статистику*, которая строится с использованием следующих вспомогательных регрессий:

$$\hat{\mathbf{z}}_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + B_1 \hat{\mathbf{z}}_{t-1} + \dots + B_h \hat{\mathbf{z}}_{t-h} + \xi_t.$$

Нулевая гипотеза  $H_0 : B_1 = \dots = B_h = 0$ , а соответствующая альтернативная гипотеза  $H_1 : \exists B_i \neq 0$  for  $i = 1, 2, \dots, h$ . Тестовая статистика определяется следующим образом:

$$LM_h = T(n - \text{tr}(\tilde{\Sigma}_R^{-1} \tilde{\Sigma}_e)),$$

где  $\tilde{\Sigma}_R$  и  $\tilde{\Sigma}_e$  — ковариационные матрицы остатков для модели с ограничениями и без ограничений соответственно. Тестовая статистика  $LM_h$  имеет асимптотическое  $\chi^2(hn^2)$ -распределение.

В работе [Edgerton, Shukur (1999)] предложена *модификация статистики на случай малой выборки*. Эта модифицированная статистика имеет вид:

$$LMF_h = \frac{1 - (1 - R_r^2)^{1/r} Nr - q}{(1 - R_r^2)^{1/r} Km},$$

с  $R_r^2 = 1 - |\tilde{\Sigma}_e|/|\tilde{\Sigma}_R|$ ,  $r = ((n^2 m^2 - 4)/(n^2 + m^2 - 5))^{1/2}$ ,  $q = \frac{nm}{2} - 1$  и  $N = T - n^* - m - 1/2(n - m + 1)$ , где  $n^*$  — число регрессоров в исходной системе, а  $m = nh$ . Модифицированная тестовая статистика имеет распределение  $F(hn^2, \text{int}(Nr - q))$ , где  $\int(Z)$  — это целочисленная часть от числа  $Z$ .

- *Статистику многомерного ARCH-LM-теста*, который основан на использовании следующей регрессии:

$$\text{vech}(\hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{u}}_t') = \beta_0 + \mathbf{B}_1 \text{vech}(\hat{\mathbf{u}}_{t-1} \hat{\mathbf{u}}_{t-1}') + \dots + \mathbf{B}_q \text{vech}(\hat{\mathbf{u}}_{t-q} \hat{\mathbf{u}}_{t-q}') + \mathbf{v}_t,$$

где  $\mathbf{v}_t$  — сферические ошибки, *vech* — оператор, преобразующий симметрическую матрицу в вектор-столбец (см. выше более подробное определение). Размерность  $\beta_0$  равна  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , а размерность матриц-коэффициентов  $\mathbf{B}_i$  с  $i = 1, \dots, q$ , равна  $\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)$ . Нулевая гипотеза состоит в том, что  $H_0 : \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \dots = \mathbf{B}_q = \mathbf{0}$ , а альтернатива —  $H_1 : \mathbf{B}_1 \neq \mathbf{0}$  или  $\mathbf{B}_2 \neq \mathbf{0}$  или  $\dots \mathbf{B}_q \neq \mathbf{0}$ . Тестовая статистика для проверки нулевой гипотезы  $H_0$  против альтернативы  $H_1$  имеет вид:

$$VARCH_{LM}(q) = \frac{1}{2} T n(n+1) R_m^2, \quad \text{где}$$

а  $\hat{\Omega}$  — ковариационная матрица для остатков указанной выше регрессии. Эта тестовая статистика имеет асимптотическое  $\chi^2(qn^2 \times (n+1)^2/4)$ -распределение.

Основное тело кода представлено ниже, тогда как дополнительные скрипты `tests.R`, включающие все вспомогательные процедуры для вычисления статистик многомерных тестов, доступны на веб-сайте.

```
library(urca) library(zoo) library(sandwich) library(vars)
library(fArma) library(ccgarch)
# Load the functions for Multivariate testing
setwd("C:/DEAN/LEZIONI/Econometric_software/cccgarch")
source("tests.R")
#Read the data
dat <- read.table("C:/DEAN/Lezioni/russian_stocks.txt", header = TRUE)
#Generate the returns in
y1=100*diff(log(dat[,1]))
y2=100*diff(log(dat[,2]))
y3=100*diff(log(dat[,3]))
y4=100*diff(log(dat[,4]))
#I estimate an (eventual) ARMA model with constant
fit1 = armaFit( ar(0), data = y1)
fit2 = armaFit( ar(0), data = y2)
fit3 = armaFit( ar(0), data = y3)
fit4 = armaFit( ar(0), data = y4)
#I extract the residuals...
res1=residuals(fit1)
res2=residuals(fit2)
res3=residuals(fit3)
res4=residuals(fit4)
#...and collect them in a matrix
data_res=cbind(res1,res2,res3,res4)
#I set the starting values for the DCC model
a = c(0.0003, 0.0005, 0.0004, 0.0004)
A = diag(c(0.06,0.11,0.22,0.14))
B = diag(c(0.87, 0.80, 0.56,0.78))
dcc.para = c(0.003, 0.95)
#I estimate the DCC model...
dcc.data.est=dcc.estimation(a, A, B, dcc.para, data_res,
model="diagonal")
#...and compute the standardized residuals of the first step estimation
std.res=data_res/ sqrt(dcc.data.est$h)
#I extract the conditional correlations...
DCC_corr_all=dcc.data.est$DCC
#... at time 10...
Rt.10 <- matrix(DCC_corr_all[10,], nrow=length(a))
Rt.10
```

```

by using
# the inverse of the lower triangular Cholesky factor of the residual
conditional
# correlation matrix (second step)
std.res.all=NULL
for (i in 1:nrow(std.res))
  Rt.i <- matrix(DCC_corr_all[i,], nrow=length(a))
  inv.chol.i=solve( chol(Rt.i) )
  std.res.i = inv.chol.i%%as.vector(std.res[i,])
  std.res.all = rbind(std.res.all, t(std.res.i) )

#Tests for a single lag
#portmanteau.multi(std.res.all,ncol(dcc.data.est$out) , 20)
#BG.multi(std.res.all, 0, ncol(dcc.data.est$out), 10)
#arch.multi(std.res.all, 10)

#We compute the multivariate tests recursively for a series of lags
recursive.portmanteau.multi(std.res.all, ncol(dcc.data.est$out), 20)
recursive.BG.multi(std.res.all, 0, ncol(dcc.data.est$out), 20)
recursive.arch.multi(std.res.all, 20)
    
```

Значения тестовых статистик и р-значения для них представлены в табл. 5.13.

**Таблица 5.13.** GARCH(1,1)-DCC(1,1) модель: многомерные портманто-тесты, Бреуша — Годфри LM-статистика и многомерный ARCH-тест

Portmanteau TEST			Multivariate Breusch-Godfrey LM			Multivariate ARCH test		
Lag	Statistic	P-value	Lag	Statistic	P-value	Lag	Statistic	P-value
1	27.59	0.000	1	27.62	0.035	1	136.77	0.009
2	48.18	0.000	2	47.10	0.042	2	224.63	0.112
3	72.24	0.000	3	71.21	0.016	3	398.13	0.000
4	85.09	0.001	4	83.64	0.050	4	492.31	0.001
5	102.62	0.003	5	102.50	0.046	5	596.61	0.002
6	113.61	0.012	6	112.98	0.114	6	667.01	0.030
7	124.58	0.036	7	123.14	0.222	7	766.15	0.042
8	140.31	0.048	8	140.92	0.205	8	890.09	0.014
9	155.84	0.061	9	155.53	0.242	9	1011.18	0.006
10	178.88	0.033	10	176.13	0.181	10	1078.88	0.041
11	206.28	0.011	11	203.92	0.073	11	1159.44	0.104
12	218.13	0.022	12	214.92	0.123	12	1255.13	0.131
13	236.46	0.020	13	231.09	0.130	13	1370.44	0.085
14	258.09	0.013	14	250.74	0.106	14	1460.03	0.129
15	272.89	0.018	15	262.33	0.154	15	1576.77	0.082
16	286.87	0.025	16	277.62	0.169	16	1753.89	0.004
17	298.56	0.042	17	290.93	0.206	17	1850.62	0.006
18	306.51	0.086	18	299.68	0.306	18	1919.72	0.025
19	323.58	0.085	19	321.63	0.233	19	2024.15	0.024
20	330.86	0.157	20	332.19	0.302	20	2125.28	0.026



## 5.3. Реализованная волатильность

### 5.3.1. Введение

Волатильность финансового рынка является ключевым элементом в теории управления риском, ценообразования активов и формирования портфелей.

В большинстве исследований волатильность рассматривается как ненаблюдаемая переменная, и для ее оценки используются специфичные модели для условного среднего и дисперсии.

Ненаблюдаемая волатильность  $\sigma_t$  на следующий день обычно определяется как  $\sigma_t = \sqrt{\mathbf{D}(Y_t|F_{t-1})}$ , где  $Y_t$  — дневная доходность, а  $F_{t-1}$  — информация, доступная к моменту  $(t - 1)$ .

Моделирование и прогнозирование  $\sigma_t^2$  может быть осуществлено при помощи параметрических моделей для дневных данных (таких как ARCH- или GARCH-моделей, рассмотренных выше) или с использованием так называемой *подразумеваемой* волатильности, получаемой из формулы Блэка—Шоулза (см. ниже, гл. 7). Однако стандартные модели для ненаблюдаемой волатильности не способны адекватно описывать малые, но медленно убывающие автокорреляции квадратов доходностей. Правильное описание динамики доходностей очень важно для того, чтобы получать точные прогнозы будущей волатильности, которая, в свою очередь, является важной в анализе рисков и управлении.

Идея использования высокочастотных данных для оценки волатильности возникла в 70-х–80-х гг. прошлого столетия:

- в работе [Officer (1973)] вычисляются годовые волатильности из месячных доходностей, что позволило не терять промежуточную информацию о траектории цены;
- в работе [Merton (1980)] используются дневные доходности для измерения месячных волатильностей.

Однако идея использования высокочастотных внутрисуточных данных для оценки дневных волатильностей возникла относительно недавно: в работе [Schwert (1998)] обрабатывались 15-минутные доходности, тогда как в работах [Taylor, Xu (1997)] и [Andersen, Bollerslev (1998)] для оценки дневной волатильности обменных курсов использовались 5-минутные доходности.

В работе [Andersen, Bollerslev (1998)] вычислялась оценка волатильности, получаемая из агрегированных высокочастотных доходностей.

Эта оценка оказалась достаточно точной, и для нее был введен специальный термин *реализованная волатильность* (RV). Реализованная

волатильности, будучи наблюдаемыми аппроксимациями для ненаблюдаемой волатильности  $\sigma_t$ , дают новые возможности для прогнозирования будущих волатильностей.

Как только волатильность становится «наблюдаемой», она может моделироваться непосредственно. В работах [Barndorff-Nielsen, Shephard (2002)], [Andersen et al. (2003)], [Meddahi (2002)] и др. представлены теоретические результаты, описывающие свойства реализованной волатильности, полученной из высокочастотных данных. Однако, как мы увидим позже, микроструктурные эффекты вносят значимое смещение в оценки дневных волатильностей. В работах [Aït-Sahalia et al. (2005)], [Bandi, Russell (2005a, 2006b)], [Zhang et al. (2005)], [Hansen, Lunde (2006a,b)] рассмотрены различные решения проблемы несостоятельности.

### 5.3.2. Теоретические основы

Для того чтобы понять то, как устроена РВ, нам необходимо ввести понятие *интегрированной волатильности*. Предположим, что модель для приращения логарифма цены представляет собой диффузионный процесс:

$$dp(t)^* = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad (5.30)$$

где  $p(t)^*$  — логарифм цены в момент времени  $t$ ,  $dW(t)$  — винеровский процесс, а  $\sigma(t)$  — стохастический процесс, не зависящий от  $dW(t)$ .

Для этого диффузионного процесса *интегрированная волатильность* ( $IV_{t+1}$ ) в день  $t$  определяется соотношением:

$$IV_{t+1} = \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds.$$

В работе [Merton (1980)] показано, что определенная таким образом интегрированная волатильность броуновского движения может быть аппроксимирована с любой степенью точности при помощи суммы квадратов внутридневных логарифмических доходностей.

Однако в качестве меры волатильности  $\sigma_t$  квадраты дневных логарифмических доходностей являются плохими оценками, поскольку они переоценивают эти волатильности. В то же время интегрированная волатильность, являясь хорошей мерой волатильности, может быть использована как образец сравнения для других оценок волатильности.

В работах [Andersen et al. (2001a,b, 2003)] и [Barndorff-Nielsen, Shephard (2002)] представлены обобщенные результаты для оценки интегрированной волатильности в классе специальных (с конечным сред-

ации: этот класс включает в себя процессы, используемые в приложениях, связанных с ценообразованием активов. Среди таких процессов следует выделить диффузионные процессы Ито, процессы со скачками и смешанные диффузии со скачками.

При определенных условиях регулярности сумма квадратов внутридневных лог-доходностей сходится к интегрированной волатильности цен, что позволяет нам построить достаточно точную оценку фактической волатильности на временном интервале фиксированной длины. Эта непараметрическая оценка называется *реализованной волатильностью*. Если определить  $y_{t,o} = p(t) - p(t-a)$ , а  $y_t = y_{t-1,1}$ , то в [Barndorff-Nielsen, Shephard (2002)] показано, что *квадратическая вариация* семимартингала, определенная как:

$$[y_t] = \text{plim} \sum_{j=1}^{t_j < t} (y_{t_j} - y_{t_{j-1}})^2,$$

эквивалентна интегрированной волатильности в условиях, когда доходности изменяются в соответствии с (5.30), а элемент сноса  $\mu(t)$  является непрерывной функцией. Сумма квадратов последовательных высокочастотных лог-доходностей сходится к квадратической вариации цены, (см. [Meddahi (2002)] и [Andersen et al. (2001a)]). Реализованная волатильность является состоятельной оценкой интегрированной волатильности при неограниченно возрастающей частоте выборки.

Рассмотрим дискретную выборку  $\Delta$ -периодичной доходности, которая в момент времени  $t$  равна  $y_{t,\Delta} = p(t) - p(t - \Delta)$ . Обозначим  $y_{t+1} = y_{t+1,1}$ . Дневная реализованная волатильность  $RV_{t+1}^{(d)}$  равна сумме  $1/\Delta$  высокочастотных внутридневных квадратов доходностей:

$$RV_{t+1}^{(d)} = \sum_{j=1}^{1/\Delta} y_{t+j\Delta,\Delta}^2 = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2, \quad (5.31)$$

где  $n_t$  — количество тактов времени длины  $\Delta$  в одном дне. При определенных условиях регулярности реализованная волатильность является несмещенной оценкой волатильности. Более того, с увеличением частоты выборки из диффузионного процесса (т.е. при  $\Delta \rightarrow 0$ ) реализованная волатильность представляет собой состоятельную оценку интегрированной волатильности за фиксированный интервал времени (см. [Andersen et al. (2001a,b)], [Andersen et al. (2003, 2007)]):

$$\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} RV_{t+1} = \int_t^{t+1} \sigma^2(s) ds$$

Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> и электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

Реализованную волатильность можно рассматривать для различных временных горизонтов, превышающих один день: многопериодные волатильности представляют собой нормированные суммы однопериодных волатильностей, т. е. это простые средние дневных  $RV^{(d)}$  [Corsi (2009)].

Например, недельная реализованная волатильность  $RV_t^{(w)}$  в момент времени  $t$  равна:

$$RV_t^{(w)} = \frac{1}{5} \left( RV_{t-1}^{(d)} + RV_{t-2}^{(d)} + \dots + RV_{t-5}^{(d)} \right), \quad (5.31')$$

где недельный временной интервал равен пяти рабочим дням.

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать только **дневную** волатильность, то верхний индекс  $d$  в ее определении (5.31) будет опускаться.

## Различные схемы формирования выборки для высокочастотных данных

Выше мы привели анализ в условиях непрерывного времени. Но на практике цены наблюдаются в дискретные и нерегулярно отстоящие друг от друга моменты времени. Существует множество схем формирования выборки внутредневных данных.

- (i) Наиболее широко используемая схема — *формирование выборки по календарному времени*, в которой рассматриваемые моменты времени являются равноотстоящими друг от друга. Предположим, что в заданный день  $t$  мы делим интервал  $[0, 1]$  на  $n_t$  подинтервалов. Пусть сетка моментов времени, в которые фиксируются наблюдения, определяется значениями:  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_t} = 1$ . Длина  $i$ -го подинтервала равна  $\Delta_i = \tau_{i,n_t} - \tau_{i-1}$ . В случае формирования выборки по календарному времени мы имеем  $\Delta = 1/n_t$  для всех  $i$ . Например, может извлекаться выборка пяти- или 30-минутных цен. Поскольку внутредневные данные обычно наблюдаются в нерегулярные моменты времени, формирование выборки по календарному времени должно осуществляться в некотором смысле искусственно (более подробно см. [Andersen, Bollerslev (1997)], [Dacorogna et al. (2001)]). В работе [Hansen, Lunde (2006b)] показано, что так называемый метод *предыдущего тика* является приемлемым способом формирования выборки цен в календарном времени. Например, в течение пятиминутного интервала, мы можем наблюдать несколько цен. Согласно методу *предыдущего тика* в качестве цены для этого пятиминутного интервала следует

- (ii) Во втором варианте способа формирования выборки ширина временного интервала определяется *заданным* числом транзакций, которое этот интервал должен содержать. В каждом таком интервале определяются цены, равные ценам  $m$ -й транзакции.
- (iii) Третья схема формирования выборки оперирует понятием «бизнес времени», т.е. производится деление дня на  $n_t$  интервалов таким образом, чтобы интегрированная волатильность на каждом интервале была одной и той же.
- (iv) Еще одной схемой является формирование выборки в «*тиковом*» времени; в ней цены фиксируются при каждом изменении цены.

Важное различие между приведенными выше схемами состоит в том, что моменты времени, в которые осуществляются наблюдения, в схеме (iii) являются ненаблюдаемыми, тогда как в схемах (i), (ii) и (iv) моменты времени являются наблюдаемыми. В работах [Andersen, Bollerslev (1997)] и [Curci, Corsi (2004)] показано, что схема (iii) может быть аппроксимирована схемой (iv). К тому же мы не коснемся в дальнейшем схемы (ii). Таким образом, далее мы будем рассматривать только (iv) и (i).

### Распределение реализованной волатильности

Используя результаты работ [Jacod, Protter (1998)], [Barndorff-Nielsen, Shephard (2002)], при выполнении некоторых условий регулярности мы имеем следующее:

$$\sqrt{n_t} \frac{1}{\sqrt{2IQ_{t+1}}} (RV_{t+1} - IV_{t+1}) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad (5.32)$$

где

$$IQ_{t+1} = \int_t^{t+1} \sigma^4(s) dw(s).$$

Величину  $IQ_{t+1}$  будем называть *интегрированной кватрисивностью*.

Более того, в работах [Barndorff-Nielsen, Shephard (2002)] показано, что в предположении отсутствия микроструктурного шума интегрированная кватрисивность состоятельно оценивается при помощи *реализованной кватрисивности*, которая определяется следующим образом:

$$RQ_{t+1} = \frac{n_t}{3} \sum_{i=0}^{n_t} y_{t,i}^4 \quad (5.32')$$

и

$$\sqrt{n_t} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} RQ_{t+1}}} (RV_{t+1} - IV_{t+1}) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Однако в работах [Barndorff-Nielsen, Shephard (2005b)], [Meddahi (2002)], [Gonçalves, Meddahi (2005)], [Nielsen, Frederiksen (2006)] показано, что (5.32) плохо соответствует действительности в условиях малых выборок.

В качестве альтернативного приближения для распределения интегрированной кватрисивности можно использовать:

$$\sqrt{n_t} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{RQ_{t+1}}{(RV_{t+1})^2}}} [\ln(RV_{t+1}) - \ln(IV_{t+1})] \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

В работах [Gonçalves, Meddahi (2005, 2008)] показано как бутстреп-процедура и разложения Эджворта могут улучшить приведенные выше асимптотические результаты.

### Ошибки измерения и микроструктурный шум

Эмпирические высокочастотные данные во многом отличаются от данных из безарбитражного непрерывного процесса, что делает RV-оценку (5.31) сильно смещенной в условиях выборок из малых интервалов.

В силу наличия микроструктурных эффектов на фондовом рынке, предположение о том, что логарифмы цен активов описываются диффузионным процессом, становится все менее адекватным по мере того, как уменьшается масштаб времени. Как следствие, реализованная волатильность, рассчитанная для очень коротких интервалов времени, не является несмещенной и состоятельной оценкой дневной интегрированной волатильности.

Ключом к пониманию недостатков RV-оценки является проблема *ошибок при измерении переменных*. В идеальном случае RV-оценка должна вычисляться на основании высокочастотных внутредневных лог-доходностей, рассчитанных на основании процесса фактических цен  $p^*$ . Однако на практике RV-оценка вычисляется на основании наблюдаемых котировок, которые загрязнены микроструктурным шумом. Это означает, что цена  $p^*$  ненаблюдаема. Ошибки измерения формируют автокорреляцию внутрಿದневных доходностей, а это, в свою очередь, делает реализованную волатильность смещенной и несостоятельной оценкой интегрированной волатильности [Hansen, Lunde (2004, 2006a)].

Например, в работах [Harris (1990)], [Zhou (1996)], [Corsi et al. (2001)] показано, что для интервалов времени, меньших, чем несколько часов,

которая влечет за собой увеличение смещенности оценки с увеличением частоты выборки. В этих работах обнаружено: для рынков Форекс смещение  $RV$ -оценки положительно, т. е. математическое ожидание дневной реализованной волатильности, вычисленной по лог-доходностям с частотой, превышающей один час, систематически больше, чем стандартное отклонение дневных лог-доходностей. Таким образом, мы стоим перед выбором между:

- большим числом наблюдений, что позволило бы сократить стохастическую ошибку измерения;
- рыночным микроструктурным шумом, который вносит смещенность, растущую с увеличением частоты выборки.

Предположим, что наблюдаемые цены:

$$P_{t,i} = P_{t,i}^* \xi_{t,i} \quad i = 1, 2, \dots, n_t,$$

где  $P_{t,i}^*$  — эффективная цена, а  $\xi_{t,i}$  — микроструктурный шум. Таким образом, если мы рассмотрим логарифмы цен, то получим:

$$\underbrace{p_{t,i} - p_{t,i-1}}_{y_{t,i}} = \underbrace{p_{t,i}^* - p_{t,i-1}^*}_{y_{t,i}^*} + \underbrace{\varepsilon_{t,i} - \varepsilon_{t,i-1}}_{u_{t,i}},$$

где  $p^* = \ln(P^*)$ ,  $p = \ln(P)$ , а  $\varepsilon = \ln(\xi)$ . Если мы предположим, что процесс для эффективной лог-цены  $p^*$  — непрерывный локальный мартигал, тогда состоятельной оценкой для интегрированной дисперсии является реализованная волатильность для процесса эффективной лог-цены:

$$RV_{t+1}^* = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^{*2}.$$

Однако  $y_{t,i}^*$  — ненаблюдаемая величина, а реализованная волатильность вычисляется на основании наблюдаемой  $y_{t,i}$ :

$$RV_{t+1} = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2,$$

которая является смещенной оценкой интегрированной волатильности при  $n_t \rightarrow \infty$  в силу наличия микроструктурного шума  $\varepsilon_{t,i}$ . Величина смещения представима в виде:

$$RV_{t+1} = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^{*2}}_{RV_{t+1}^*} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_t} u_{t,i}^2}_{RV_{t+1}^\varepsilon} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^* u_{t,i}}_{2RV_{t+1}^{\varepsilon}}. \quad (5.33)$$

Соотношение (5.33) показывает, что смещение состоит из двух компонент: реализованной волатильности шума  $RV_{t+1}^\epsilon$  и реализованной ковариации  $RC_{t+1}^{*,\epsilon}$  между эффективной ценой и шумом. Смещение обычно является положительной величиной при  $n_t \rightarrow \infty$  в силу отрицательной автокорреляции шума, формируемого за счет различия между ценой спроса и ценой предложения (обзор результатов, описывающих рыночную микроструктуру, см. в работах [Bias et al. (2005)] и [Hasbrouck (2007)]). Мы будем предполагать, что шум и эффективная цена некоррелированы, т. е.  $RC_{t+1}^{*,\epsilon} = 0$ .

К настоящему времени предложено множество статистических оценок интегрированной волатильности, построенных в предположении различных структур формирования шума и эффективной цены. Несмотря на то что в определенных предположениях относительно шума некоторые из этих оценок являются состоятельными, эмпирические результаты от их использования указывают на то, что они не всегда являются приемлемыми. Поэтому среди эконометристов нет однозначного выбора в пользу той или иной эмпирической оценки реализованной волатильности (см. [Hansen, Lunde (2006a,b)], [McAleer, Medeiros (2008)] и ссылки в них).

Одним из решений проблемы микроструктурного смещения, которое часто используется на практике, является снижение частоты выборки, что обеспечивает уменьшение смещения реализованной волатильности как оценки интегрированной волатильности. Эта процедура называется *прореживанием выборки*: например, в работах [Andersen et al. (2000, 2001a, 2003)] было предложено формировать выборку цен не из каждого тика, а каждые 5–15 минут. Однако это приводит к увеличению волатильности оценки. Если мы определим новую сетку с  $n_t^{(sparse)} < n_t$ , где  $n_t^{(sparse)}$  — число равноотстоящих наблюдений, оставшихся после прореживания, тогда мы имеем

$$RV_{t+1}^{(sparse)} = \sum_{j=1}^{n_t^{(sparse)}} y_{t+\frac{j}{n_t^{(sparse)}}}^2, \frac{1}{n_t^{(sparse)}}.$$

В работах [Barndorff-Nielsen, Shephard (2002)], [Mykland, Zhang (2006)], [Zhang et al. (2005)], [Zhang (2006)], [Ait-Sahalia et al. (2006)] показано: несмотря на то что при  $n_t^{(sparse)} < n_t$  смещение уменьшается, дисперсия оценки увеличивается. Выбирая частоту выборки на основании построенной по конечной выборке среднеквадратической ошибки оценки интегрированной волатильности, мы получим, что реализованная волатильность будет в определенном смысле оптимальной оценкой интегрированной волатильности. Однако следует отметить, что существуют альтернативные оценки для интегрированной волатильности (Мы их



рассмотрим ниже), которые являются более точными по сравнению с реализованной волатильностью.

В работах [Barndorff-Nielsen, Shepard (2002)], [Hansen, Lunde (2006b)], [Zhang et al. (2005)], [Zhou (1996)], [Hansen, Lunde (2004)] основное внимание уделяется разработке в условиях наличия микроструктурного шума менее смещенных и более эффективных оценок интегрированной волатильности, чем  $RV$ -оценка. В результате было предложено два типа оценок: *ядерные оценки* (см. [Hansen, Lunde (2004, 2006а, 2006в)] и [Zhou (1996)]) и *оценки на подвыборках* (см. [Zhang et al. (2005)]). В работе [Barndorff-Nielsen et al. (2005)] показано, что оценки на подвыборках могут интерпретироваться как модифицированные ядерные оценки.

### 5.3.3. Ядерные оценки

Если нам необходимо получить состоятельную оценку интегрированной волатильности в условиях наличия микроструктурного шума, то мы можем прибегнуть к хорошо известным автокорреляционным поправкам, которые используются, например, для оценки долгосрочной дисперсии и ковариации стационарных стохастических процессов (см., например, [Andrews (1991)], [Newey, West (1987)]).

В работах [Hansen, Lunde (2004), (2006а,б)] применяется аналогичная техника коррекции  $RV$ -оценки для уменьшения смещенности оценки в условиях микроструктурного шума. В работе [Hansen, Lunde (2004)] делаются следующие предположения относительно микроструктурного шума:

- 1) шум является процессом с ограниченным числом ненулевых автокорреляций;
- 2) шум коррелирован с приращениями ненаблюдаемой (эффективной) цены  $p^*$ .

Подход, использованный в работах [Hansen, Lunde (2004, 2006а,б)], состоит в том, чтобы скорректировать оценку реализованной волатильности в предположении наличия только  $q$  ненулевых автокорреляций (где  $q$  растет с увеличением частоты наблюдений, т. е. с увеличением объема выборки  $n_t$ ). Мотивация использования такого подхода состоит в том, что автокорреляция внутрисуточных доходностей практически бывает ненулевой лишь до некоторого конечного порядка: например, если «ошибки ценообразования» исчезают через две минуты, то нам следует выбирать порядок  $q$  таким, что он покрывал, по крайней мере, **два минутное временное окно**.

При выполнении условий, упомянутых выше, а также при некоторых добавочных слабых условиях в работах [Hansen, Lunde (2004, 2006a,b)] предлагается скорректированная реализованная волатильность, которая вычисляется на основании эмпирических автоковариаций. Она является несмещенной оценкой и имеет вид:

$$RV_{AC} = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2 + 2 \sum_{h=1}^q \frac{n_t}{n_t - h} \sum_{j=1}^{n_t-h} y_{t,j} y_{t,j+h}. \quad (5.34)$$

Недостатком  $RV_{AC}$ -оценки является то, что она может принимать отрицательные значения, тогда как волатильность всегда положительна. Это происходит в силу того, что ковариационные слагаемые масштабируются множителем  $\frac{n_t}{n_t-h}$ . В работах [Hansen, Lunde (2004, 2006a,b)] на примере эмпирических данных показано, что эта проблема возникает на практике, когда берутся внутридневные доходности очень высокой частотности. Однако когда берутся данные умеренной частотности, то такой проблемы не возникает. В этих работах предложена формула для вычисления подходящего порядка  $q_i$ : предлагается выбирать  $q$  таким, чтобы  $q/n_t$  было бы постоянным при любом  $n_t$ . А именно:

$$q = \text{ceil} \left( \frac{w}{(b-a)/n_t} \right),$$

где  $w$  — рассматриваемая длина лагового окна,  $\text{ceil}(x)$  обозначает наименьшее целое число, превосходящее или равное  $x$ , а  $(b-a)$  — длина периода, охватываемого выборкой и измеренного в единицах времени (при этом,  $(b-a)/n_t$  — период внутридневной доходности). Например, если  $w = 15$  минут, а  $b-a = 390$  минут, тогда  $q = \text{ceil}(n_t/26)$ .

Для того чтобы полностью исключить возможность получения отрицательных значений оценки волатильности, Лунде и Хансен предложили использовать разные методы уменьшения несмещенности, которые предполагают использование различных ядер. Например, для ядра Бартлетта, описание которого представлено в работе [Newey, West (1987)] на примере оценки ковариации, скорректированная оценка реализованной волатильности имеет вид:

$$RV_{ACNW} = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2 + 2 \sum_{h=1}^q \left( 1 - \frac{h}{q+1} \right) \frac{n_t}{n_t - h} \sum_{j=1}^{n_t-h} y_{t,j} y_{t,j+h}, \quad (5.35)$$

где  $q = \lceil \left( \frac{4n_t}{100} \right)^{2/9} \rceil$ . Однако обе оценки (5.34) и (5.35) являются несостоятельными.

В работе [Barndorff-Nielsen et al. (2006a)] предложена следующая ядерная оценка интегрированной волатильности:

$$RV_{BHLS} = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2 + \sum_{h=1}^q k \left( \frac{h-1}{q} \right) (\hat{\gamma}_h + \hat{\gamma}_{-h}),$$

где

$$\hat{\gamma}_h = \frac{n_t}{n_t - h} \sum_{j=1}^{n_t-h} y_{t,j} y_{t,j+h},$$

а  $k(x)$  для  $x \in [0, 1]$  — нестохастическая весовая функция такая, что  $k(0) = 1$  и  $k(1) = 0$ .

Они доказали, что утверждение о том, что все скорректированные с использованием ядер оценки интегрированной волатильности несостоятельны, является несправедливым. Предложено несколько состоятельных оценок, основанных на ядрах. Кроме того, построены ядра, которые имеют меньшую дисперсию, чем «оценки множественного шкалирования», которые рассмотрены ниже.

### 5.3.4. Оценки по подвыборкам

В работе [Zhang et al. (2005)] обычная  $RV$ -оценка категоризирована как одна из лучших оценок реализованной волатильности (пятая по качеству из рассмотренных в статье). Но если при этом несколько снизить частотность данных, то  $RV^{(sparse)}$  становится более точной оценкой интегрированной волатильности.

Рассмотрим более подробно идею построения улучшенных  $RV$ -оценок на подвыборках. Когда мы выбираем меньшую частотность, мы используем только долю имеющихся данных. Например, если мы имеем минутные котировки цен, а используем пятиминутные доходности, тогда для вычисления реализованной волатильности используется лишь каждое пятое наблюдение, т. е. наблюдения в моменты времени: 1, 6, 11, 16, ... Но следует учесть, что существуют и другие схемы формирования подвыборки, например: 2, 7, 12, 17, ... или 3, 8, 13, 18, ... Обозначим множество моментов времени, отвечающих наблюдениям, через  $\Lambda$ . Пусть число элементов в множестве  $\Lambda$  равно  $n_t$ . Разобьем  $\Lambda$  на  $K$  непересекающихся подмножеств  $\Lambda^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$  размера  $n(k)$ , так что:

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^K \Lambda^{(k)}, \quad \Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(j)} = \emptyset \quad \text{для } k \neq j$$

RV-оценка, отвечающая множеству моментов времени  $\Lambda^{(k)}$ , определяется как:

$$*RV_{t+1}^{(k)} = \sum_{i \in \Lambda^{(k)}} y_{t,i}^2.$$

Еще одна достаточно качественная RV-оценка (вторая по точности среди рассмотренных в статье [Zhang et al. (2005)]) дается формулой:

$$RV_{t+1}^{Avg} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K RV_{t+1}^{(k)}. \quad (5.36)$$

Однако оценка (5.36) является смещенной для высоких частотностей, но при этом она более сглаженная. Лучшая оценка  $RV_{t+1}^{TTSE}$  реализованной волатильности, известная как *оценка в двух временных шкалах* (Two Time Scales Estimator), использует  $RV_{t+1}^{Avg}$  и оценку реализованной волатильности  $RV_{t+1}^{(all,sparse)}(k)$ , вычисленную для максимально возможной частоты:

$$RV_{t+1}^{TTSE} = RV_{t+1}^{Avg} - \frac{n(k)}{n_t} RV_{t+1}^{(all,sparse)}(k), \quad (5.37)$$

где  $k$  — номер подмножества  $\Lambda^{(k)}$  максимальной частоты.

В работе [Aït-Sahalia et al. (2006)] представлена модифицированная оценка для  $RV_{t+1}^{TTSE}$ :

$$RV_{t+1}^{TTSE,adj} = \left(1 - \frac{n(k)}{n_t}\right)^{-1} RV_{t+1}^{TTSE}. \quad (5.38)$$

Свойства обеих оценок, задаваемых формулами (5.37) и (5.38), получены в предположении н.о.р.с.в. (независимости и одинаковой распределенности случайных величин), отвечающих микроструктурному шуму. В случае зависимых с.в. (случайных величин), отвечающих шуму, в работах [Zhang (2006a)] и [Aït-Sahalia et al. (2006)] предложена альтернативная оценка. Для того чтобы представить эту оценку, нам необходима так называемая *реализованная волатильность усредненного лага  $J$  (average lag)*,  $RV_{t+1,J}^{(AL)}$ , которая определяется следующим образом:

$$RV_{t+1,J}^{AL} = \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{n_t-J} (y_{t,i+J} - y_{t,i})^2.$$

Альтернативная оценка для случая зависимых с.в., отвечающих шуму, представляет собой обобщение TSSE-оценки и впервые была получена в работе [Zhang et al. (2005)]. Она имеет вид:

$$RV_{t+1}^{(GTTSE)} = RV_{t+1,K}^{AL} - \frac{\bar{n}_t^{(K)}}{\bar{n}_t^{(J)}} RV_{t+1,J}^{AL}$$

где  $1 \leq J \leq K \leq n_t$ ,  $K = o(n_t)$ ,  $\bar{n}_t^{(K)} = \frac{(n_t - K + 1)}{K}$  и  $\bar{n}_t^{(J)} = \frac{(n_t - J + 1)}{J}$ . Отметим, что последняя оценка совпадает с GTTSE-оценкой из работы [Zhang et al. (2005)] при  $J = 1$  и  $K \rightarrow \infty$  при  $n_t \rightarrow \infty$ . Следующая модификация имеет вид:

$$RV_{t+1}^{(GTTSE,adj)} = \left(1 - \frac{\bar{n}_t^{(K)}}{\bar{n}_t^{(J)}}\right)^{-1} RV_{t+1}^{(GTTSE)}. \quad (5.38')$$

Следует выразить некоторое предостережение в случае, когда вычисляются оценки по подвыборкам: если, например, в сетку разбиения временной оси не попадает момент открытия 9:30 или момент закрытия 16:00, то будет пропущено большое количество совершенных сделок, так как обычно наблюдается большая торговая активность вначале и в конце торгового дня. В результате мы получим заниженную оценку интегрированной волатильности. Следовательно, рекомендуется формировать временные подинтервалы таким образом, чтобы моменты времени, отвечающие сделкам при открытии и закрытии торгов, попадали в узлы разбиения, см. [Payseur (2007a)].

### 5.3.5. Оптимальные частоты для формирования выборки

В предположении н.о.р.с.в., отвечающих шуму, в работах [Bandi, Russell (2006a)] и [Zhang et al. (2005)] предложено выбирать оптимальную частоту, основываясь на минимизации среднеквадратической ошибки (MSE):

$$MSE \left( n_t^{(sparse)} \right) = 2 \cdot n_t^{(sparse)} \mathbf{E}(\varepsilon_{t,i}^2) + 4n_t^{(sparse)} \mathbf{E}(\varepsilon_{t,i}^4) + \\ + [8 \cdot RV_{t+1}^{(sparse)} \mathbf{E}(\varepsilon_{t,i}^2) - 2\mathbf{V}(\varepsilon_{t,i}^2)] + \frac{2}{n_t^{(sparse)}} \cdot IQ_{t+1}^{(sparse)}.$$

Приближенное решение этой задачи дается формулой:

$$n_t^* \approx \left\{ \frac{IQ_{t+1}}{4[\mathbf{E}(\varepsilon_{t,i}^2)]^2} \right\}^{1/3},$$

где определение  $IQ_t$  см. в формуле (5.32).

В работе [Bandi, Russell (2006a)] рассматриваются равноотстоящие узлы разбиения временной оси, тогда как в работе [Zhang et al. (2005)] представлена более общая формула для неравноотстоящих узлов разбиения временной оси. В работе [Bandi, Russell (2005a)] рассматривается

проблема выбора оптимальной частоты в случае зависимых с.в., отвечающих шуму, для реализованной волатильности, скорректированной на смещение.

В работах [Bandi, Russell (2006a)] и [Zhang et al. (2005)] показано, что:

$$\frac{1}{2n_t} RV_{t+1}^{(all)} \xrightarrow{p} \mathbf{E}(\varepsilon_{t,i}^2),$$

где  $RV_{t+1}^{(all)}$  — реализованная волатильность с использованием всех доступных данных.

Кроме того, в работах [Bandi, Russell (2006a)] и [Zhang et al. (2005)] используется реализованная квартисивность (5.32') в качестве оценки интегрированной квартисивности. Однако (5.32') будет достаточно точной оценкой интегрированной квартисивности только в случае, если микроструктурный шум отсутствует. В работе [Bandi, Russell (2006a)] предлагается брать частоту выборки, равную 15 минутам. В ней на основании смоделированных данных показано, что такая прореженная выборка не приводит к негативному эффекту при выборе оптимальной частоты. В работе [Zhang et al. (2005)] представлено альтернативное решение для оценки интегрированной квартисивности (RQ). Учитывая, что оценка RQ может быть сильно изменчивой, получаемая оптимальная частота  $n_t$  может быть также сильно изменчивой.

### 5.3.6. Скачки

В относительно недавних исследованиях представлены аргументы в пользу использования моделей со скачками, или разрывами, в задаче оценки стохастической волатильности, ценообразовании опционов и других производных финансовых инструментов (см., например, [Andersen et al. (2002)], [Chan, Maheu (2002)], [Chernov et al. (2003)], [Eraker et al. (2003)], [Maheu, McCurdy (2004)], [Khalaf et al. (2003)], [Huang, Tauchen (2005)]).

Эмпирические исследования указывают на то, что условная дисперсия большинства активов представима в виде комбинации гладкой и медленно меняющейся компоненты, являющейся непрерывным процессом, возвращающимся к среднему, и менее устойчивой компоненты, отвечающей за скачки, см. , например, [Andersen et al. (2007)] и [Bollerslev et al. (2009)].

Для того чтобы лучше понять этот феномен, мы коротко представим основы теории би-степенной вариации, см. [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004, 2006)].

Если мы обозначим логарифм цены актива в момент времени  $t$  через  $p_t$ , то диффузионный процесс, традиционно используемый в цено-

образовании активов, имеет следующий вид:

$$dp(t)^* = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + k(t)dq(t),$$

где  $\mu(t)$  — непрерывный процесс, имеющий локально-ограниченную вариацию; стохастическая волатильность  $\sigma(t)$  является строго положительной и *caglad*<sup>8</sup> функцией;  $W(t)$  — стандартное броуновское движение;  $q(t)$  — дискретный процесс, который при  $dq(t) = 1$ , отвечает скачкам в момент времени  $t$ , а при  $dq(t) = 0$  — отсутствию скачков;  $k(t)$  соответствует величине скачков. Квадратическая вариация кумулятивной доходности  $y(t) = p(t) - p(0)$ , имеет вид (см. [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004, 2006)], [Andersen et al. (2007)]):

$$[y, y]_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds + \sum_{0 < s \leq t} k^2(s). \quad (5.39)$$

Второе слагаемое в правой части аннулируется, когда отсутствуют скачки. И в этом случае квадратическая вариация равна интегрированной волатильности.

В работе [Andersen et al. (2007)] представлен новый непараметрический подход для идентификации двух компонент в уравнении (5.39). В этой более общей ситуации RV-оценка (5.31) при стремлении частоты выборки к бесконечности равномерно сходится по вероятности к приращению квадратической вариации, определенной выше, т. е.:

$$\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} RV_{t+1}(\Delta) = \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds + \sum_{t < s \leq t+1} k^2(s). \quad (5.40)$$

Таким образом, в отсутствие скачков реализованная вариация является состоятельной оценкой для интегрированной волатильности. В общем случае реализованная волатильность наследует динамики как непрерывной составляющей, так и скачкообразной составляющей.

Используя недавние асимптотические результаты из работы [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004, 2006)], можно идентифицировать (непараметрическими методами) две компоненты квадратической вариации. Определим стандартизованную меру *реализованной бистепенной вариации* (или BV-волатильность) следующим образом:

$$BV_{t+1}(\Delta) = \mu_1^{-2} \sum_{j=2}^{1/\Delta} |y_{t+j\Delta, \Delta}| |y_{t+(j-1)\Delta, \Delta}| = \mu_1^{-2} \sum_{i=2}^{n_t} |y_{t,i}| |y_{t,i-1}|, \quad (5.40')$$

<sup>8</sup>То есть непрерывной справа функцией, у которой существует предел слева. Это предположение позволяет допустить наличие дискретных скачков стохастической волатильности.  
Скопировано с сайта <http://www.право.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

где  $\mu_1 = \sqrt{2/\pi} = \mathbf{E}(|Z|)$  обозначает математическое ожидание абсолютного значения стандартной нормальной случайной величины  $Z$ . В работах [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004, 2006)] показано, что:

$$\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} BV_{t+1}(\Delta) = \int_t^{t+1} \sigma^2(s) ds. \quad (5.41)$$

Следовательно, комбинируя результаты (5.40) и (5.41), можно оценить вклад в квадратическую вариацию компоненты, отвечающей скачкам:

$$\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta) = \sum_{t < s \leq t+1} k^2(s). \quad (5.42)$$

Поскольку правая часть (5.42) может быть отрицательной, в работе [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004)] предлагается ввести корректировку эмпирической меры для скачков, обеспечивающую неотрицательность:

$$J_{t+1}(\Delta) = \max[RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta), 0]. \quad (5.43)$$

**Стягивающие оценки для скачков.** Теоретические свойства непараметрической оценки для скачков, определенной выше в виде разницы между реализованной волатильностью и бистепенной вариацией, получены в предположении, что частота выборки  $\Delta \rightarrow 0$ . Однако на практике мы имеем дело с данными в дискретном времени  $\Delta > 0$ , в которых присутствуют ошибки измерения. Кроме того, корректировка (5.43), обеспечивающая неотрицательность, представляет собой лишь частичное решение проблемы.

В работе [Huang, Tauchen (2005)] на смоделированных данных показано, что более робастная мера вклада скачков в вариацию цены дается *статистикой относительных скачков*,  $RJ_{t+1} = (RV_{t+1} - BV_{t+1})/RV_{t+1}$ , или соответствующим логарифмическим отношением, т.е.  $J_{t+1} = \ln RV_{t+1} - \ln BV_{t+1}$ . Эмпирические исследования для индекса SP500, представленные в работе [Huang, Tauchen (2005)], показывают, что относительный вклад скачков в вариацию цены, измеряемый при помощи  $RJ_{t+1}$ , равен приблизительно 7%.

Используя теорию асимптотических распределений, авторы работы [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004a)] показали, что можно урезать  $J_{t+1}$  и рассматривать только те скачки, которые превышают определенный порог. Этот подход адаптирован к расчетам в работе [Andersen et al. (2007)], где используется достаточно большое критическое значение для идентификации только наиболее значимых скачков, которые затем используются в модели прогнозирования  $RV_{t+1}$ . В этой работе предлагается интерпретировать небольшие скачки как ошибки измерения.

Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.рф>



И только достаточно большие значения  $RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta)$  ассоциируются с компонентой, отвечающей скачкам. Такой подход основан на результатах из работы [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004a)], где показано, что при отсутствии скачков и при  $\Delta \rightarrow 0$ :

$$\frac{RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta)}{[(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5)\Delta \int_t^{t+1} \sigma^4(s)ds]^{1/2}} \rightarrow N(0, 1). \quad (5.44)$$

Определим стандартизированную меру реализованной тристепенной кватрисивности соотношением

$$TQ_{t+1}(\Delta) = \Delta^{-1} \mu_{4/3}^{-3} \sum_{j=3}^{1/\Delta} |y_{t+j\Delta, \Delta}|^{4/3} |y_{t+(j-1)\Delta, \Delta}|^{4/3} |y_{t+(j-2)\Delta, \Delta}|^{4/3}, \quad (5.45)$$

где  $\mu_{4/3} = 2^{2/3} \cdot \Gamma(7/6) \cdot \Gamma(1/2)^{-1} = \mathbf{E}(|Z|^{4/3})$ . Эта мера используется как оценка для интегрированной кватрисивности  $\int_t^{t+1} \sigma^4(s)ds$ . В работе [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004)] показано, что:

$$\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} TQ_{t+1}(\Delta) = \int_t^{t+1} \sigma^4(s)ds. \quad (5.46)$$

Учитывая (5.44)–(5.46), мы получим следующую тестовую статистику:

$$\frac{RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta)}{[\Delta(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5)TQ_{t+1}(\Delta)]^{1/2}} \rightarrow N(0, 1). \quad (5.47)$$

Большое значение этой стандартизированной разности между реализованной волатильностью и бистепенной вариацией (см. (5.40')) интерпретируется как указатель на то, что имеется «значимый» скачок на промежутке времени  $[t, t + 1]$ .

Однако результаты на смоделированных данных, представленные в [Huang, Tauchen (2005)], показывают, что статистика, определяемая (5.47), тяготеет к слишком частому отклонению нулевой гипотезы об отсутствии значительных скачков. В этой работе, следуя [Barndorff-Nielsen, Shephard (2005b)], представлена модификация (5.47):

$$Z_{t+1}(\Delta) = \frac{\log(RV_{t+1}(\Delta)) - \log(BV_{t+1}(\Delta))}{[\Delta(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5)TQ_{t+1}(\Delta)BV_{t+1}(\Delta)^{-2}]^{1/2}} \rightarrow N(0, 1). \quad (5.48)$$

Статистика  $Z_{t+1}(\Delta)$  лучше аппроксимируется нормальным распределением на хвостах. Еще одна альтернативная версия вспомогательной

статистики для идентификации скачков, дающая очень похожие результаты:

$$Z_{t+1}(\Delta) = \frac{[RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta)]/RV_{t+1}(\Delta)}{[\Delta(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5) \max\{1, TQ_{t+1}(\Delta)BV_{t+1}(\Delta)^{-2}\}]^{1/2}} \rightarrow N(0; 1). \quad (5.48')$$

В работе [Andersen et al. (2007)] значимые скачки идентифицируются как превышение статистик (5.48) критического значения,  $\Phi_\alpha$ :

$$J_{t+1,\alpha}(\Delta) = \mathbf{I}_{\{Z_{t+1}(\Delta) > \Phi_\alpha\}} \cdot [RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta)], \quad (5.49)$$

где  $\mathbf{I}_{[\cdot]}$  — индикаторная функция. Непрерывная составляющая вариации оценивается как:

$$C_{t+1,\alpha}(\Delta) = \mathbf{I}_{\{Z_{t+1}(\Delta) \leq \Phi_\alpha\}} \cdot RV_{t+1}(\Delta) + \mathbf{I}_{\{Z_{t+1}(\Delta) > \Phi_\alpha\}} \cdot BV_{t+1}(\Delta). \quad (5.50)$$

Если учесть, что  $\Phi_\alpha > 0$  и (5.49), (5.50), то автоматически получаем положительность  $J_{t+1,\alpha}$  и  $C_{t+1,\alpha}$ . Интересно отметить, что (5.43) отвечает случаю, когда  $\alpha = 0.5$ , или  $J_t = J_{t,0.5}$ . Более того, в работе [Andersen et al. (2007)] отмечается, что эта оценка может быть интерпретирована как *стягивающая оценка* для скачков.

**Меры бистепенной вариации и коррекция микроструктурного шума.** Как мы уже отмечали, наблюдаемая цена «загрязнена» рыночным микроструктурным шумом. А наблюдаемый процесс логарифма цены в непрерывном времени предполагается семимартингалом; а при высокой частотности выборки зашумленность приводит к положительной смещенности оценки (5.40') для бистепенной вариации, поскольку  $\mathbf{E}(|y_{t,i}^*|) < \mathbf{E}(|y_{t,i}^* + u_{t,i}|)$ . Серийная автокорреляция для  $u_{t,i}$  является дополнительным источником смещения BPV-оценки. Аналогичное справедливо для оценки тристепенной квартисивности (5.45).

Как указано в работе [Huang, Tauchen (2005)], это, в свою очередь, влечет то, что описанные выше тестовые статистики для скачков будут иметь положительное смещение. Числовые расчеты и эксперименты, представленные в этой работе, подтверждают, что для высокочастотных выборок (т. е. при малых  $\Delta$ ), тестовые статистики имеют положительное смещение вместе с величиной дисперсии микроструктурного шума.

Ложная серийная корреляция наблюдаемых доходностей может быть ликвидирована при помощи «пошатывания» доходностей или «пропуском одной» доходности. Если мы заменим сумму абсолютных значений последовательных доходностей в (5.40') соответствующими

«пошатанными» абсолютными доходностями, мы можем получить модифицированную реализованную бистепенную вариацию:

$$BV_{1,t+1}(\Delta) = \mu_1^{-2}(1 - 2\Delta)^{-1} \sum_{j=3}^{1/\Delta} |y_{t+j\Delta,\Delta}| |y_{t+(j-2)\Delta,\Delta}| = \\ = \mu_1^{-2}(1 - 2\Delta)^{-1} \sum_{i=3}^{n_t} |y_{t,i}| |y_{t,i-2}|,$$

где нормирующий множитель перед суммой отражает потери в результате «пошатывания» доходностей.

Аналогичным образом мы можем действовать с серийной зависимостью более высокого порядка, попросту увеличивая длину лага. Аналогично интегрированная квартисивность может быть оценена при помощи «пошатывания» реализованной тристепенной квартисивности:

$$TQ_{1,t+1}(\Delta) = \Delta^{-1} \mu_{4/3}^{-3} (1 - 4\Delta)^{-1} \times \\ \times \sum_{j=5}^{1/\Delta} |y_{t+j\Delta,\Delta}|^{4/3} |y_{t+(j-2)\Delta,\Delta}|^{4/3} |y_{t+(j-4)\Delta,\Delta}|^{4/3}.$$

В работе [Barndorff-Nielsen, Shephard (2004a)] показано, что в отсутствие шума эти «пошатанные» реализованные вариации остаются состоятельными оценками для соответствующих интегрированных вариаций. Таким образом, асимптотическое распределение тестовой статистики, полученное путем замены  $BV_{t+1}(\Delta)$  и  $TQ_{t+1}(\Delta)$  в (5.48) и (5.48') «пошатанными» аналогами, будет также стандартным нормальным распределением. Важно отметить, что процедура «пошатывания» ослабит смешанное влияние рыночного микроструктурного шума, что обеспечит более точную аппроксимацию в условиях малых выборок, как подтверждается экспериментами, проведенными в работе [Huang, Tauchen (2005)].

**Альтернативные пороговые оценки.** В работе [Mancini (2009)] предложен альтернативный метод идентификации непрерывной компоненты реализованной волатильности, который основан на использовании следующей статистики:

$$TRV_{t+1} = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2 \cdot \mathbf{I}_{\{|y_{t,i}| < \theta\}},$$

где  $\theta$  — пороговая функция. В этой статистике исключаются большие доходностей в периоды высокой волатильности, чем в периоды низкой

волатильности. В статье [Mancini, Renò (2006)] рассматривается меняющаяся во времени пороговая функция:

$$\theta_t = c_\theta \cdot h_t,$$

где  $h_t$  — условная дисперсия, для которой предполагается GARCH-модель. Параметр  $c_\theta$  предполагается равным 3. Это означает, что в статистику  $TRV_{t+1}$  не входят наблюдения  $y_{t,i}$ , которые по абсолютному значению превышают три условных стандартных отклонения. Использование динамической пороговой функции позволяет получить более точную процедуру обнаружения скачков в условиях, когда дисперсия диффузии большая (т. е. когда более вероятно, что значительные движения образованы за счет диффузионной компоненты, а не скачками).

В работе [Corsi et al. (2008b)] представлено решение проблемы, описанной в [Andersen, Bollerslev, Diebold (2007)] и состоящей в том, что скачки в результате смещения, обеспеченного ошибкой измерения, не имеют предсказательной силы при прогнозировании будущей волатильности. А именно, предположим  $y_{t,i}$  включает в себя скачок. В случае бистепенной вариации оно будет умножаться на две соседние доходности,  $y_{t,i-1}$  и  $y_{t,i+1}$ . Асимптотически обе эти доходности будут стремиться к нулю, а бистепенная вариация будет сходиться к интегрированной непрерывной компоненте волатильности. Но когда  $n_t$  конечно, эти доходности будут отличаться от нуля, что обеспечивает положительное смещение, которое будет тем больше, чем большее значение принимает  $y_{t,i}$ . Это указывает на то, что смещение бистепенной вариации будет чрезвычайно большим в случае последовательных скачков. Таким образом, в случае, когда используется бистепенная вариация для учета непрерывной компоненты волатильности, возникает положительное смещение.

В работе [Corsi et al. (2008b)] представлена альтернативная оценка непрерывной компоненты волатильности, названная оценкой *скорректированной пороговой бистепенной вариации* (CTBV-оценкой), имеющая вид:

$$CTBV_{t+1} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=2}^{n_t} Z_1(y_{t,i}, \theta_i) Z_1(y_{t,i-1}, \theta_{i-1}),$$

где  $Z_1(y_{t,i}, \theta_i)$  — функция, равная  $|y_{t,i}|$ , когда  $y_{t,i} < \theta$ , и равная  $1.094\sqrt{\theta_i}$ , когда  $y_{t,i} \geq \theta_i$ , при этом,  $\theta_i$  — порог, вычисляемый итеративно:

$$\theta_i = c_\theta \cdot \hat{V}_i.$$

Даже если  $CTBV_{t+1}$  и  $TRV_{t+1}$  сходятся к  $IV_{t+1}$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , для  $\Delta > 0$  мы имеем:

$$\begin{aligned} CTBV_{t+1} &\longrightarrow BV \quad \text{при } c_\theta \rightarrow \infty \\ TRV_{t+1} &\longrightarrow RV \quad \text{при } c_\theta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Компонента, отвечающая скачкам, вычисляется как разность между реализованной  $RV$ -оценкой и  $CTBV$ -оценкой:

$$J_{t+1} = \mathbf{I}_{\{z_{t+1}(\Delta) > \Phi_\alpha\}} \cdot [RV_{t+1} - CTBV_{t+1}].$$

В работе [Corsi et al. (2008b)] используется «более очищенная» тестовая статистика, чем (5.48'). Более детальную информацию см. в этой статье.

### 5.3.7. Модели для прогнозирования реализованной волатильности

Во многих эмпирических исследованиях указывается на наличие зависимости с длинной памятью для волатильности финансового рынка. Для моделирования этого феномена предлагается несколько методологий. Вот лишь некоторые из них: см. [Robinson (1991)], [Ding et al. (1993)], [Baillie, Bollerslev, Mikkelsen (1996)], [Andersen, Bollerslev (1997)], [Breidt et al. (1998)], [Dacorogna et al. (2001)]. Однако до сих пор основное внимание исследователей уделяется двум основным классам моделей.

- *Авторегрессионные фрактально-интегрированные модели скользящего среднего (ARFIMA)* с длинной памятью для реализованных волатильностей, которые рассмотрены, например, в работах [Areal, Taylor (2002)], [Andersen et al. (2003)], [Shackleton, Taylor, Xu (2004)], [Deo et al. (2006)], [Koopman, Jungbacker, Hol (2005)].
- *Модели гетерогенной авторегрессионной реализованной волатильности (HAR-RV)*, которые рассмотрены в работах [Corsi (2009)], [Andersen et al. (2007)], [Corsi et al. (2008a)], [Bollerslev et al. (2009)]. HAR-RV-модели основаны на так называемой гетероскедастичной ARCH-модели (HARCH). Этот класс моделей анализируется в работе [Müller et al. (1997)]. В моделях из этого класса условная дисперсия доходностей, взятых в дискретные моменты времени, параметризована как линейная функция от ла-

временные горизонты. Хотя формально HAR-структура не обладает длинной памятью, перемешивание сравнительно небольшого числа компонент-волатильностей позволяет воспроизвести эффект медленного убывания автокорреляции волатильности, которое имеет скорость убывания, почти неотличимую от гиперболического, что соответствует длинной памяти.

**ARFIMA-модели для реализованной волатильности.**

Как мы указывали выше, имеются существенные эмпирические основания, представленные в работах многих исследователей, которые указывают на то, что реализованная волатильность является фрактально интегрированной, т. е. эффект влияния шока медленно (с гиперболической скоростью) убывает. Этот факт указывает на неприемлемость ARMA-модели для реализованной волатильности (которой отвечает экспоненциальное убывание автокорреляции).

Для того чтобы учесть эффект длинной памяти, в работе [Andersen et al. (2003)] предлагается использовать ARFIMA( $p, d, q$ )-модель для реализованной волатильности:

$$\Phi(L)(1 - L)^d(RV_{t+1} - \mu) = \Theta(L)u_t, \tag{5.51}$$

где  $(1 - L)^d$  определяется при помощи следующего разложения:

$$(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j + 1)} L^j.$$

Если  $|d| \in (0, 1/2)$ , то процесс является стационарным и в данных присутствует эффект длинной памяти. Если  $d \in (-1/2, 0)$ , то процесс будет антиустойчивым с короткой памятью. Процедура оценки состоит из двух шагов:

- На первом шаге оценивается параметр  $\hat{d}$  с использованием оценки из работы [Geweke, Porter-Hudak (1984)], в которой предлагается семипараметрическая оценка параметра  $d$ . Пусть через  $I(\omega_j)$  обозначена выборочная периодограмма  $j$ -й Фурье-частотности,  $\omega_j = = 2\pi j/T$ , где  $T$  — число наблюдений в выборке. Оценка параметра  $d$  получается из регрессионного уравнения:

$$\ln[I(\omega_j)] = \alpha - 2d \ln(\omega_j) + \epsilon,$$

где  $j = 1, \dots, m$ , и  $m$  таковы, что

при  $T$ , стремящемся к бесконечности. Результаты симуляционного моделирования из работы [Hurvich et al. (1998)] указывают на то, что можно брать  $m = T^{4/5}$  в качестве ширины окна.

- На втором шаге вычисляются остатки, которые получаются при помощи фильтрации исходных данных (с использованием оцененного фильтра фрактальной интеграции), а затем с использованием МНК оценивается модель (5.51).

В модель (5.51) могут быть включены дополнительные экономические и финансовые объясняющие переменные. Отметим при этом следующее важное обстоятельство: если мы рассматриваем модели для дневных волатильностей, то механика включенных дополнительных объясняющих переменных более сложна.

**Класс моделей волатильности HAR-RV.** В работе [Corsi (2009)] предложен класс моделей волатильности, которые позволяют весьма просто достигнуть цель моделирования длинной памяти волатильности.

Для того чтобы описать HAR-RV модель, нам необходимо использовать многопериодные реализованные волатильности, определяемые как нормированная сумма однопериодных волатильностей (см. (5.31')):

$$RV_{t,t+h} = h^{-1}[RV_{t+1} + RV_{t+2} + \dots + RV_{t+h}].$$

В работе [Andersen et al. (2007)] рассматриваются нормированные меры волатильностей для  $h = 5$  и  $h = 22$ , интерпретируемые как недельные и месячные волатильности соответственно. Более того, по определению дневных волатильностей:  $RV_{t,t+1} = RV_{t+1}$ .

Дневная HAR-RV модель в работе [Corsi (2009)] имеет вид: as

$$RV_{t,t+1} = \beta_0 + \beta_D RV_t + \beta_W RV_{t-5,t} + \beta_M RV_{t-22,t} + \epsilon_{t+1}.$$

В модели в качестве объясняющих переменных могут использоваться реализованные волатильности для других временных горизонтов, но дневные, недельные и месячные реализованные волатильности имеют весьма естественную экономическую интерпретацию (см. [Andersen et al. (2007)], [Corsi (2009)]).

Эта модель прогнозирования может быть обобщена на более длительные временные горизонты и может учитывать скачки, которые могут быть включены в модель в качестве дополнительной объясняющей переменной. В результате в качестве возможного обобщения мы получим так называемую **HAR-RV-J**-модель (т. е. HAR-RV модель с оценками скачков, используемыми в качестве объясняющих переменных):

Важно отметить, что, имея однопериодные наблюдения и более длинные горизонты прогнозирования, т.е.  $h > 1$ , ошибка будет серийно коррелирована до порядка  $h - 1$  в силу использования одинаковых данных. В работе [Andersen et al. (2007)] эта проблема исправлена при помощи использования состоятельной оценки ковариационной матрицы Бартлетта/Нью-Веста, учитывающей гетероскедастичность (с 5, 10 и 44 лагами для дневных ( $h=1$ ), для недельных ( $h=5$ ) и месячных ( $h=22$ ) оценок).

Следует отметить три весьма интересных результата, представленных в работе [Andersen et al. (2007)].

1. Статистическая значимость оценок  $\beta_D$ ,  $\beta_W$  и  $\beta_M$  указывает на существование устойчивой зависимости волатильностей.
2. Компонента, отвечающая дневной волатильности, является сравнительно более важной для дневных прогнозов, тогда как компонента, отвечающая месячным волатильностям, является сравнительно более важной для долгосрочных месячных прогнозов.
3. Коэффициент при компоненте, отвечающей скачкам,  $\beta_J$ , отрицательный во всех моделях и на всех рынках. Это означает, что для дней, в которые часть реализованной волатильности формируется за счет компоненты, отвечающей скачкам, последняя не привносит никакой прогнозной мощности реализованной волатильности на следующий день.

В работе [Andersen et al. (2007)] аналогичная модель также используется для прогнозирования стандартных отклонений:

$$(RV_{t,t+h})^{1/2} = \beta_0 + \beta_D(RV_t)^{1/2} + \beta_W(RV_{t-5,t})^{1/2} + \beta_M(RV_{t-22,t})^{1/2} + \beta_J J_t^{1/2} + \epsilon_{t,t+h}.$$

Процедура оценки параметров аналогична той, что используется в модели для дисперсии. Но более робастые стандартные отклонения приводят к большим значениям  $R^2$ , чем для модели дисперсий.

НAR-RV-J-модель также используется для моделирования логарифмов реализованных волатильностей (поскольку в работах [Andersen et al. (2007)] и [Andersen et al. (2003)] показано, что распределение логарифмов дневных реализованных волатильностей аппроксимируются нормальным распределением):

$$\ln(RV_{t,t+h}) = \beta_0 + \beta_D \ln(RV_t) + \beta_W \ln(RV_{t-5,t}) + \beta_M \log(RV_{t-22,t}) + \beta_J \ln(J_t + 1) + \epsilon_{t,t+h}.$$



Результаты, полученные на основании последней модели, весьма схожи с теми, что были представлены в предыдущих моделях. Исходя из эмпирических результатов, мы снова получаем то, что скачки обычно ассоциируются с очень «короткоживущими» вспышками волатильности.

В работе [Andersen et al. (2007)] модель HAR-RV-J модифицирована с использованием разложения реализованных волатильностей на непрерывную составляющую и скачки (см. формулы (5.49) и (5.50)). Если мы определим нормированные многопериодные скачки  $J_{t,t+h}$  и непрерывные составляющие  $C_{t,t+h}$  соотношениями:

$$\begin{aligned} J_{t,t+h} &= h^{-1}[J_{t+1} + J_{t+2} + \dots + J_{t+h}], \\ C_{t,t+h} &= h^{-1}[C_{t+1} + C_{t+2} + \dots + C_{t+h}], \end{aligned}$$

то обобщенная, так называемая HAR-RV-CJ-модель представится в форме:

$$\begin{aligned} RV_{t,t+h} &= \beta_0 + \beta_{CD}C_t + \beta_{CW}C_{t-5,t} + \beta_{CM}C_{t-22,t} + \\ &+ \beta_{JD}J_t + \beta_{JW}J_{t-5,t} + \beta_{JM}J_{t-22,t} + \epsilon_{t,t+h}. \end{aligned}$$

Аналогичные модели могут быть использованы для моделирования стандартных отклонений и логарифмических реализованных волатильностей. В работе [Andersen et al. (2007)] показано, что:

- большинство оценок коэффициентов при компоненте, отвечающей скачкам, являются незначимыми; это означает, что прогноз RV-оценки определяется непрерывной составляющей;
- HAR-RV-CJ-модели дают увеличение  $R^2$  на 0,01, или на 2–3% относительно  $R^2$  для HAR-RV-J-модели;
- HAR-RV-CJ-модели позволяют учесть сильную серийную корреляцию  $RV_{t,t+h}$ , но все еще остаются статистически значимые автокорреляции, отвечающие более высоким лагам.

**Совместное моделирование реализованной волатильности, бистепенной вариации и скачков.** В работе [Bollerslev et al. (2009)] представлена модель дневной стохастической волатильности, в которой для ценовых движений различаются скачки и непрерывная компонента (с использованием реализованной волатильности и бистепенной вариации). Такая модель позволяет описывать структурную зависимость между шоками и рыночными доходностями; зависимость между двумя различными компонентами волатильности (непрерывная часть и скачки). Кроме того, в работе [Bollerslev et al. (2009)] показано, что

левередж-эффект формируется, главным образом, через непрерывную составляющую волатильности.

В работах [Corsi et al. (2008a)], [Bollerslev et al. (2009)] предложена *HAR-GARCH-BV*-модель, которая представляет собой обобщение *HAR-RV*-модели и которая учитывает структурную зависимость между шоками и доходностями, а также между двумя компонентами волатильности. В отличие от *HAR-RV*-моделей, рассмотренных выше, которые оцениваются при помощи МНК, в работе [Bollerslev et al. (2009)] используется метод максимального правдоподобия, учитывающий условную гетероскедастичность остатков.

Для того чтобы определить модель из [Bollerslev et al. (2009)], введем логарифмическую мультипериодную бистепенную вариацию:

$$(\ln BV)_{t+1-k:t} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(BV_{t-j}),$$

где  $k = 5$  и  $k = 22$  отвечает неделе или месяцу соответственно. *HAR-GARCH-BV*-модель для непрерывной компоненты реализованной волатильности (т. е. для  $BV_t$ -волатильности) имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln BV_t &= \alpha_0 + \alpha_d \ln BV_{t-1} + \alpha_w (\ln BV)_{t-5:t-1} + \\ &+ \alpha_m (\ln BV)_{t-22:t-1} + \theta_1 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} + \theta_2 \mathbf{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \\ &+ \theta_3 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} \mathbf{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \sqrt{h_t} u_t, \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\ln BV_{t-1} - x'_{BV} \beta_{BV})^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \sum_{j=1}^s \lambda_j BV_{t-j}, \end{aligned}$$

где  $h_t$  — условная дисперсия в момент времени  $t$ , которая описывается *GARCH*-моделью;  $x_{BV}$  включает все регрессоры из (5.52). Модель также включает компоненту  $\mathbf{I}_{\{y_{t-1} < 0\}}$ , которая определяет скачкообразные изменения в свободном члене и коэффициенте при  $|y_{t-1}|$  (подобный механизм часто называют «левередж-эффектом»). Для моделирования отклонений от нормальности ошибки  $u_t$  предполагаются распределенными в соответствии со смешанным нормальным распределением:

$$\begin{aligned} &\overset{iid}{u_t} \sim \int N_1(0, 1) \quad \text{с вероятностью } (1 - p_u) \\ &\text{http://учебники.информ2000.рф} \quad N_0(\mu_u, \sigma_u^2) \quad \text{с вероятностью } p_u \end{aligned} \tag{5.53}$$

Что касается скачков

$$J_t = \ln RV_t - \ln BV_t,$$

для них в работе [Bollerslev et al. (2009)] специфицируется следующая авторегрессионная модель:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{RV_t}{BV_t} \right) = & \delta_0 + \psi_1 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} + \\ & + \psi_2 \mathbf{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \psi_3 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} \mathbf{I}_{\{y_{t-1} < 0\}} + \sum_{j=1}^n \delta_j \ln \left( \frac{RV_{t-j}}{BV_{t-j}} \right) + \nu_t. \end{aligned} \quad (5.54)$$

В качестве распределения, предложенного для остатков в уравнении для скачков (5.54), берется смесь обратного гауссовского распределения с нулевым средним, сосредоточенного на всей действительной оси (NIG), и обратного гауссовского распределения, сосредоточенного на положительной полуоси IG, а именно:

$$\nu_t \stackrel{iid}{\sim} \begin{cases} NIG(\alpha_{NIG}, \beta_{NIG}, \delta_{NIG}) & \text{с вероятностью } (1 - p_\nu) \\ IG(\lambda_{IG}, \mu_{IG}) & \text{с вероятностью } p_\nu \end{cases}. \quad (5.55)$$

В работе [Bollerslev et al. (2009)] аргументируется этот выбор тем, что смесь распределений обеспечивает приемлемую интерпретацию, поскольку NIG-распределение можно рассматривать как модель для моделирования небольших дневных флуктуаций для логарифмической реализованной волатильности вокруг логарифмической бистепенной вариации, тогда как обратное гауссовское распределение, сосредоточенное на положительной полуоси, рассматривается как модель для больших отклонений. Плотность обратного гауссовского распределения имеет вид:

$$f(x, \mu, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3 \lambda}} \exp \left[ \frac{1}{2x} \left( \frac{x - \mu}{\mu \lambda} \right)^2 \right].$$

Наконец, модель для дневных доходностей, использующая  $RV_t$  в качестве меры изменчивости цены, и имеющая вид

$$y_t = \gamma_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j y_{t-j} + \sqrt{RV_t} \epsilon_t, \quad (5.56)$$

допускает наличие серийной корреляции до  $d$ -го порядка включительно, а остатки предполагаются гауссовскими,  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ .

Предполагая ошибки в разных уравнениях независимыми, в работе [Bollerslev et al. (2009)] используется рекурсивная структура системы указанных выше трех уравнений, для оценки параметров каждого

из которых в отдельности используется стандартный метод максимума правдоподобия. Интересно отметить, что с использованием этой модели обнаружен значимый негативный леввередж-эффект в уравнении для непрерывной компоненты волатильности (т.е.  $BV_t$ ), тогда как оценки параметров  $\psi_2$  и  $\psi_3$  в (5.54) оказались незначимыми. Это указывает на то, что скачки не подвержены асимметричному влиянию лагированных доходностей-шоков, а это подтверждает справедливость использования большинства параметрических диффузионных моделей со скачками, рассмотренных в работах [Bates (2000)], [Eraker et al. (2003)] и [Pan (2002)].

Однако оценка системы указанных выше уравнений не учитывает возможность наличия нелинейных зависимостей остатков. В работе [Bollerslev et al. (2009)] предлагается моделировать нелинейную зависимость с использованием следующей системы:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \gamma_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j y_{t-j} + \sqrt{RV_t} \epsilon_t; \\
 \ln BV_t &= \alpha_0 + \alpha_d \ln BV_{t-1} + \alpha_w (\ln BV)_{t-5:t-1} + \\
 &\quad + \alpha_m (\ln BV)_{t-22:t-1} + \theta_1 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} + \\
 &\quad + \theta_2 I[y_{t-1} < 0] + \theta_3 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} I[y_{t-1} < 0] + \sqrt{h_t} (u_t + g(\epsilon_t)); \\
 h_t &= \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\ln BV_{t-1} - x'_{BV} \beta_{BV})^2 + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \sum_{j=1}^s \lambda_j BV_{t-j}; \\
 \ln \left( \frac{RV_t}{BV_t} \right) &= \delta_0 + \psi_1 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} + \psi_2 I[y_{t-1} < 0] + \psi_3 \frac{|y_{t-1}|}{\sqrt{RV_{t-1}}} I[y_{t-1} < 0] + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \delta_j \ln \left( \frac{RV_{t-j}}{BV_{t-j}} \right) + (v_t + m(u_t) + k(\epsilon_t)),
 \end{aligned}$$

где ошибки распределены в соответствии с (5.53), (5.55) и (5.56). Эта система явным образом допускает наличие ошибок в непрерывной составляющей волатильности, а уравнение для скачков нелинейно зависят от ошибок из уравнения для доходностей через функции общего вида  $g(\epsilon_t)$  и  $k(\epsilon_t)$  соответственно. Аналогично ошибки в модели для скачков предполагаются зависимыми от шоков непрерывной составляющей доходности через функцию  $m(u_t)$ . Эти нелинейные зависимости

моделируются с использованием полиномов второй степени:

$$\begin{aligned}g(\epsilon_t) &= g_1\epsilon_t + g_2\epsilon_t^2, \\k(\epsilon_t) &= k_1\epsilon_t + k_2\epsilon_t^2, \\m(u_t) &= m_1u_t + m_2u_t^2,\end{aligned}$$

где в целях идентификации в работе [Bollerslev et al. (2009)] свободные члены трех используемых полиномов второй степени берутся равными нулю. Плотность для  $\zeta_t = (\ln BV_t, \ln(\frac{RV_t}{BV_t}), y_t)$  равна:

$$\begin{aligned}f_y(\zeta_t|x_{t-1};\theta) &= \frac{1}{\sqrt{h_t}\sqrt{RV_t}} \times f_\epsilon\left(\frac{y_t - x'_y\beta_y}{\sqrt{RV_t}}|\theta_\epsilon\right) \times \\&\times f_u\left(\frac{\ln BV_t - x'_{BV}\beta_{BV}}{\sqrt{h_t}} - g\left[\frac{y_t - x'_r\beta_r}{\exp\{\frac{1}{2}\ln RV_t\}}\right]|\theta_u\right) \times \\&\times f_\nu\left(\ln\left(\frac{RV_t}{BV_t}\right) - x'_{BV}\beta_{BV} - m(u_t) - k(\epsilon_t)|\theta_\nu\right).\end{aligned}$$

В работе [Bollerslev et al. (2009)] получены аналогичные результаты для системы уравнений, но в основном имеются меньшие стандартные ошибки для оцененных параметров. Интересное обобщение в этом направлении относительно длинной памяти и хвостовой зависимости для торговых объемов и волатильностей представлены в работе [Rossi et al. (2008)].

### 5.3.8. Эмпирический анализ с использованием статистического пакета R: RV-оценки.

В этом разделе с использованием пакета процедур `realized` в R мы представим вычислительную процедуру для стандартных и модифицированных RV-оценок. Мы следуем описанию пакета процедур `realized`, представленному [Payseur (2007b)].

В этом пакете процедур имеется возможность использования высокочастотных данных за период в 11 дней для компании Microsoft (MSFT) и General Electric (GE). Эти данные мы можем загрузить при помощи следующих команд:

```
library(realized)
data(msft.real.cts)
data(msft.real.tts)
data(ge.real.cts).
```

Первые 10 высокочастотных доходностей за 5/1/1997 CTS для ком-

```
msft.real.cts[[1]][1:10].
```

Для указания дат, отвечающих данным из рассматриваемого примера, необходимо использовать:

```
data(dates.example)
dates.example.
```

Положительное смещение традиционной оценки реализованной волатильности в условиях высокочастотных данных отмечается в работах [Andersen et al. (2000b)] и [Fang, (1996)]. На рис. 5.4 изображено выборочное среднее значение реализованной волатильности за  $n$  дней, т. е.  $\bar{RV} = 1/n \sum_{t=1}^n RV(\Delta)$ , как функции от частоты выборки  $\Delta$ . Функция `rSignature` используется для изображения графика так называемой сигнатуры волатильности.

Однако усреднение по большому числу дней может стабилизировать волатильный характер реализованной волатильности для малых частот. Например, в литературе по реализованной волатильности часто предлагаются альтернативные мнения относительно того, выборки какой частоты следует использовать (5-, 10-, 15- или 20-минутные котировки).

В работе [Payseur (2007a)] изучается график сигнатуры волатильности, на котором представлены значения реализованной волатильности за один день в зависимости от частоты выборки. Этот график демонстрирует, насколько волатильными являются оценки в зависимости от небольшого изменения частоты выборки. Функция `rSignature` использует следующие входные данные:

- `range` — действительнзначный вектор, который специфицирует входные параметры для вычисления реализованной волатильности;
- `x` — `realizedObject` для первого актива;
- `y` — `realizedObject` для второго актива (в случае ковариации или корреляции);
- `makeReturns`; если мы имеем цены, то эти опции позволяют трансформировать их в лог-доходности;
- `type` — тип используемой оценки; если `y=NULL`, тогда тип будет отвечать реализованной волатильности; если `y` не `NULL`, тогда тип будет отвечать реализованной ковариации или корреляции;
- если `cor` равно `TRUE` и `y` не равен `NULL`, то будет выведен на экран

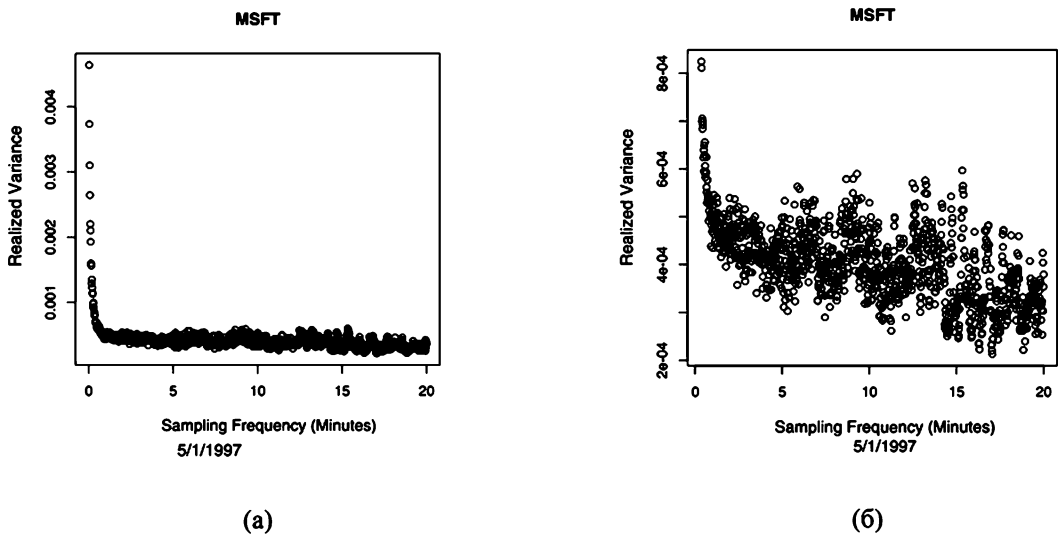
- `xscale` определяет масштаб оси  $x$  (например, если мы имеем секундные доходности и хотим ось  $x$  масштабировать в минутах, тогда `xscale=1/60`).

График сигнатуры для MSFT за May 1, 1997, при исходной частоте выборки, равной одной секунде, на котором по оси  $x$  откладываются частоты от одной секунды до 20 минут, может быть получен при помощи команд:

```
test.sig <- rSignature(1:1200, msft.real.cts[[1]], xscale=1/60)
names(test.sig)
plot(test.sig, ylab="Realized Variance", xlab="Sampling Frequency
(Minutes)", main="MSFT", sub=dates.example[[1]])
# See Figure 5.4 (left plot)
```

Для того чтобы показать вариабельность реализованных волатильностей, рекомендуется удалить на графике значения для очень больших частот (см. рис. 5.11(б)):

```
plot(x=test.sig$x[-(1:20)], y=test.sig$y[-(1:20)], ylab="Realized
Variance", xlab="Sampling Frequency (Minutes)", main="MSFT",
sub=dates.example[[1]])
# See Figure 5.11 (right plot).
```



**Рис. 5.11.** График сигнатуры волатильности по данным за один день для MSFT, 5/1/1997

На рис. 5.11 видно, что если используется частота выборки в окрестности 5 минут, тогда оценка принимает значения между 0,0003 и 0,0006. Этот разброс значений представляется достаточно значимым, поэтому выбор частоты выборки для вычисления реализованной волатильности не представляется простым (см. более подробно Payseur, 2007a,b).

**Ядерные оценки.** Смещение реализованной волатильности, о котором мы упоминали выше, возникает в результате разницы между ценой спроса и ценой предложения, которое, в свою очередь, формирует отрицательную автокорреляцию в микроструктурном шуме. Это можно увидеть из графика автокорреляции доходностей для цен, наблюдаемых с большой частотностью:

```
acf(msft.real.cts[[1]]$data, main="ACF: MSFT").
```

В работах [Hansen, Lunde (2006, 2004)], [Zhou (1996)], [Barndorff-Nielsen et al. (2004)] для того, чтобы исключить смещение, вызванное автокорреляцией микроструктурного шума, предлагается использовать ядерные оценки. При помощи следующих команд мы сможем вычислить ядерную оценку интегрированной волатильности (с использованием высокочастотных данных), построить для нее график сигнатуры волатильности и наложить этот график на аналогичный для стандартной RV-оценки (см. рис. 5.11).

```
plot(x=test.sig$x[-(1:20)],y=test.sig$y[-(1:20)],ylab="Realized Variance",
     xlab="Sampling Frequency (Minutes)", main="MSFT",sub=dates.example[[1]])
test.rect <- rSignature(1:400, msft.real.cts[[1]], xscale=1/20,
                       type="kernel", args=list(type="rectangular"))
lines(test.rect, col=2, lwd=2)
axis(3, c(0,(1:5)*4), c("Lags:",as.character((1:5)*80)))
legend(15,.0008,c("Rectangular"), lwd=c(2), col=c(2))
# See Figure 5.12 (right plot).
```

Можно видеть, что разброс значений ядерной оценки реализованной волатильности слабо зависит от количества лагов, используемых при ее вычислении.

В пакете функций `realized` можно найти разные ядерные оценки, которые обычно дают значительно лучшие результаты (см. [Barndorff-Nielsen et al. (2004)] и [Payseur (2007a,b)]):

```
rKernel.available()
[1] "Rectangular" "Bartlett" "Second" "Epanechnikov" "Cubic" "Fifth"
[7] "Sixth" "Seventh" "Eighth" "Parzen" "TukeyHanning" "ModifiedTukeyHanning"
```

Если мы выберем модифицированные ядра Тукея — Ханнинга и Бартлетта, то итоговые оценки окажутся значительно лучше (см. рис. 5.12).

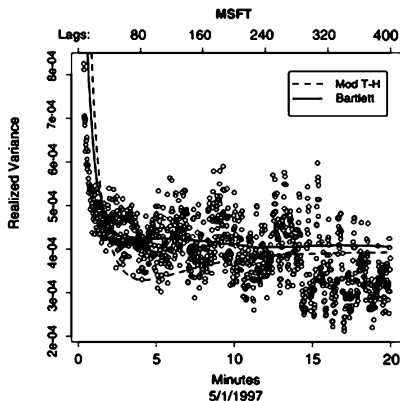
```
par(mfrow=c(1,1))
plot(x=test.sig$x[-(1:20)],y=test.sig$y[-(1:20)],ylab="Realized Variance",
     xlab="Minutes", main="MSFT",sub=dates.example[[1]])
test.mth <- rSignature(1:400, msft.real.cts[[1]], xscale=1/20,
                      type="kernel", args=list(type="mth"))
test.bart <- rSignature(1:400, msft.real.cts[[1]], xscale=1/20,
                      type="kernel", args=list(type="bartlett"))
lines(test.mth, col=3,lwd=2)
lines(test.bart, col=4, lwd=2)
```





```
lines(test.tt, col=3, lwd=2)
lines(test.tt.adj, col=4, lwd=2)
lines(test.tt.aa, col=5, lwd=2)
axis(3, c(0,(1:5)*12), c("Subgrids:",as.character((1:5)*4)))
legend(45,.0006,c("Classic", "Adj", "AA"), lwd=c(2,2,2),col=c(3,4,5)).
```

На рис. 5.13 представлены графики упомянутых выше RV-оценок в зависимости от частоты выборки.



**Рис. 5.13.** Ядерные оценки и оценки в двух временных шкалах для реализованной волатильности

**RV-оценки.** В предыдущем разделе представлены различные оценки реализованной волатильности с использованием графиков сигнатур. Но анализ показывает, что следует весьма осторожно подходить к выбору типа используемой оценки, так же как к выбору параметров, необходимых для вычисления оценок. Для вычисления стандартных и модифицированных RV-оценок используется функция `rRealizedVariance`. Входные параметры для нее такие же, как и для функции `rSignature`. Некоторые примеры представлены ниже:

```
# Traditional Estimate at highest frequency
rRealizedVariance(x=msft.real.cts[[1]], type="naive", period=1)
[1] 0.004642229

# Traditional Estimate at one minute frequency
rRealizedVariance(x=msft.real.cts[[1]], type="naive", period=1,
args=list(align.period=60))
[1] 0.0004884795

# Traditional Estimate at 10 minute frequency
rRealizedVariance(x=msft.real.cts[[1]], type="naive", period=10,
args=list(align.period=60))
[1] 0.0005299257

# Bartlett Kernel Estimate with minute aligned data at 20 lags
rRealizedVariance(x=msft.real.cts[[1]], type="kernel", lags=20,
args=list(align.period=60, type="Bartlett"))
[1] 0.0003815077
```



где  $\mathbf{I}_{\{\cdot\}}$  — индикаторная функция множества. В этой модели хорошие новости имеют влияние  $\alpha_i$ , а плохие новости имеют влияние  $\alpha_i + \gamma_i$ .

- Класс моделей  $ARFIMA(k, d, l)$  (авторегрессионных фрактальных интегрированных скользящего среднего) для дискретного процесса  $\{Y_t\}$  определяется формулой:  $a(L)(1 - L)^d Y_t = b(L)\varepsilon_t$ , где  $a(L)$  и  $b(L)$  — полиномы порядка  $k$  от  $L$  в качестве аргумента (см. п. 5.1.8). При этом:

$$(1 - L)^d = F(-d; 1, 1; L) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(k - d)\Gamma(k + 1)^{-1}\Gamma(-d)^{-1}L^k.$$

- $FIGARCH(p, d, q)$ -модель (фрактальная интегрированная GARCH-модель) имеет вид (см. п. 5.1.8):

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1 - L)^d]\varepsilon_t^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2,$$

где  $\lambda(L) \equiv 1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d$  и  $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$

- *Оценивание параметров GARCH-моделей с произвольной плотностью* (см. п. 5.1.9 и п. 5.2.8). Пусть  $f(\eta_t(\theta); \eta)$  — плотность распределения случайной величины  $\eta_t(\theta) = \varepsilon_t(\theta) / \sigma_t(\theta)$ , среднее которой равно нулю, а дисперсия равна единице. Пусть  $(y_1, \dots, y_T)$  — выборка из ARCH-модели, а  $\psi$  — вектор параметров, которые входят в условное среднее, условную дисперсию и функцию плотности и которые необходимо оценить. Логарифмическая функция правдоподобия для  $t$ -го наблюдения имеет вид:

$$l_t(y_t; \psi) = \ln \{f[\eta_t(\theta)]\} - \frac{1}{2} \ln [\sigma_t^2(\theta)] \quad t = 1, 2, \dots$$

Переход от стандартизированных остатков  $\eta_t(\theta)$  к наблюдениям  $y_t$  соответствует следующему соотношению:  $f(y_t; \psi) = f(\eta_t(\theta)) |J|$ , где  $J = \frac{\partial \eta_t}{\partial y_t} = \frac{1}{\sigma_t(\theta)}$ .

- $VEC(p, q)$ -модель имеет вид (см. п. 5.2.3):  $\sigma_t = c + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^p \mathbf{G}_j \sigma_{t-j}$ , где  $\sigma_t = \text{vech}(\Sigma_t)$ ,  $\eta_t = \text{vech}(\varepsilon_t \varepsilon_t')$ ,  $\text{vech} \Sigma_t = (\sigma_{11t}, \dots, \sigma_{nnt})'$ ,  $\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{G}_j$  — квадратные матрицы порядка  $(n+1)n/2$ , а  $c$  — вектор с размерностью  $(n+1)n/2 \times 1$ . Число параметров в этой модели имеет порядок  $n^2$ .



и при помощи которых строится оценка дневных волатильностей. Идея, на которой основано использование реализованной волатильности, состоит в том, что если мы наблюдаем ценовой процесс в непрерывном времени, то можно по наблюдениям измерить волатильность. Очевидно, что на практике мы никогда не имеем наблюдения в непрерывном времени, но при использовании высокочастотных данных можно построить оценку волатильности, которая будет достаточно близка к своему фактическому значению. Ниже приводятся ключевые результаты по теме «реализованная волатильность».

- *Реализованная волатильность (RV)*. Для определения RV рассмотрим выборку  $\Delta$ -периодной доходности, которая вычисляется как  $y_t = p(t) - p(t - \Delta)$ , где длительность рабочего дня предполагается равной единице, в течение которого мы будем иметь  $n_t = [1/\Delta]$  доходностей. *Дневная реализованная волатильность* вычисляется как сумма квадратов соответствующих высокочастотных  $\Delta$ -доходностей, т. е.  $RV_{t+1} = \sum_{j=1}^{1/\Delta} y_{t+j\Delta}^2 = \sum_{i=1}^{n_t} y_{t,i}^2$ . При некоторых дополнительных предположениях реализованная волатильность является состоятельной оценкой так называемой интегрированной волатильности за соответствующий временной интервал, а именно:  $\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} RV_{t+1} = \int_t^{t+1} \sigma^2(s) ds$  (см. п. 5.3.2).
- При использовании высокочастотных данных существует проблема «баланса»: с одной стороны, статистическая теория указывает на необходимость использования большого числа наблюдений (выборка доходностей) для снижения погрешностей статистических выводов; с другой стороны, при использовании высокочастотных наблюдений свой вклад вносит так называемый рыночный микроструктурный шум, что сказывается на величине смещения оценки, которая растет вместе с частотой выборки (см. п. 5.3.2).
- Одно из возможных решений проблемы микроструктурного смещения, адаптированное к практическим расчетам, состоит в снижении частоты выборки. Предлагается использовать выборки доходностей, сформированных по наблюдениям цен с частотой 5 или 15 минут, вместо того чтобы использовать тиковые наблюдения. Эта процедура называется *прореживанием выборки* (см. п. 5.3.2). Другим более эффективным решением (с теоретической точки зрения) является использование *ядерных оценок* и *подвыборочных оценок* (см. пп. 5.3.3 и 5.3.4).

- Предположим, что  $p(t)^*$  — логарифм цены актива в момент време-

ми традиционно используется при моделировании ценообразования активов (см. п. 5.3.6). Он задается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:  $dp(t)^* = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + k(t)dq(t)$ , где  $\mu(t)$  — непрерывная функция с локально-ограниченной вариацией, стохастическая волатильность  $\sigma(t)$  строго положительна,  $W(t)$  — стандартное броуновское движение,  $q(t)$  — дискретный процесс, для которого  $dq(t) = 1$  отвечает скачку в момент времени  $t$ , а  $dq(t) = 0$  — отсутствию скачка;  $k(t)$  отвечает величине соответствующего скачка. Тогда имеем:  $\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} RV_{t+1} \times \times(\Delta) = \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds + \sum_{t < s \leq t+1} k^2(s)$ .

- Стандартизированная реализованная бистепенная вариация  $BV$  определяется как (см. п. 5.3.7):  $BV_{t+1}(\Delta) = \mu_1^{-2} \sum_{i=2}^{n_t} |y_{t,i}| |y_{t,i-1}|$ , где  $\mu_1 = \sqrt{2/\pi} = \mathbf{E}(|Z|)$  — математическое ожидание абсолютного значения случайной величины  $Z$ , имеющей стандартное нормальное распределение. Более того,  $\text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} BV_{t+1}(\Delta) = \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds$ . Эмпирический измеритель величины скачков определяется формулой  $J_{t+1}(\Delta) = \max[RV_{t+1}(\Delta) - BV_{t+1}(\Delta), 0]$ .
- Если предполагается, что  $ARFIMA(p, d, q)$ -модель описывает временной ряд реализованных волатильностей, тогда:  $\Phi(L)(1-L)^d \times \times(RV_{t+1} - \mu) = \Theta(L)u_t$  (см. п. 5.3.7).
- Мультипериодные реализованные волатильности определяются как нормированные суммы однопериодных волатильностей (см. п. 5.3.7). А именно:  $RV_{t,t+h} = h^{-1}[RV_{t+1} + RV_{t+2} + \dots + RV_{t+h}]$ , где обычно  $h = 5$  и  $h = 22$  для недельных и месячных волатильностей соответственно. Следует отметить, что  $RV_{t,t+1} = RV_{t+1}$ .

$HAR-RV$ -модель из работы [Corsi (2009)] имеет вид:

$$RV_{t,t+1} = \beta_0 + \beta_D RV_t + \beta_W RV_{t-5,t} + \beta_M RV_{t-22,t} + \epsilon_{t+1}.$$

## Глава 6

# Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций

Доказательства того, что не все совместные распределения экономических характеристик могут быть описаны при помощи многомерного нормального закона, широко представлены в различных работах, начиная с [Mills (1927)]. Наиболее распространенными статистиками, позволяющими охарактеризовать степень отклонения от нормального распределения, являются коэффициенты эксцесса и асимметрии. Последние исследования показывают, что для финансовых данных также наблюдается отклонение их совместного распределения от многомерного нормального закона а именно отклонение в форме зависимостей компонент анализируемого многомерного признака. Один из таких примеров — асимметрия зависимостей доходностей рыночных активов, которая больше в периоды спада на рынке, чем в периоды рыночного роста, см. [Erb et al. (1994)], [Longin, Solnik (2001)], [Ang, Chen (2002)], [Patton (2004, 2006a, б)] и др.

Основной вывод этих статей заключается в том, что многомерное нормальное распределение не является хорошей моделью для описания совместного распределения многих экономических и финансовых переменных. Это приводит к проблеме поиска более адекватных многомерных моделей. Теория копула-функций — один из возможных способов ее решения.



Начало теории копула-функций было положено работами [Hoeffding (1940)] и [Sklar (1959)], но статистическое моделирование с использованием копула-функций в приложениях появилось относительно недавно и относится к концу 1990-х гг. Количество статистических исследований на тему копула-функций увеличивается достаточно быстро, см. [Wang (1998)], [Frees, Valdez (1998)], [Embrechts et al. (1999)]. Сегодня копула-функции успешно применяются в финансах и страховании, биостатистике (например, [Lambert, Vandenhende (2002)]), гидрологии (например, [Zhang, Singh (2006)]) и климатологии (например, [Salvadori, De Michele (2007)]). Среди учебников по теории копула-функций следует отметить [Joe (1997)] и [Nelsen (1999)], где представлено введение в теорию, тогда как в [Cherubini et al. (2004)] и [Malevergne, Sornette (2006)] излагается использование техники копула-функций в финансовых приложениях.

Копула-функция является функцией, агрегирующей всю информацию относительно структуры зависимости между компонентами случайного вектора. Когда в качестве компонент копула-функции берутся частные функции распределения, которые необязательно принадлежат одному и тому же семейству распределений, получаем многомерную функцию распределения. Как следствие, эта теория позволяет достаточно гибко моделировать структуру зависимости между различными переменными, которые могут иметь разные частные распределения.

Несмотря на то что теория копула-моделей исследована относительно полно, проблема оценивания и статистические выводы для копула-моделей, в определенном контексте, все еще требуют дальнейших исследований, см. [Genest, Favre (2007)]. За последние годы предложены различные методы оценивания параметров копула-функций, начиная с параметрических [Jondeau, Rockinger (2003)], [Patton (2004, 2006a,б)], [Fantazzini (2009б)], полупараметрических [Genest et al. (1995)], [Beyersmann et al. (2003)], [Fantazzini (2010)] и заканчивая непараметрическими методами [Fermanian, Scaillet (2003)]. Более того, недавние исследования направлены на исследование «смеси» указанных выше методов, которые позволили бы сэкономить время на вычислениях [Bouyé et al. (2000)], [Marshall, Zeevi (2002)], [Cherubini et al. (2004)].

В данной главе будет представлен некоторый обзор теории копула-функций, основные методы оценивания, а также сделана попытка ответить на, вероятно, самый важный вопрос теории копула-функций: как следует подбирать копула-функцию под конкретные (имеющиеся в нашем распоряжении) исходные статистические данные?

## 6.1. Копула-функции

### 6.1.1. Определения и основные свойства

С помощью копула-функций описываются законы многомерного распределения вероятностей. Они определяются частными одномерными распределениями анализируемого многомерного закона и характером зависимостей, существующих между компонентами рассматриваемой многомерной случайной величины.

**Определение 6.1.** *Функция  $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$  от  $n$  переменных, определенная на единичном гиперкубе  $I^n = [0, 1]^n$  (т. е.  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ), называется копула-функцией, если она обладает следующими свойствами:*

- 1) область значений функции – единичный интервал  $[0, 1]$ ;
- 2) если  $u_i = 0$  по крайней мере для одного  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то  $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ ;
- 3)  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  для любых  $u_i \in [0, 1]$ ;
- 4)  $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$  является  $n$ -возрастающей функцией в том смысле, что для всех  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$  с  $a_i \leq b_i$  справедливо неравенство:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

где  $u_{j1} = a_j$  и  $u_{j2} = b_j$  для всех  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Например, если  $n = 2$ , четвертое свойство принимает следующий вид: для всех  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in [0, 1]^2$  с  $a_i \leq b_i$  мы имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_1+i_2} C(u_{1i_1}, u_{2i_2}) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i_1=1}^2 [(-1)^{i_1+1} C(u_{1i_1}, u_{21}) + (-1)^{i_1+2} C(u_{1i_1}, u_{22})] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (-1)^2 C(u_{11}, u_{21}) + (-1)^3 C(u_{11}, u_{22}) + (-1)^3 C(u_{12}, u_{21}) + \\ & \quad + (-1)^4 C(u_{12}, u_{22}) \geq 0 \end{aligned}$$

где  $u_{j1} = a_j$  и  $u_{j2} = b_j$  при  $j \in \{1, 2\}$ . Таким образом, свойство 4 равносильно тому, что

$$C(a_1, a_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(b_1, b_2) \geq 0. \quad (6.1)$$

Следовательно, (6.1) можно интерпретировать как:

$$\begin{aligned} &P(0 \leq qu_1 \leq qa_1, 0 \leq qu_2 \leq qa_2) - P(0 \leq qu_1 \leq qa_1, 0 \leq qu_2 \leq qb_2) - \\ &- P(0 \leq qu_1 \leq qb_1, 0 \leq qu_2 \leq qa_2) + \\ &+ P(0 \leq qu_1 \leq qb_1, 0 \leq qu_2 \leq qb_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Теперь сформулируем теорему Шкляра, которая показывает роль копула-функций в описании многомерных распределений вероятностей.

**Теорема 6.1 (теорема Шкляра).** Пусть  $H(\cdot)$  —  $n$ -мерная функция распределения с частными распределениями  $F_1, \dots, F_n$ . Тогда существует  $n$ -мерная копула-функция  $C(\cdot)$  такая, что для всех действительных  $x_1, \dots, x_n$ :

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (6.2)$$

Если все частные функции распределения непрерывны, то копула-функция определена единственным образом; в противном случае  $C(\cdot)$  определена единственным образом лишь на области определения  $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \dots \times \text{Ran } F_n$ , где  $\text{Ran}$  — область значений частных функций распределения. Обратно, если  $C(\cdot)$  — копула-функция, а  $F_1, \dots, F_n$  — некоторые одномерные функции распределения, то функция  $H(\cdot)$ , определяемая выражением (6.2), является совместной функцией распределения с частными распределениями  $F_1, \dots, F_n$ .

**Доказательство.** См. [Sklar (1959, 1996), [Joe (1997), [Nelsen (1999)].

Последнее утверждение теоремы представляет большой интерес в задаче моделирования многомерных функций распределения, поскольку из него следует, что можно связывать вместе любые  $n$  ( $n \geq 2$ ) одномерных функций распределения разного типа (не обязательно из одного семейства), используя любую копула-функцию, для того чтобы получить двумерные или многомерные функции распределения<sup>1</sup>.

**Следствие.** Пусть  $F_1^{(-1)}(\cdot), \dots, F_n^{(-1)}(\cdot)$  — обратные (в обобщенном смысле) функции частных распределений. Тогда для каждого

<sup>1</sup>О «не замеченной» разрабатывающими теорию копул авторами фундаментальной роли в развитии этой теории классической теоремы А.Н. Колмогорова, формулирующей условия, которым должна удовлетворять  $n$ -мерная функция  $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , чтобы быть функцией распределения, см. в работе [Благовещенский, 1999].

$(u_1, \dots, u_n)$  из единичного  $n$ -мерного куба существует единственная копула-функция  $C: [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такая, что

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)). \quad (6.3)$$

**Доказательство.** См. теорему 2.10.9 в [Nelsen (1999)].

Таким образом, копула-функция — это такая функция, которая, с использованием знания об одномерных частных распределениях, позволяет получить многомерную функцию распределения, поскольку функция распределения случайного вектора полностью описывает его вероятностную структуру, куда, в частности, входит структура зависимости его компонент. Копула-функции дают возможность разделить описание распределения случайного вектора на две части: частные распределения компонент и структура их зависимостей.

Перечислим кратко варианты использования результатов теоремы Шкляра и рассмотренного следствия:

- извлечение копула-функций из хорошо известных многомерных распределений, например, из многомерного нормального распределения, из многомерного распределения Стьюдента и т.д.;
- конструирование новых многомерных распределений, связывая произвольные одномерные распределения при помощи некоторой копула-функции;
- в то время как соотношение (6.2) обычно служит отправной точкой в задаче моделирования, соотношение (6.3) является теоретическим инструментом для получения копула-функции из многомерной функции распределения.

Следует отметить, что для дискретных распределений копула-функции имеют не столь простую форму, как в случае непрерывных распределений. Покажем это на следующем примере.

**Пример 6.1.** Рассмотрим две одинаковые кости, на которых выпадают два числа  $X_1$  и  $X_2$  из множества  $\{1, 2, \dots, 6\}$ . Предположим, что мы знаем значение  $X_1$  и можем делать ставки на значения  $X_2$ , которые выпадают на второй кости. Важным вопросом является следующий: существует ли взаимосвязь или зависимость между этими двумя случайными величинами, т. е. возможно ли получить некоторую информацию относительно значений  $X_2$ , зная  $X_1$ . Мы знаем, что каждая случайная величина полностью описывается своей функцией распределения  $F_1(x) = P(X_1 \leq x)$ . В нашем случае мы имеем  $F_1(x) = \frac{x}{6}$  для  $x = 1, 2, \dots, 6$ .

Однако в общем случае одномерная функция распределения не дает нам никакой информации относительно совместного распределения двумерной случайной величины  $(X_1, X_2)$ . Правда, в нашем случае предполагается независимость  $(X_1, X_2)$ , поэтому совместное распределение  $(X_1, X_2)$  имеет вид:

$$P(X_1 \leq qx_1, X_2 \leq qx_2) = F(x_1) \cdot F(x_2).$$

Для того чтобы получить полное описание  $(X_1, X_2)$ , мы использовали два элемента: частные распределения и тип взаимосвязи (в нашем случае — независимость). Возможность разделения между частными распределениями и зависимостью — это именно то, что утверждает теорема Шкляра. Поскольку мы рассматриваем дискретные частные распределения, то копула-функция будет определена единственным образом только на  $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2$ . В случае независимости имеем:

$$C\left(\frac{i}{6}; \frac{j}{6}\right) = \frac{i}{6} \cdot \frac{j}{6}, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Любая копула-функция, удовлетворяющая этому ограничению, является подходящей: например,  $C(u, v) = u \cdot v$  будет естественным выбором.

Важное свойство, которым обладают все копула-функции — это инвариантность относительно строго возрастающих преобразований случайных величин (см. приведенную ниже теорему 6.2).

**Теорема 6.2.** *Рассмотрим  $n$  случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ , зависимость между которыми определяется копула-функцией  $C(\cdot)$ . Если преобразования  $T_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определяются строго возрастающими функциями (т. е.  $\partial_x T_i > 0$ ), то структура зависимости случайных величин  $T_1(X_1), \dots, T_n(X_n)$  определяется той же самой копула-функцией  $C(\cdot)$ .*

**Доказательство.** См. [Schweizer, Wolff (1976, 1981)], для двумерного случая — [Malevergne, Sornette (2006)].

Последнее утверждение означает, что *строго возрастающие преобразования не меняют структуру зависимости*. Это значит, что при заданных частных распределениях сохраняется структура зависимости, которая определяется копула-функцией.

Более того, можно показать, что любая копула-функция ограничена так называемыми *границами Фреше — Хёффдинга*:

где

$$W(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0),$$

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n).$$

В качестве примера рассмотрим две равномерно распределенные на  $[0, 1]$  случайные величины  $U_1$  и  $U_2$ . Если  $U_1 = U_2$ , то эти две случайные величины имеют копула-функции вида

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2) = \min(u_1, u_2)$$

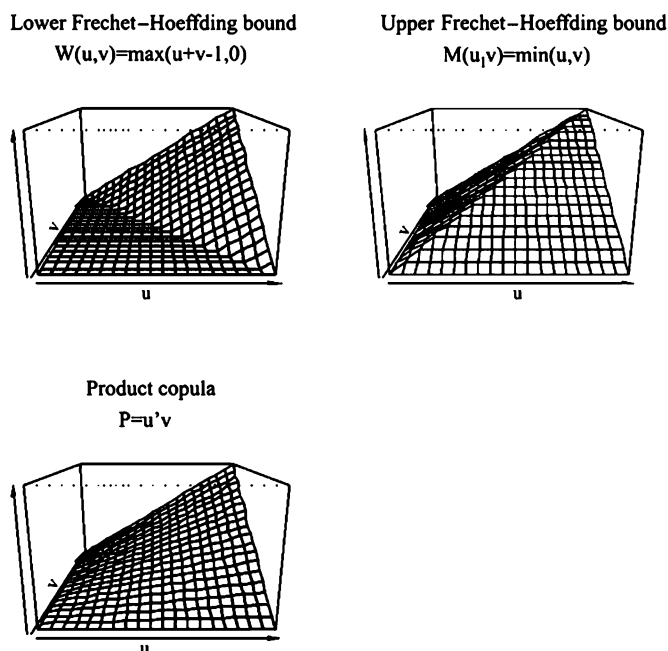
и называются абсолютно зависимыми.

Ту же самую копула-функцию можно получить, если взять  $X_2 = T(X_1)$ , где  $T(\cdot)$  — монотонно возрастающее преобразование. Такие случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  называются *комонотонными*. Прямо противоположным понятию комонотонности является *противомонотонность* случайных величин. В качестве примера возьмем равномерные случайные величины  $(U_1, U_2)$ , для которых  $U_2 = 1 - U_1$ . Копула-функция случайного вектора  $(U_1, U_2)$  равна

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2) =$$

$$= P(U_1 \leq u_1, 1 - u_2 \leq U_1) = u_1 + u_2 - 1 \quad \text{при} \quad u_1 + u_2 > 1.$$

В противном случае она равна нулю (рис. 6.1).



**Рис. 6.1.** Графики нижней ( $W$ ) и верхней ( $M$ ) границ Фреше — Хёфдинга

В двумерном случае границы Фреше—Хёффдинга являются копула-функциями, но для случаев большей размерности нижняя граница Фреше—Хёффдинга  $W$  уже не является  $n$ -возрастающей (см. свойство 4 в Определении 6.1). Однако неравенство в левой части нельзя улучшить, поскольку для любого фиксированного  $u$  из единичного  $n$ -куба существует  $C(\cdot)$  такая, что  $W(u) = C(u)$ , см. доказательство теоремы 2.10.12 в [Nelsen (1999)].

Копула-функции равномерно непрерывны и (почти всюду) дифференцируемы по каждому из аргументов — см. теоремы 2.2.4 и 2.2.7 в [Nelsen (1999)]. Более детальная информация относительно этих и других свойств приведена в [Joe (1997)], [Nelsen (1999, 2006)].

### 6.1.2. Плотности копула-функций

Для копула-функций, аналогично функциям распределения, можно определить понятие плотности. В частности, плотность  $c(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , ассоциированная с копула-функцией  $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , определяется соотношением

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1, \dots, \partial u_n}.$$

Плотность может быть использована для того, чтобы определить так называемые *абсолютно непрерывную*  $A_C$  и *сингулярную*  $S_C$  компоненты копула-функции  $C(\cdot)$ :

$$A_C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n C(s_1, s_2, \dots, s_n)}{\partial s_1 \dots \partial s_n} ds_1 \dots ds_n,$$

$$S_C(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(u_1, u_2, \dots, u_n) - A_C(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Копула-функция, для которой  $C(\cdot) = A_C(\cdot)$  на  $I^n$ , называется *абсолютно непрерывной*. В противном случае (т.е. при  $C = S_C$  на  $I^n$ ) копула-функция называется *сингулярной*.

Существуют копула-функции, которые имеют как абсолютно непрерывную, так и сингулярную компоненты. Например, копула-функция  $P = u_1 u_2 u_3$  является абсолютно непрерывной, поскольку

$$\frac{\partial C(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1, \partial s_2, \partial s_3} = 1$$

и для любого  $(u_1, u_2, u_3) \in I^3$  имеем:

$$A_C(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \int_0^{u_3} \frac{\partial C(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1, \partial s_2, \partial s_3} ds_1 ds_2 ds_3 = u_1 u_2 u_3 = P.$$

Более того, применяя следствие теоремы Шкляра и рассматривая непрерывные случайные величины, можно видеть, что плотность копула-функции  $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$  ассоциирована с плотностью совместной функции распределения  $H(\cdot)$ , обозначенной как  $f_H(\cdot)$ , следующим образом (каноническое представление):

$$f_H(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1), \dots, \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \\ = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

где

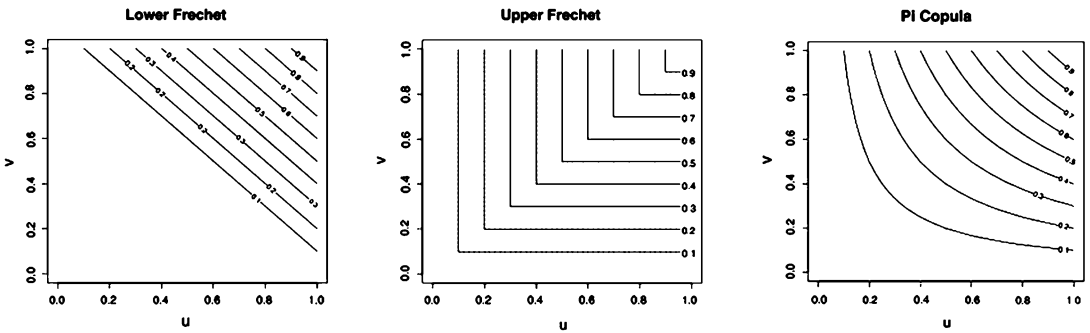
$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}. \quad (6.4)$$

### 6.1.3. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: двумерные границы Фреше — Хёффдинга и копула-функция, отвечающая случаю независимости

Если необходимо изобразить линии уровня двумерных границ Фреше — Хёффдинга и копула-функции, соответствующей случаю независимости, то для этого можно использовать следующий код пакета R (результаты представлены на рис. 6.2):

```
library(fCopulae)
# Generate Grid:
N = 50; uv = grid2d(x = (0:N)/N); u = uv[,1]; v = uv[,2]
# Compute Frechet and Product Copulae:
W = matrix(apply(cbind(u+v-1, 0), 1, max), ncol = N+1)
Pi = matrix(u*v, ncol = N+1)
M = matrix(apply(cbind(u, v), 1, min), ncol = N+1)
# Create Perspective Plots:
persp(z = W, theta = -40, phi = 30, main = "Lower Frechet",
      cex = 0.5, ticktype = "detailed", col = "steelblue")
persp(z = Pi, theta = -40, phi = 30, main = "Pi Copula",
      cex = 0.5, ticktype = "detailed", col = "steelblue")
persp(z = M, theta = -40, phi = 30, main = "Upper Frechet",
      cex = 0.5, ticktype = "detailed", col = "steelblue")
# Create Contour Plots:
contour(W, xlab = "u", ylab = "v", main = "Lower Frechet")
contour(Pi, xlab = "u", ylab = "v", main = "Pi Copula")
contour(M, xlab = "u", ylab = "v", main = "Upper Frechet")
```





**Рис. 6.2.** Линии уровня двумерных границ Фреше — Хёфдинга и копула-функции, отвечающей случаю независимости

## 6.2. Эллиптические копула-функции

### 6.2.1. Обзор

Класс эллиптических распределений включает главным образом класс симметричных распределений, который весьма популярен в актуарной математике, страховании и финансах. Этот класс включает интересные примеры многомерных распределений, и многие из них имеют некоторые общие свойства с многомерным нормальным распределением. Они позволяют моделировать многомерные экстремальные события, формируя зависимость, не совпадающую с зависимостью многомерного нормального распределения, и использовать распределение с большим эксцессом, чем эксцесс нормального распределения. Кроме того, с их помощью можно моделировать феномен «тяжелых хвостов», который часто наблюдается для финансовых данных, см. [Embrechts et al. (1999)], [Schmidt (2002)].

Эллиптические копула-функции — это попросту копула-функции многомерных распределений эллиптического типа. Если следовать работе [Fang et al. (1987)], то эллиптические распределения определяются следующим образом.

**Определение 6.2** (эллиптические распределения). Пусть  $\mathbf{X}$  есть  $n$ -мерный случайный вектор и  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — симметричная и неотрицательно определенная матрица. Если существуют  $\mu \in \mathbb{R}^n$  и функция  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  такие, что характеристическая функция  $\phi_{\mathbf{X}-\mu}(t)$  вектора  $\mathbf{X} - \mu$  имеет вид

$$\phi_{\mathbf{X}-\mu}(t) = \exp(it'\mu)\psi\left(-\frac{1}{2}t'\Sigma t\right)$$

для любого  $t \in \mathbb{R}^n$ , то  $\mathbf{X}$  называют случайным вектором, имеющим эллиптическое распределение эллиптического типа с параметрами  $\mu$  и  $\Sigma$ .

Копула-функция  $C(\cdot)$  называется *эллиптической*, если она отвечает распределению эллиптического типа. Функция плотности распределения эллиптического типа, если она существует, имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\gamma}{\sqrt{|\Sigma|}} g((\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

для некоторой функции  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , которая удовлетворяет условию:  $\int_0^\infty g(x) dx < \infty$ . Функцию  $g(\cdot)$  называют оператором плотности распределения эллиптического типа или *генерирующей функцией*, см. [Fang et al. (1987)]. Нормирующая константа  $\gamma$  может быть определена явным образом с использованием перехода к полярным координатам, см. [Landsman, Valdez (2003)]. В результате получим:

$$\gamma = \left( 2\pi \int_0^\infty g(z) dz \right)^{-1}.$$

В качестве примеров распределений эллиптического типа следует привести нормальное распределение, распределение Коши, распределение Стьюдента, логистическое распределение, распределение Лапласа, распределение Котца и экспоненциальное распределение, см. табл. 6.1.

**Таблица 6.1.** Список генерирующих функций  $g(t)$  и нормирующих констант  $\gamma$  для некоторых копула-функций эллиптического типа

Распределение	Генератор	Константа
Нормальное	$e^{-t/2}$	$(2\pi)^{-1}$
Коши	$(1 + 2t)^{-3/2}$	$(2\pi)^{-1}$
Стьюдента	$(1 + \frac{2t}{\nu})^{-\frac{\nu-2}{2}}$	$2\pi)^{-1}$
Логистическое	$e^t(1 + e^{-t})^{-2}$	$\pi^{-1}$
Лапласа	$e^{-\sqrt{t}}$	$(2\pi)^{-1}$
Котца	$e^{-rt/2}$	$r(2\pi)^{-1}$
Экспоненциальное	$e^{-r(t/2)^s}$	$sr^{1/s}(2\pi\Gamma(1/s))^{-1}$

Отметим, что в некоторых работах используются иные определения генерирующих функций  $g(\cdot)$ , где  $t/2$  заменено  $t$ , что влияет на значение нормирующих констант  $\gamma$ .

**Пример 6.2.** Рассмотрим двумерный случай. Предположим  $\mathbf{X} = (X, Y)'$  и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad |\Sigma| = 1 - \rho^2, \quad \text{Рассмотрим электронные библиотеки}$$

Тогда  $\mathbf{X}$  имеет функцию плотности распределения

$$f_{\rho}(x, y) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2}} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой Шкляра двумерная копула-функция эллиптического типа имеет вид:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{F_g^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_g^{-1}(u_2)} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2}\right) dx dy. \quad (6.5)$$

Далее более детально рассмотрим две наиболее распространенные копула-функции эллиптического типа, а именно нормального распределения и распределения Стьюдента.

### 6.2.2. Нормальная копула-функция

Копула-функция двумерного нормального распределения с коэффициентом корреляции  $\rho$  может быть вычислена из уравнения (6.5) при  $g = e^{-t/2}$  и  $\gamma = 1/(2\pi)$ :

$$C(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u_2)} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}\right) dx dy,$$

что может быть представлено в виде:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi^2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho),$$

где  $\Phi^2(\cdot)$  обозначает функцию двумерного нормального распределения с единичными дисперсиями компонент, корреляцией  $\rho$  и нулевыми средними значениями, а  $\Phi^{-1}(\cdot)$  — обратная функция для одномерного стандартного нормального распределения.

В общем случае многомерная нормальная копула-функция определяется следующим образом:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi^n(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n); \Sigma),$$

где  $\Phi^n(\cdot, \dots, \cdot; \Sigma)$  — это  $n$ -мерная нормальная функция распределения с нулевыми средними значениями и ковариационной матрицей  $\Sigma$ .

Плотность нормальной копула-функции может быть получена из уравнения (6.4) с использованием канонического представления:

$$\begin{aligned}
 c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) &= \frac{f^{\text{Gaussian}}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{\text{Gaussian}}(x_i)} = \\
 &= \frac{(2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{1/2} \exp(-\frac{1}{2}x' \Sigma^{-1}x)}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x_i^2)} = \\
 &= \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta'(\Sigma^{-1} - \mathbf{I})\zeta\right),
 \end{aligned}$$

где  $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))'$  — вектор, компонентами которого являются значения обратной функции для стандартного одномерного гауссовского распределения в точках  $u_i = \Phi(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Представим основные шаги алгоритма моделирования нормальной копула-функции (более детальное описание моделирования копула-функции см. в [Cherubini et al. (2004), [McNeil et al. (2005)]):

- найти матрицу разложения Холецкого  $\mathbf{A}$  для корреляционной матрицы  $\Sigma$ ;
- смоделировать из стандартного нормального распределения  $n$  независимых случайных величин  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)'$ ;
- взять  $\mathbf{x} = \mathbf{Az}$ ;
- вычислить компоненты  $u_i = \varphi(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\varphi(\cdot)$  — одномерное стандартное нормальное распределение.

В результате получим вектор  $(u_1, \dots, u_n)'$ , являющийся реализацией случайного вектора из  $n$ -мерной гауссовской копула-функции.

### 6.2.3. $T$ копула-функция (копула Стьюдента)

Копула-функция для двумерного распределения Стьюдента с корреляцией  $\rho$  может быть получена из формулы (6.5) при

$$g = \left(1 + \frac{2t}{\nu}\right)^{\frac{-\nu-2}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi}.$$

Для  $T$  копула-функции справедливо соотношение:

где  $T^2(\cdot, \cdot; \rho, \nu)$  — функция распределения двумерного распределения Стьюдента с корреляцией  $\rho$  и  $\nu$  степенями свободы;  $t_\nu^{-1}(\cdot)$  — обратная функция одномерного распределения Стьюдента. При  $\nu \rightarrow \infty$  копула-функция Стьюдента сходится к нормальной копула-функции, а при  $\nu \rightarrow 1$  сходится к копула-функции распределения Коши.

В общем случае многомерная  $T$  копула-функция определяется следующим образом:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma, \nu) = T^n(t^{-1}(u_1), t^{-1}(u_2), \dots, t^{-1}(u_n); \Sigma, \nu),$$

а плотность  $T$  копула-функции может быть получена из уравнения (6.4) и канонического представления:

$$c(t_\nu(x_1), \dots, t_\nu(x_n)) = |\Sigma|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left[ \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \right]^n \frac{\left(1 + \frac{\zeta' \Sigma^{-1} \zeta}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

где  $\zeta = (t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))'$  — вектор, компонентами которого являются значения обратной функции распределения Стьюдента в точках  $u_i = t_\nu(x_i)$ .

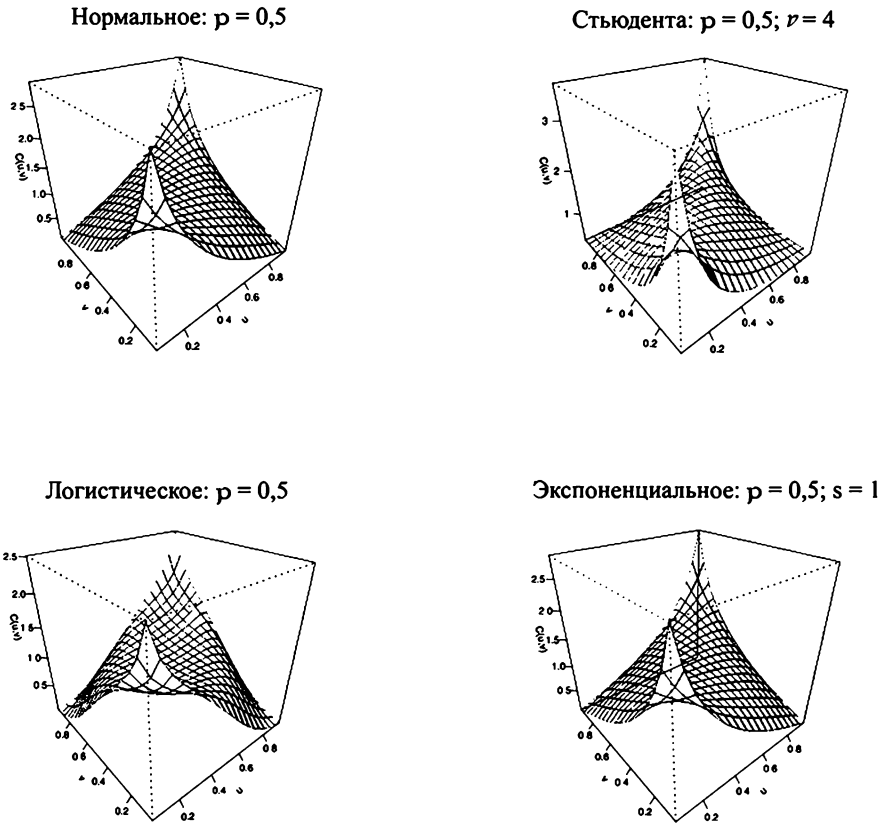
Приведем алгоритм моделирования наблюдений, подчиняющихся распределению с  $T$  копула-функцией:

- найти матрицу разложения Холецкого  $\mathbf{A}$  матрицы  $\Sigma$ ;
- смоделировать  $n$  независимых случайных величин из стандартного нормального распределения,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)'$ ;
- смоделировать случайную величину  $s$  из  $\chi_\nu$ -распределения, не зависящую от  $\mathbf{z}$ ;
- определить вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ ;
- положить  $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\nu}}{s}\mathbf{y}$ ;
- определить компоненты  $u_i = t_\nu(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $t_\nu(\cdot)$  — одномерное стандартное распределение Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы.

Вектор  $(u_1, \dots, u_n)'$  смоделирован из  $n$ -мерной  $T$  копула-функции.

Нормальная и  $T$  копула-функции весьма популярны при анализе

высокой размерности, являясь при этом относительно легко оцениваемыми. Кроме того, они позволяют генерировать наблюдения при помощи относительно простых алгоритмов. На рис. 6.3 представлены графики плотностей некоторых эллиптических копула-функций, построенных с использованием функции *fcopulae* из пакета *R*.



**Рис. 6.3.** Плотности эллиптических копула-функций: нормальное распределение, распределение Стьюдента, логистическое и экспоненциальное распределения. Параметры указаны над соответствующими им графиками

**Обобщение: сгруппированные  $T$  копула-функции.** Сгруппированные  $T$  копула-функции впервые были предложены в работах [Daul et al. (2003)] и [Demarta, McNeil (2005)]. Калибровка таких копула-функций не сложнее, чем калибровка  $T$  копула-функций, но для первых имеется возможность определять различные структуры зависимости для подгрупп компонент вектора из  $T$  копула-функции.

Пусть  $\mathbf{Z} \in N_n(0, \mathbf{R})$ , где  $\mathbf{R}$  — ковариационная матрица размерности  $(n \times n)$  с единичными диагональными элементами. Далее рассмотрим случайную величину  $U$ , равномерно распределенную на отрезке  $[0, 1]$  и не зависящую от  $\mathbf{Z}$ . Пусть через  $G_\nu(\cdot)$  обозначена функция распределения случайной величины  $\sqrt{\nu/\chi_\nu^2}$ , где  $\chi_\nu^2$  — случайная величина, распределенная по закону  $\chi_\nu^2$ .

имеющая хи-квадрат распределение с  $\nu$  степенями свободы. Кроме того, задано разбиение множества  $1, \dots, n$  на  $m$  подмножеств с размерами  $s_1, \dots, s_m$  (т.е.  $s_1, \dots, s_m \geq 1$ ,  $s_1 + \dots + s_m = n$ ) и для каждого  $k = 1, 2, \dots, m$  задано число степеней свободы  $\nu_k$ . Возьмем  $W_k = G_{\nu_k}^{-1}(U)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , и  $Y = (W_1 Z_1, \dots, W_1 Z_{s_1}, W_2 Z_{s_1+1}, \dots, W_2 Z_{s_1+s_2}, \dots, W_m Z_n)$ . Случайная величина  $Y$  имеет так называемое сгруппированное  $t$ -распределение. Наконец, определим

$$U = (t_{\nu_1}(Y_1), \dots, t_{\nu_1}(Y_{s_1}), t_{\nu_2}(Y_{s_1+1}), \dots, t_{\nu_2}(Y_{s_1+s_2}), \dots, t_{\nu_m}(Y_n)).$$

Случайный вектор  $U$  имеет распределение на  $[0, 1]^n$ , а его компоненты имеют равномерное распределение на  $[0, 1]$ . Будем называть распределение вектора  $U$  сгруппированной  $T$  копула-функцией.

Отметим, что  $(Y_1, \dots, Y_{s_1})$  имеет многомерное  $T$ -распределение с  $\nu_1$  степенями свободы, и для  $k = 1, \dots, m - 1$  вектор  $(Y_{s_1+\dots+s_k+1}, \dots, Y_{s_1+\dots+s_{k+1}})$  имеет многомерное  $T$ -распределение с  $\nu_{k+1}$  степенями свободы. Соответствующее распределение подвектора вектора  $U$  представляет собой  $T$  копула-функцию с  $\nu_{k+1}$  степенями свободы, для  $k = 0, \dots, m - 1$ . Для сгруппированной  $T$  копула-функции нет простого выражения для плотности. Однако существует весьма полезная аппроксимация для автокорреляции (в предположении ее постоянства), полученная в работе [Daul et al. (2003)]:

$$\rho_{ij}(z_i, z_j) \approx \sin(\pi \tau_{ij}(u_i, u_j)/2),$$

где  $i$  и  $j$  принадлежат различным группам, а  $\tau_{ij}$  — парный коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Эта аппроксимация позволяет производить оценку параметров методом максимального правдоподобия независимо для каждой подгруппы. В работе [Fantazzini (2009a)] представлено обобщение модели из [Daul et al. (2003)], в котором рассматривается динамическая структура корреляционной матрицы  $R_t$ .

#### 6.2.4. Численные примеры: оценивание эллиптических копула-функций

**Нормальная копула-функция.** Выше было показано, как, применяя теорему Шкляра и используя соотношение между функцией распределения и ее плотностью, можно получить плотность нормальной (гауссовской) копула-функции:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \frac{f^{\text{Gaussian}}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{\text{Gaussian}}(x_i)} = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \zeta_t' (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \zeta_t \right],$$

где  $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))'$ , а  $u_i = \Phi(x_i)$ ; логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$l^{Gaussian}(\theta) = -\frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta_t' (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \zeta_t.$$

Если логарифмическая функция правдоподобия дифференцируема по параметрам  $\theta$ , а решение уравнений  $\partial_{\theta} l(\theta) = 0$  дает точку *глобального* максимума функции  $l(\theta)$ , можно получить оценку максимального правдоподобия для ковариационной матрицы  $\hat{\theta}_{ML} = \hat{\Sigma}$  гауссовской копула-функции:

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma}^{-1} l^{Gaussian}(\theta) = \frac{T}{2} \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \zeta_t \zeta_t' = 0,$$

а следовательно,

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t \zeta_t',$$

т. е. получаем классическую оценку для ковариационной матрицы. Следовательно, в качестве приближенной оценки корреляционной матрицы можно использовать матрицу:

$$\hat{\mathbf{R}} = (\text{diag } \hat{\Sigma})^{-1/2} \hat{\Sigma} (\text{diag } \hat{\Sigma})^{-1/2}. \quad (6.6)$$

**$T$  копула-функция.** Плотность  $T$  копула-функции равна:

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) &= \frac{f^{Student}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{Student}(x_i)} = \\ &= \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left[ \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \right]^n \frac{\left(1 + \frac{\zeta_t' \Sigma^{-1} \zeta_t}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\zeta_{it}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}, \end{aligned}$$

а логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l^{Student}(\theta) = -T \ln \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} - nT \ln \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{\nu+n}{2} \times$$



В случае  $T$  копула-функции невозможно получить аналитическое выражение для оценки максимального правдоподобия, поэтому необходимо использовать численные алгоритмы максимизации функции правдоподобия. Однако в случае большой размерности  $T$  копула-функции такие алгоритмы являются слишком затратными по времени. В связи с этим предлагаются альтернативные алгоритмы, многошаговые параметрические или полупараметрические подходы. Рассмотрим три наиболее часто применяемых метода: первый из них предложен в работе [Bouyé et al. (2000)] и основан на процедуре рекурсивной оптимизации для корреляционной матрицы; второй представлен в работе [Marshall, Zeevi (2002)] и базируется на использовании оценки ранговой корреляции Кендалла; третий является смешанным параметрическим методом и основан на методах моментов и максимального правдоподобия [Chen et al. (2004)].

### Метод 1 [Bouyé et al. (2000)].

1. Используя эмпирические функции одномерных частных распределений, преобразуем  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ ,  $t = 1, \dots, T$ , к приблизительно равномерно распределенным  $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$ .

2. Для каждого значения степени свободы  $\nu$  из рассматриваемого интервала значений оцениваем корреляционную матрицу  $\mathbf{R}_\nu$ :

а) для каждого фиксированного  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) положим:

$$\zeta_t = (t_\nu^{-1}(\hat{u}_{1t}), \dots, t_\nu^{-1}(\hat{u}_{nt}))';$$

б) пусть  $\hat{\Sigma}$  — корреляционная матрица для гауссовской копула-функции, оцениваемая по формуле (6.6), положим  $\hat{\Sigma}_{\nu,1} = \hat{\Sigma}$ ;

в) пусть  $\hat{\Sigma}_{\nu,k+1}$  удовлетворяет следующей рекурсивной схеме:

$$\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} = \frac{\nu + n}{T\nu} \sum_{t=1}^T \zeta_t \zeta_t' \left( 1 + \zeta_t \Sigma_{\nu,k}^{-1} \zeta_t' / \nu \right)^{-1};$$

г) перемасштабируем элементы матрицы следующим образом:

$$\left( \hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{i,j} = \frac{\left( \hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{i,j}}{\sqrt{\left( \hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{i,i} \left( \hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{j,j}}},$$

в результате получим, в частности, единичные диагональные элементы;

д) повторяем шаги в)–г) до тех пор, пока  $\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} = \hat{\Sigma}_{\nu,k}$  и положим

3. Оценим  $\nu$  путем максимизации логарифмической функции правдоподобия плотности  $T$  копула-функции:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu} \sum_{t=1}^T \ln c^{Student}(\hat{u}_{1,t}, \dots, \hat{u}_{n,t}; \hat{\Sigma}_{\nu}, \nu).$$

**Метод 2 [Marshall, Zeevi (2002)].**

Предыдущая процедура является вычислительно трудоемкой в случае большой обучающей выборки. Более того, она может давать неустойчивые результаты в ситуациях, когда существует  $k$  ( $k \geq 1$ ), для которого матрица  $\hat{\Sigma}_{\nu,k}$  близка к вырожденной. Для преодоления этой проблемы в работе [Marshall, Zeevi (2002)] предлагается следующий алгоритм.

1. Используя эмпирические функции одномерных частных распределений, преобразуем  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ ,  $t = 1, \dots, T$ , к приблизительно равномерно распределенным  $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$ .

2. Оценим  $\hat{\Sigma}$  с использованием непараметрической оценки рангового коэффициента Кендалла [Lindskog et al. (2003)]:

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\tau}_{ij}\right), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Как указано в работах [Lindskog (2000)], [Genest et al. (1995)], если имеется два временных ряда  $X_t$  и  $Y_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , то состоятельной оценкой коэффициента Кендалла будет:

$$\hat{\tau}_{i,j} = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{i < j} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)], \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

3. Оценим  $\nu$  путем максимизации логарифмической функции правдоподобия плотности  $T$  копула-функции:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu} \sum_{t=1}^T \ln c^{Student}(\hat{u}_{1t}, \dots, \hat{u}_{nt}; \hat{\Sigma}; \nu).$$

**Метод 3 [Chen et al. (2004)].**

1. Используя эмпирические или параметрически оцененные функции одномерных частных распределений, преобразуем  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ ,  $t = 1, \dots, T$ , к приблизительно равномерно распределенным  $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$ .

2. Пусть  $\hat{\mathbf{R}}$  — корреляционная матрица для гауссовской копула-функции, оцененной с использованием уравнения (6.6). Положим  $\hat{\Sigma}_{Gaussian} = \hat{\mathbf{R}}$ .

3. Оценим  $\nu$  путем максимизации логарифмической функции правдоподобия плотности  $T$  копула-функции:

$$\hat{\nu} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c^{Student}(\hat{u}_{1t}, \dots, \hat{u}_{nt}; \hat{\Sigma}_{Gaussian}; \nu).$$

4. Пусть  $\zeta_{\nu t} = (t_{\nu}^{-1}(\hat{u}_{1t}), \dots, t_{\nu}^{-1}(\hat{u}_{nt}))'$ . Наконец, используя уравнение (6.6), вычислим:

$$\hat{\Sigma}_{Student} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_{\nu t} \zeta_{\nu t}'.$$

Здесь также могла быть применена итеративная процедура, но авторы работы [Chen et al. (2004)] не делали этого. Однако после первого шага разница между фактической ковариационной матрицей и ее оценкой весьма мала.

### 6.2.5. Эмпирические приложения в статистическом пакете $R$ : эллиптические копула-функции

В модуль «fCopulae» входит множество интересных функций, позволяющих исследовать эллиптические функции. Приведем некоторые команды:

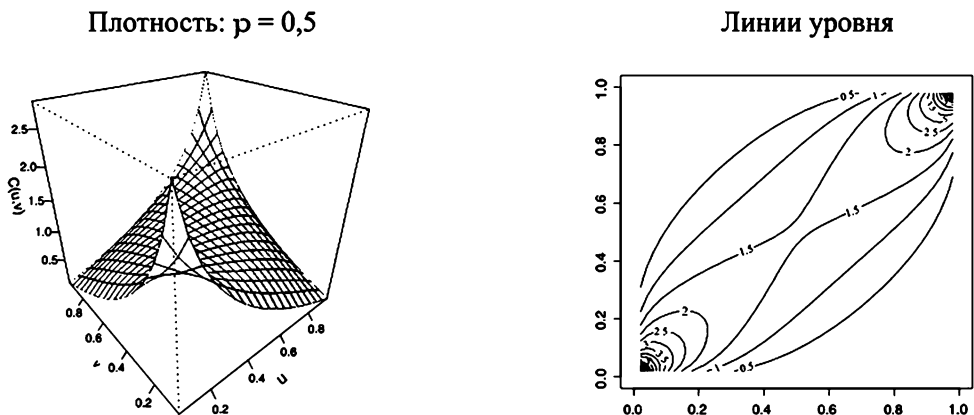
<i>fscopulae</i> - функция	Описание
ellipticalList	список доступных эллиптических копула-функций
ellipticalParam	установка параметров по умолчанию
ellipticalRange	диапазон допустимых значений коэффициента корреляции
ellipticalCheck	проверка принадлежности коэффициента корреляции допустимому диапазону

Для функции распределения и плотностей имеются следующие команды:

<i>f</i> copulae- функция	Описание
rellipticalCopula	моделирование наблюдений из эллиптической копула-функции
pellipticalCopula	вычисление значения эллиптической копула-функции
dellipticalCopula	вычисление значения плотности эллиптической копула-функции
rellipticalSlider	график случайных величин, смоделированных из эллиптической копула-функции
pellipticalSlider	график функции распределения
dellipticalSlider	график функции плотности

Если необходимо изобразить график функции плотности и линий уровня нормальной копула-функции, нужно использовать следующие команды (результат см. на рис. 6.4):

```
# Generate the 2D Grid:
N = 50; x = (0:N)/N; uv = grid2d(x); u = uv$x; v = uv$y
# Compute the Normal Copula Density:
c.uv = dellipticalCopula(u, v, rho = 3/4, type = "norm",
output = "list")
# Create a Perspective Plot:
persp(c.uv, theta = -40, phi = 30, ticktype = "detailed",
col = "steelblue", main = "Normal Copula Density", cex = 0.5)
# Create a Contour Plot:
contour(c.uv, nlevels = 20, main = "Normal Copula Density",
cex = 0.5)
```



**Рис. 6.4.** График плотности нормальной копула-функции и ее линий уровня

Для представления о графике эллиптической копула-функции и ее плотности при различном выборе параметров рекомендуем воспользоваться «слайдером» функций:  
 Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

```
# Start Slider for Perspective Distribution Plots:
pellipticalSlider()
11cm! isn't in document
# Start Slider for Perspective Density Plots:
dellipticalSlider()
```

В случае, если необходимо оценить эллиптические копула-функции и сгенерировать соответствующие им наблюдения, можно использовать следующий код:

```
# Estimation of 100 Samples:
est = NULL
for (i in 1:100)
R = ellipticalCopulaSim(n = 100, rho = 0.6, param = 4, type = "t")
ans = ellipticalCopulaFit(R, type = "t")
ans=ans$par
est = rbind(est, ans)
# Print the Result:
for (i in 1:2) print(c( mean = mean(est[, i]), sd = sd(est[, i]) ) ) )
# Make a kernel density of the 100 estimates
dens1=density(est[,1]) plot(dens1,main="kernel density of estimated Rho")
dens2=density(est[,2]) plot(dens2,main="kernel density of estimated NU")
```

## 6.3. Архимедовы копула-функции

### 6.3.1. Основные понятия и определения

Архимедовы копула-функции обеспечивают аналитическую гибкость и широкий спектр различных мер зависимости. По следующим причинам эти копула-функции могут быть использованы в широком диапазоне приложений:

- *архимедовы копула-функции могут быть представлены в явном аналитическом виде*, в отличие от семейства эллиптических копула-функций, которые определяются в неявной форме;
- *архимедовы копула-функции допускают относительно простое построение, включая вычислительную реализацию* (см. табл. 6.2);
- *многие параметрические семейства копула-функций принадлежат* этому классу;
- *архимедовы копула-функции не ограничены обязательным наличием радиальной симметрии*, что свойственно случаю нормальной копула-функции или общему случаю эллиптических копула-функций. Это является преимуществом, так как во многих фи-

зависимость между большими убытками, чем между большими доходами.

Двумерные архимедовы копула-функции могут быть определены следующим образом.

**Определение 6.3.** Рассмотрим непрерывную, строго убывающую и выпуклую функцию  $\phi(u)$  с неотрицательными значениями, определенную при  $u \in [0, 1]$  и удовлетворяющую условию  $\phi(1) = 0$  (см. рис. 6.5). Определим псевдообратную функцию  $\phi^{[-1]}(t)$  соотношением:

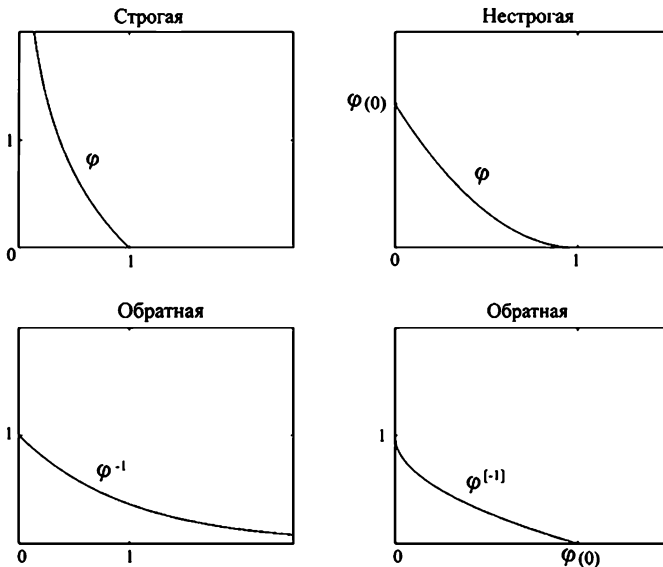
$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & \text{для } 0 \leq t < \phi(0); \\ 0 & \text{для } t \geq \phi(0), \end{cases}$$

где  $\phi^{-1}(t)$  — обычная обратная функция к функции  $\phi(u)$ .

Тогда функцию  $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , определенную как:

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}[\phi(u_1) + \phi(u_2)], \tag{6.7}$$

называют архимедовой копула-функцией с генератором  $\phi(\cdot)$ . Более того, если  $\phi(0) = \infty$ , то псевдообращение дает обычную обратную функцию, т. е.  $\phi^{[-1]}(\cdot) = \phi^{-1}(\cdot)$ , а  $\phi(\cdot)$  и  $C(\cdot)$  в этом случае называют строгим генератором и строгой архимедовой копула-функцией, соответственно (в противном случае они называются нестрогими), см. рис. 6.5.



**Рис. 6.5.** Строгие и нестрогие генераторы и их обращения

В работе [Nelsen (1999)] представлен список из 22 однопараметрических двумерных архимедовых копула-функций. Этот список вместе с генерирующими функциями  $\phi(\cdot)$  и соответствующими диапазонами параметра  $\alpha$  воспроизведен в табл. 6.2.

Таблица 6.2. Список архимедовых копула-функций

Номер	$C_\alpha(u, v)$	Генератор $\phi_\alpha(t)$	Диапазон параметра $\alpha$
1	$\max([u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}, 0)$	$(t^{-\alpha} - 1)/\alpha$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
2	$\max(1 - [(1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha]^{1/\alpha}, 0)$	$(1-t)^\alpha$	$[1, \infty)$
3	$\frac{uv}{1-\alpha(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1-\alpha(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$
4	$\exp(-[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha})$	$(-\ln t)^\alpha$	$[1, \infty)$
5	$-\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right)$	$-\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
6	$1 - [(1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha - (1-u)^\alpha(1-v)^\alpha]^{1/\alpha}$	$-\ln[1 - (1-t)^\alpha]$	$[1, \infty)$
7	$\max(\alpha uv + (1-\alpha)(u+v-1), 0)$	$-\ln[\alpha t + (1-\alpha)]$	$(0, 1]$
8	$\max \left( \frac{\alpha^2 uv - (1-u)(1-v)}{\alpha^2 - (\alpha-1)^2(1-u)(1-v)}, 0 \right)$	$\frac{1-t}{1+(\alpha-1)t}$	$[1, \infty)$
9	$uv \exp(-\alpha \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \alpha \ln t)$	$(0, 1]$
10	$uv[1 + (1-u^\alpha)(1-v^\alpha)]^{-1/\alpha}$	$\ln(2t^{-\alpha} - 1)$	$(0, 1]$
11	$\max([u^\alpha v^\alpha - 2(1-u)^\alpha(1-v)^\alpha]^{1/\alpha}, 0)$	$\ln(2 - t^\alpha)$	$(0, \frac{1}{2}]$
12	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\alpha + (v^{-1} - 1)^\alpha]^{1/\alpha})^{-1}$	$(t^{-1} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$
13	$\exp(1 - [(1 - \ln u)^\alpha + (1 - \ln v)^\alpha - 1]^{1/\alpha})$	$(1 - \ln t)^\alpha - 1$	$(0, \infty)$
14	$(1 + [(u^{-1/\alpha} - 1)^\alpha + (v^{-1/\alpha} - 1)^\alpha]^{1/\alpha})^{-\alpha}$	$(t^{-1/\alpha} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$
15	$\max \left( \left\{ 1 - [(1 - u^{1/\alpha})^\alpha + (1 - v^{1/\alpha})^\alpha]^{1/\alpha} \right\}^\alpha, 0 \right)$	$(1 - t^{1/\alpha})^\alpha$	$[1, \infty)$
16	$\frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 + 4\alpha}), \quad S = u + v - 1 - \alpha(u^{-1} + v^{-1} - 1)$	$(\alpha t^{-1} + 1)(1-t)$	$[0, \infty)$
17	$\left( 1 + \frac{[(1+u)^{-\alpha} - 1][(1+v)^{-\alpha} - 1]}{2^{-\alpha} - 1} \right)^{-1/\alpha} - 1$	$-\ln \frac{(1+t)^{-\alpha} - 1}{2^{-\alpha} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
18	$\max \left( 1 + \alpha / \ln[e^{\alpha/(u-1)} + e^{\alpha/(v-1)}], 0 \right)$	$e^{\alpha/(u-1)}$	$[2, \infty)$
19	$\alpha / \ln(e^{\alpha/u} + e^{\alpha/v} - e^\alpha)$	$e^{\alpha/t} - e^\alpha$	$[0, \infty)$
20	$[\ln(\exp(u^{-\alpha}) + \exp(v^{-\alpha}) - e)]^{-1/\alpha}$	$\exp(t^{-\alpha}) - e$	$(0, \infty)$
21	$1 - (1 - \{ \max([1 - (1-u)^\alpha]^{1/\alpha} + [1 - (1-v)^\alpha]^{1/\alpha} - 1, 0) \}^\alpha)^{1/\alpha}$	$1 - [1 - (1-t)^\alpha]^{1/\alpha}$	$[1, \infty)$
22	$\max \left( \left[ 1 - (1-u^\alpha)\sqrt{1 - (1-u^\alpha)^2} - (1-v^\alpha)\sqrt{1 - (1-v^\alpha)^2} \right]^{1/\alpha}, 0 \right)$	$\arcsin(1 - t^\alpha)$	$(0, 1]$

Копула-функции с номерами 3–6, 9, 10, 12–14, 17, 19, 20, 22 являются строгими копула-функциями, тогда как копула-функции с номерами 1 и 16 – строгие только для  $\alpha > 0$ . Остальные копула-функции из табл. 6.2 не являются строгими. Некоторые из архимедовых копула-функций имеют специальные названия. Например, копула-функцию под номером 1 называют *копула-функцией Клейтона*, под номером 4 – *копула-функцией Гумбеля*, а под номером 5 – *копула-функцией Франка*. Учитывая, что последние три копула-функции до

Плотность архимедовых копула-функций может быть вычислена по формуле:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

или, если генератор  $\phi(\cdot)$  дважды непрерывно дифференцируем,

$$c_\phi(u_1, u_2) = \frac{(\phi^{[-1]}[\phi(u_1) + \phi(u_2)])''}{(\phi^{[-1]}[\phi(u_1)])' (\phi^{[-1]}[\phi(u_2)])'}$$

Это означает, что, зная генератор  $\phi(\cdot)$ , его обратную функцию  $\phi^{[-1]}(\cdot)$ , ее первую и вторую производные, можно получить архимедову копула-функцию и ее плотность. Однако, за исключением некоторых простых случаев, плотности копула-функций оцениваются с использованием таких программ, как *Maple* или *Mathematica*.

### 6.3.2. Некоторые однопараметрические двумерные архимедовы копула-функции

**Копула-функция Клейтона.** Семейство копула-функций Клейтона было впервые предложено в работе [Clayton (1978)]. Рассмотрим генератор  $\phi(t) = (t^{-\alpha} - 1)/\alpha$  с  $\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ . Тогда  $\phi^{-1}(t) = (1 + t)^{-1/\alpha}$ . Используя (6.7), получим:

$$C^{Clayton}(u_1, u_2; \alpha) = \max \left[ (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, 0 \right].$$

Если  $\alpha > 0$ , то  $\phi(0) = \infty$ , и вышеприведенное выражение для копула-функции примет вид:

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha},$$

а плотность копула-функции Клейтона будет равна:

$$c(u_1, u_2) = (1 + \alpha)(u_1 u_2)^{-\alpha-1} (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}-2}.$$

Отметим, что в отличие от случая  $\alpha > 0$ , при  $-1 \leq \alpha < 0$  копула-функция Клейтона не является строгой, поскольку  $\phi(0) = 1/\alpha$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  получим копула-функцию, отвечающую случаю независимости, а при  $\alpha \rightarrow \infty$  — копула-функцию, соответствующую комонотонности. При  $\alpha = -1$  получим нижнюю границу Фреше — Хёффдинга. Таким образом, копула-функция позволяет интерполировать промежуточные структуры зависимости между противомонотонностью, комонотонно-



**Копула-функция Гумбеля.** Семейство копула-функций Гумбеля было впервые представлено в работе [Gumbel (1960)], но поскольку подробный анализ этого семейства был приведен в работе [Hougaard (1986)], то его иногда называют семейством Гумбеля — Хоугарда. Генератор этого семейства имеет вид:  $\phi(t) = (-\ln t)^\alpha$ , где  $\alpha \geq 1$ . Обратная функция генератора равна  $\phi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\alpha})$ . Таким образом, копула-функции из этого семейства имеют вид:

$$C(u_1, u_2; \alpha) = \exp \left\{ - [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{1/\alpha} \right\}$$

с функцией плотности:

$$c(u_1, u_2; \alpha) = C(u_1, u_2) \cdot u_1^{-1} u_2^{-1} [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{-2+1/\alpha} \times \\ \times [\ln u_1 \ln u_2]^{\alpha-1} \cdot \{ [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{-1/\alpha} + \alpha - 1 \}.$$

При  $\alpha = 1$  получаем копула-функцию, соответствующую случаю независимости; а при  $\alpha \rightarrow \infty$  копула-функция Гумбеля  $C(u_1, u_2; \alpha)$  стремится к копула-функции, отвечающей комонотонности. Таким образом, копула-функция Гумбеля интерполирует структуру зависимости, промежуточную между независимостью и абсолютной положительной зависимостью.

**Копула-функция Франка.** Впервые копула-функция Франка была представлена в работе [Frank (1979)], а более подробный ее анализ проведен в работе [Genest (1987)]. Эта копула-функция имеет генератор:

$$\phi(t) = \ln \left( \frac{e^{-\alpha} - 1}{e^{-\alpha t} - 1} \right).$$

Обратная функция этого генератора равна:

$$\phi^{-1}(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln (1 + e^t (e^{-\alpha} - 1)),$$

а сама копула-функция и ее плотность имеют вид:

$$C(u_1, u_2; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \cdot (e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right), \\ c(u_1, u_2; \alpha) = \frac{-\alpha [e^{-\alpha} - 1] e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{\{ [e^{-\alpha u_1} - 1][e^{-\alpha u_2} - 1] + e^{-\alpha} - 1 \}^2}$$

для  $\alpha \neq 0$ .

При  $\alpha = 0$  копула-функция Франка имеет вид копула-функции, отвечающей случаю независимости; а при  $\alpha \rightarrow -\infty$  и  $\alpha \rightarrow +\infty$  копула-функция Франка принимает вид, соответственно, нижней и верхней

Для того чтобы продемонстрировать различия между копула-функциями Клейтона, Гумбеля и Франка, на рис. 6.6 они представлены графически. Видно, что изображенные копула-функции имеют различный характер поведения в окрестностях точек (0, 0) и (1, 1). Например, копула-функция Гумбеля в окрестности (1, 1) демонстрирует резкий рост, тогда как рост в окрестности точки (0, 0) менее резок. Как будет показано далее, хорошим измерителем характера хвостов этих копула-функций является коэффициент «хвостовой зависимости». Копула-функция Гумбеля имеет «верхнюю хвостовую зависимость», копула-функция Клейтона — «нижнюю хвостовую зависимость», а копула-функция Франка не имеет хвостовой зависимости.

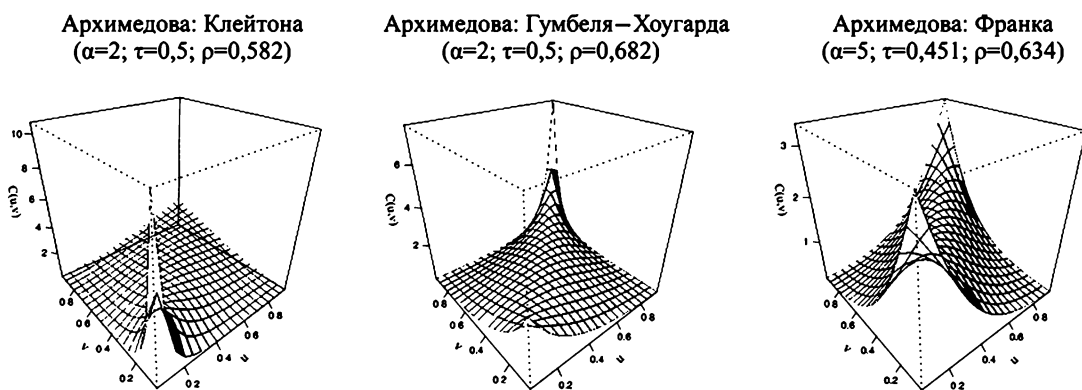


Рис. 6.6. Плотности копула-функций Клейтона, Гумбеля и Франка

### 6.3.3. Многомерные перестановочные архимедовы копула-функции

В работе [Nelsen (2006)] показано, что  $n$ -мерную копула-функцию для случая независимости можно записать в следующем виде:

$$P(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + (-\ln u_2) + \dots + (-\ln u_n)]).$$

Это наблюдение подсказывает возможность обобщения (6.7) на  $n$ -мерный случай:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{[-1]}[\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_n)]. \quad (6.7a)$$

Функции  $C(\cdot)$  в (6.7a) называют *серийно-итеративными* функциями [Schweizer, Sklar (1983)], основанными на двумерной архимедовой копула-функции с генератором  $\phi(\cdot)$ . Если положить  $C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}[\phi(u_1) + \phi(u_2)]$ , то для  $n \geq 3$  получим следующее обобщение:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(C(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), u_n)$$

Двумерные архимедовы копула-функции обладают свойствами симметричности и ассоциативности (см. теорему 4.1.5 в [Nelsen (2006)]), а именно:

$$C(u, v) = C(v, u) \quad \forall u, v \in [0, 1] \quad (\text{симметричность}),$$

$$C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \quad \forall u, v, w \in [0, 1] \quad (\text{ассоциативность}).$$

Копула-функции вида (6.7а) также известны как *перестановочные архимедовы копула-функции*: случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *перестановочными*, если векторы  $(X, Y)$  и  $(Y, X)$  являются одинаково распределенными. В нашем случае перестановочность копула-функции эквивалентна ее симметричности (см. теорему 2.7.4 в [Nelsen (2006)]).

Для того чтобы  $C(\cdot)$  была копула-функцией при  $n \geq 3$ , требуются некоторые дополнительные свойства функций  $\phi(\cdot)$  и  $\phi^{[-1]}(\cdot)$ . Для этого понадобится следующее определение.

**Определение 6.4.** *Неотрицательная функция  $g(t)$  называется абсолютно монотонной на интервале  $J$ , если она непрерывна на этом интервале и имеет производные любого порядка, причем*

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

для всех внутренних точек  $t \in J$  и  $k = 1, 2, \dots$

Например, функция  $g(t) = e^{-t}$ ,  $t \in R$ , является абсолютно монотонной, так как  $g'(t) = -e^{-t}$ ,  $g''(t) = e^{-t}$ ,  $\dots$ ,  $g^{(k)}(t) = (-1)^k e^{-t}$ ,  $\dots$

Следует отметить, что если  $g(t)$  абсолютно монотонна на  $[0, \infty)$  и  $g(c) = 0$  для некоторого  $c > 0$ , то  $g(\cdot) \equiv 0$  на  $[0, \infty)$ . Более того, если псевдообратная функция  $\phi^{[-1]}(\cdot)$  генератора архимедовой копула-функции  $\phi(\cdot)$  абсолютно монотонна, то на интервале  $[0, \infty)$  функция  $\phi^{[-1]}(\cdot)$  положительна, функция  $\phi(\cdot)$  абсолютно монотонна и  $\phi^{[-1]}(\cdot) = \phi^{-1}(\cdot)$ .

Ниже приведем необходимое и достаточное условие, налагаемое на строгий генератор  $\phi(\cdot)$  для того, чтобы функция (6.7а) была  $n$ -мерной копула-функцией при  $n \geq 2$  [Kimberling (1974)].

**Теорема 6.3.** *Пусть  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  непрерывная и строго убывающая функция, такая, что  $\phi(0) = \infty$  и  $\phi(1) = 0$ ,  $\phi^{-1}(\cdot)$  — обратная функция для  $\phi(\cdot)$ ,  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  определяется соотношением (6.7а). Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы  $C(\cdot)$   $n$ -мерной копула-функцией для всех  $n \geq 2$ , является требование абсолютной монотонности функции  $\phi^{-1}(\cdot)$   $[0, \infty)$ .*

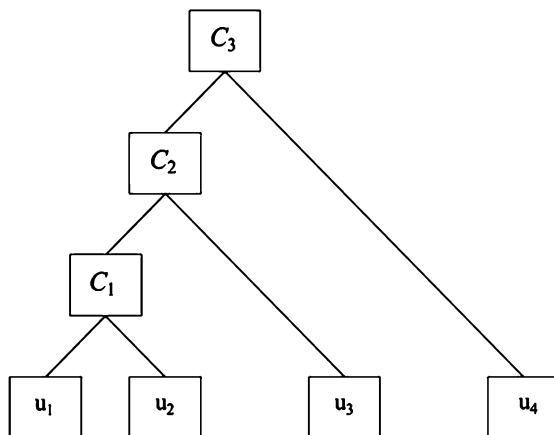
**Доказательство.** См. [Kimberling (1974)], [Schweizer, Sklar (1981)], [Alstadsaeter et al. (2005)].

Однако требование абсолютной монотонности в вышеприведенном условии является весьма жестким, что приводит к ограничениям структуры зависимости. В работах [Genest, Rivest (1993)], [Nelsen (2005)], [Müller, Scarsini (2005)] было предложено заменить это условие более слабым, в котором для функции  $\phi(\cdot)$  требуется существование производных лишь до некоторого *конечного* порядка. В [McNeil, Nešlehová (2009)] представлено необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $\phi(\cdot)$  обладала свойством  $n$ -монотонности ( $d$ -монотонности в терминах этой работы). Это условие показывает, что существуют  $n$ -мерные архимедовы копула-функции, не имеющие плотностей. Кроме того, из результатов работы следует *существование точных нижних границ* для множества всех  $n$ -мерных архимедовых копула-функций относительно так называемого конкордационного упорядочивания (более детальную информацию см. в [McNeil, Nešlehová (2009)]).

Представленное выше многомерное обобщение архимедовых копула-функций является весьма ограничительным, поскольку в своей спецификации оно использует лишь один генератор, не зависящий от рассматриваемой размерности. Как следствие, все  $k$ -мерные частные распределения ( $k < n$ ) имеют идентичный вид. Для того чтобы обеспечить большую гибкость, было предложено множество подходов, некоторые из которых мы рассмотрим ниже.

### 6.3.4. Вложенные архимедовы копула-функции

**Построение полностью вложенных архимедовых копула-функций.** Описание и исследование одного из обобщений для функций (6.7a) имеется в работах [Joe (1997)], [Embrechts et al. (2003)], [Whelan (2004)], [Savu, Tiede (2009)], [McNeil (2008)]. Структура такого обобщения для четырехмерного случая показана на рис. 6.7.



Узлы  $u_1$  и  $u_2$  связываются при помощи копула-функции  $C_1(\cdot)$ , узел  $u_3$  связывается с  $C_1(u_1, u_2)$  при помощи копула-функции  $C_2(\cdot)$  и, наконец, узел  $u_4$  связывается с  $C_2(u_3, C_1(u_1, u_2))$  при помощи копула-функции  $C_3(\cdot)$ . Таким образом, четырехмерный случай требует трех двумерных копула-функций  $C_1(\cdot)$ ,  $C_2(\cdot)$  и  $C_3(\cdot)$ , генераторы которых равны  $\phi_1(\cdot)$ ,  $\phi_2(\cdot)$  и  $\phi_3(\cdot)$  соответственно. Несмотря на то что структура «связывания» довольно проста, ее выражение в виде аналитического уравнения является весьма непростой задачей:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4) &= C_3(u_4, C_2(u_3, C_1(u_1, u_2))) = \\ &= \phi_3^{-1}\{\phi_3(u_4) + \phi_3(\phi_2^{-1}\{\phi_2(u_3) + \phi_2(\phi_1^{-1}\{\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)\})\})\}. \end{aligned}$$

Другими словами, пары  $(u_1, u_3)$  и  $(u_2, u_3)$  имеют одну и ту же копула-функцию  $C_2(\cdot)$  с параметром зависимости  $\alpha_2$ , тогда как пары  $(u_1, u_4)$ ,  $(u_2, u_4)$  и  $(u_3, u_4)$  имеют копула-функцию  $C_3(\cdot)$  с параметром зависимости  $\alpha_3$ . В общем  $n$ -мерном случае:

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= \phi_{n-1}^{-1}(\phi_{n-1} \circ \phi_{n-2}^{-1}[\dots(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}[\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)] + \\ &\quad + \phi_2(u_3)) + \dots + \phi_2(u_{n-1})] + \phi_{n-1}(u_n)). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Эта копула-функция называется полностью вложенной архимедовой копула-функцией, поскольку получается путем пошагового увеличения размерности на единицу. Такая структура построения копула-функций является более общей, чем (6.7а). Кроме того, она обладает лишь частичной перестановочностью. Полностью вложенная архимедова копула-функция имеет  $n(n-1)/2$  различных двумерных частных распределений, но только  $(n-1)$  несовпадающих двумерных копула-функций со свободной спецификацией, остальные двумерные функции неявным образом определяются из структуры построения.

Выражение (6.8) будет  $n$ -мерной копула-функцией только тогда, когда, в дополнение к свойству абсолютной монотонности для обратных функций генераторов, «композиционная» функция  $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1}$  будет иметь абсолютно монотонные первые производные для уровней всех уровней  $i$ .

Как оказывается, если все генераторы однотипны, степень зависимости, выражаемая параметром копула-функции, должна убывать с увеличением уровня вложения, т. е.  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_{n-1}$ . Если же генераторы принадлежат разным семействам, то ограничения на параметры будут еще более жесткими, а список генераторов, которые могут быть связаны, не столь велик (более детальную информацию см., например, в [Whelan (2004)], [Savu, Tredre (2009)], [McNeil (2008)]).

### Построение частично вложенных архимедовых копула-

функций — альтернативный способ обобщения многомерных копула-функций вида (6.7а). Эта структура связывания изначально была предложена в работе [Joe (1997)], а дальнейший подробный анализ представлен в [Whelan (2004)], [McNeil et al. (2005)], [McNeil (2008)]. Структура этого метода связывания представляет собой смесь структур, используемых при построении перестановочной и полностью вложенной копула-функций, и носит название *частично вложенной структуры*. Наименьшая размерность, для которой частично вложенная структура связывания дает копула-функции, равна четырем. Для нее:

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = C_3(C_1(u_1, u_2), C_2(u_3, u_4)) = \phi_3^{-1}\{\phi_3(\phi_1^{-1}\{\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)\}) + \phi_3(\phi_2^{-1}\{\phi_2(u_3) + \phi_2(u_4)\})\}. \quad (6.9)$$

Как и в предыдущих случаях, имеем громоздкие аналитические выражения, но весьма ясное описание: на первом шаге связываем пары  $(u_1, u_2)$  и  $(u_3, u_4)$  копула-функциями  $C_1(\cdot)$  и  $C_2(\cdot)$ , генераторы которых равны  $\phi_1$  и  $\phi_2$  соответственно. Эти две копула-функции связываются при помощи третьей копула-функции  $C_3(\cdot)$ . Случайные величины  $u_1$  и  $u_2$  являются перестановочными, так же как  $u_3$  и  $u_4$ , но все другие пары перестановочными не являются. Однако пары  $(u_1, u_3)$ ,  $(u_1, u_4)$ ,  $(u_2, u_3)$  и  $(u_2, u_4)$  имеют копула-функцию  $C_3(\cdot)$  (см. рис. 6.8). Для того чтобы получить  $n$ -мерную копула-функцию с использованием такого способа связывания, требуются ограничения, похожие на рассмотренные выше при построении полностью вложенных архимедовых копула-функций.

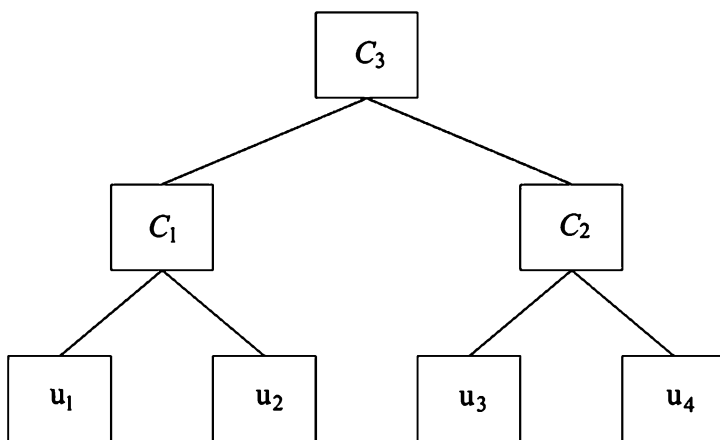


Рис. 6.8. Частично вложенные архимедовы копула-функции

**Общий случай: иерархически вложенные архимедовы копула-функции.** Этот класс копула-функций впервые был предложен в работе [Joe (1997)], а в дальнейшем подробно изучался в [Whelan (2004)].

(2004)]. В работе [Savu, Tiede (2009)] представлена первая попытка разработки иерархически вложенных архимедовых копула-функций в общем виде. Такая структура связывания является расширением структуры частичного вложения в том смысле, что участвующие в процедуре связывания копула-функции не обязательно двумерные.

Основная идея структуры связывания, предложенная в [Savu, Tiede (2009)], заключается в использовании иерархического вложения. При этом предполагается, что имеется  $L$  уровней, по  $n_l$  различных объектов на каждом уровне  $l$  (объектом может быть либо копула-функция, либо переменная). На уровне  $l = 1$  переменные  $u_1, \dots, u_n$  разбиваются на  $n_1$  групп, в каждой из которых переменные связываются при помощи перестановочной архимедовой копула-функции. В свою очередь, на уровне  $l = 2$  эти копула-функции связываются при помощи  $n_2$  копула-функций и т.д. Более формально, на уровне  $l = 1$  величины  $u_1, \dots, u_n$  связываются при помощи  $n_1$  многомерных архимедовых копула-функций  $C_{1,j}(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ , имеющих вид:

$$C_{1,j}(\mathbf{u}_{1,j}) = \phi_{1,j}^{-1} \left( \sum_{\mathbf{u}_{1,j}} \phi_{1,j}(\mathbf{u}_{1,j}) \right),$$

где  $\phi_{1,j}(\cdot)$  — генератор копула-функции  $C_{1,j}(\cdot)$ ;  $\mathbf{u}_{1,j}$  ( $j = 1, \dots, n_1$ ) — подмножество элементов  $u_1, \dots, u_n$ , связываемых при помощи  $C_{1,j}(\cdot)$ . Копула-функции  $C_{1,1}(\cdot), \dots, C_{1,n_1}(\cdot)$  могут принадлежать разным семействам архимедовых копула-функций, таким как семейство Франка или Гумбеля. Копула-функции уровня  $l = 1$ , в свою очередь, агрегируются при помощи копула-функций уровня  $l = 2$ . В результате получаем  $n_2$  обобщенных архимедовых копула-функций  $C_{2,j}(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n_2$ , структура зависимости которых является частично перестановочной. Их компоненты — копула-функции предыдущего уровня. Более формально:

$$C_{2,j}(C_{2,j}) = \phi_{2,j}^{-1} \left( \sum_{z \in C_{2,j}} \phi_{2,j}(C_{z,j}) \right),$$

где  $j = 1, \dots, n_2$ ;  $\phi_{2,j}(\cdot)$  — генератор копула-функции  $C_{2,j}(\cdot)$ ;  $C_{2,j}$  — множество всех копула-функций уровня  $l = 1$ , агрегируемых копула-функцией  $C_{2,j}(\cdot)$ . Далее продолжаем шаг за шагом до тех пор, пока не достигнем уровня  $L$ , на котором получим единственную иерархическую архимедову копула-функцию  $C_{L,1}(\cdot)$ .

В работе [Savu, Tiede (2009)] используются несколько отличные от используемых нами, но эквивалентные обозначения: поскольку  $j$ -ая копула-функция  $l$ -го ( $l = 1, \dots, L$ ) уровня  $C_{l,j}(\cdot)$  имеет в качестве аргу-





В работе [Savu, Tiede (2009)] указаны некоторые условия для того, чтобы иерархическое вложение давало многомерную функцию распределения. Во-первых, требуется, чтобы все обратные функции генераторов  $\phi_{l,j}^{-1}(\cdot)$  были абсолютно монотонными. Во-вторых, для  $l = 1, \dots, L$  и  $j = 1, \dots, n_l$ ,  $i = 1, \dots, n_{l+1}$ , сложные функции  $\phi_{l+1,i}(\phi_{l,j}^{-1}(\cdot))$  должны иметь абсолютно монотонные производные при всех  $l = 1, 2, \dots, L$  и  $j = 1, \dots, n_l$ . В работе [Embrechts et al. (2003)] показано, что в случае полного вложения копула-функций либо из семейства Гумбеля, либо из семейства Клейтона степень зависимости, выраженная параметром  $\alpha$ , должна убывать с увеличением уровня иерархических вложений. В примере 6.4 это означает, что  $\alpha_{1,1} \geq \alpha_{2,1} \geq \alpha_{3,1} \geq \alpha_{4,1}$  и  $\alpha_{1,2} \geq \alpha_{2,2} \geq \alpha_{4,1}$ .

Если же агрегируемые копула-функции принадлежат разным семействам архимедовых копула-функций, то, как показано в [McNeil (2008)], две архимедовы копула-функции из двух различных семейств  $a$  и  $b$  могут быть иерархически вложены только в том случае, если производная «композиционной» функции  $\phi_a \circ \phi_b^{-1}$  является абсолютно монотонной. Вопрос о том, какие семейства копула-функций могут быть агрегированы, в некоторой степени рассмотрен в работе [Joe (1997)].

В силу достаточно сложной структуры иерархических копула-функций их плотности задаются весьма непростыми выражениями. В [Savu, Tiede (2009)] используется рекурсивный подход для дифференцирования  $n$ -мерной копула-функции  $C_{L,1}(\cdot)$  верхнего уровня по аргументам  $\mathbf{u}_{L,1}$ . А именно, в силу того, что

$$\begin{aligned} C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1}) &= C_{L,1}(C_{L,1}) = C_{L,1}(C_{L-1,1}, \dots, C_{L-1,n_{L-1}}) = \\ &= C_{L,1}(C_{L-1,1}(C_{L-1,1}), \dots, C_{L-1,n_{L-1}}(C_{L-1,n_{L-1}})) = \\ &= C_{L,1}(C_{L-1,1}(\mathbf{u}_{L-1,1}), \dots, C_{L-1,n_{L-1}}(\mathbf{u}_{L-1,n_{L-1}})), \end{aligned}$$

плотность для  $C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1})$  может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1}) &= \frac{\partial^n C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1})}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = \sum \frac{\partial^{n-i} C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1})}{\partial C_{L-1,1}^{k_1} \dots \partial C_{L-1,n_{L-1}}^{k_{n_{L-1}}}} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{n_{L-1}} \sum_{u=\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}} \frac{\partial^{|\sigma_1|} C_{L-1,r}(\mathbf{u}_{L-1,1})}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial^{|\sigma_r|} C_{L-1,r}(\mathbf{u}_{L-1,r})}{\partial \sigma_r}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где внешняя сумма берется по всем  $k_1, \dots, k_{n_{L-1}} \in N \cup \{0\}$  таким, что  $\max_j k_j \leq n_{L-1,j}$  и  $\sum_{j=1}^{n_{L-1}} k_j = n - i$  для всех  $i = 0, \dots, n - n_{L-1}$ .

Вторая часть формулы включает в себя производные копула-функций уровня  $(L - 1)$  с аргументами  $\mathbf{u}_{L-1,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_{L-1}$ . Суммирование во второй части производится по  $r \in \{0, 1, \dots, n_{L-1}\}$  различным подмножествам  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  множества  $\mathbf{u}_{L-1,r}$ , а произведение берется по всем порядковым номерам копула-функций уровня  $(L - 1)$ .

Алгоритм нахождения плотности  $n$ -мерной копула-функции  $C_{L,1}(\cdot)$  является рекурсивным: плотность для  $C_{L,1}(\cdot)$  определяется через частные производные копула-функций  $C_{L-1,1}(\cdot), \dots, C_{L-1,n_{L-1}}(\cdot)$ , которые в свою очередь могут быть вычислены с использованием (6.10) для копула-функций, используемых на более низких уровнях. Рекурсивная процедура завершается на самом низком уровне, когда требуется найти частные производные (различных порядков) лишь стандартных архимедовых копула-функций.

В силу рекурсивной природы алгоритма нахождения плотности для  $C_{L,1}(\cdot)$  количество вычислительных операций растет вместе с усложнением копула-функции. На практике для вычисления плотности иерархической  $n$ -мерной копула-функции приходится прибегать к компьютерным алгебраическим системам, таким как *Mathematica* или *R* (функция *D*). Нет необходимости упоминать о том, что время, необходимое для вычисления оценок максимального правдоподобия, растет вместе с ростом размерности  $n$  (более детально см. [Aas et al. (2009)]).

**Пример 6.5.** Используя формулу (6.10), получим, что плотность четырехмерной иерархической архимедовой копула-функции, представленной рис. 6.9, определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 C_{2,1}}{\partial u_1 \dots \partial u_4} &= \frac{\partial^4 C_{2,1}}{\partial C_{1,1}^2 \partial C_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_4} + \\ &+ \frac{\partial^3 C_{2,1}}{\partial C_{1,1}^2 \partial C_{1,2}} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,2}}{\partial u_3 \partial u_4} + \\ &+ \frac{\partial^3 C_{2,1}}{\partial C_{1,1} \partial C_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,1}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_4} + \\ &+ \frac{\partial^2 C_{2,1}}{\partial C_{1,1} \partial C_{1,2}} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,1}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,2}}{\partial u_3 \partial u_4}. \end{aligned}$$

### 6.3.5. Моделирование наблюдений из архимедовых копула-функций

Прямое применение традиционных методов генерирования многомерных наблюдений, подчиняющихся заданному закону распределения, в принципе возможно и к распределениям, описанным с помощью копула-функций, см. [Frees, Valdez (1998)], [McNeil (2008)]. К сожалению, эти методы оказываются чрезмерно трудоемкими в случае вложенных архимедовых копула-функций и многомерных перестановочных архимедовых копула-функций. Для последних моделирование наблюдений не

лесообразно проводить с использованием *метода условной инверсии*, который также можно использовать для любой копула-функции.

Если имеется копула-функция  $C = C(u_1, \dots, u_n)$  (не обязательно архимедова) и необходимо сгенерировать наблюдения  $(u_1, \dots, u_n)$   $n$ -мерного распределения случайного вектора  $(U_1, \dots, U_n)$ , копула-функция которого равна  $C(\cdot)$ , а частные распределения являются равномерными на отрезке  $[0, 1]$ , то можно воспользоваться *методом условного распределения*. Пусть  $C_k(u_1, u_2, \dots, u_k) = C(u_1, u_2, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ; при этом  $C_1(u_1) = u_1$  и  $C_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n)$ . Условное распределение  $U_k$ ,  $k = 2, \dots, n$ , при заданных  $U_1, \dots, U_{k-1}$  равно:

$$C_k(u_k | u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = P(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) = \\ = C_k(u_1, u_2, \dots, u_k) / C_{k-1}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}).$$

Для реализации алгоритма моделирования необходимо:

- смоделировать  $n$  независимых равномерно распределенных случайных величин  $v_1, \dots, v_n$ ;
- положить  $u_1 = v_1$ ;
- аналитически или с использованием численных методов найти обратные функции условных распределений  $C_k(u_1, u_2, \dots, u_k)$  при  $k = 2, \dots, n$ .

Результатом этого алгоритма является вектор наблюдений  $(u_1, \dots, u_n)$ , смоделированный в соответствии с распределением  $C(\cdot)$ . Несмотря на то что моделирование с использованием условных распределений весьма элегантно, сама процедура может быть весьма трудоемкой с вычислительной точки зрения.

В случае архимедовых копула-функций условное распределение  $U_k$  при заданных значениях  $U_1, \dots, U_{k-1}$  определяется теоремой 6.4.

**Теорема 6.4.** Пусть  $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_n))$  —  $n$ -мерная архимедова копула-функция с генератором  $\phi(\cdot)$ . Тогда для  $k = 2, \dots, n$

$$C_k(u_k | u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = \frac{\phi^{-1(k-1)}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_k))}{\phi^{-1(k-1)}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_{k-1}))}.$$



Вектор  $(u_1, \dots, u_n)'$  смоделирован из  $n$ -мерной архимедовой копула-функции. Отметим, что для рассмотренных выше случаев алгоритм предполагает необходимость моделирования случайных величин из гамма-распределения, устойчивого распределения или дискретного распределения. Более подробную информацию см. в [Cherubini et al. (2004)], [Schoutens (2003)], [McNeil et al. (2005)], [McNeil (2008)].

### 6.3.6. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: архимедовы копула-функции

Для того чтобы вычислить значения функции распределения двумерной архимедовой копула-функции и ее плотности, необходимо воспользоваться некоторыми процедурами из модуля `fCopulae` в пакете *R*:

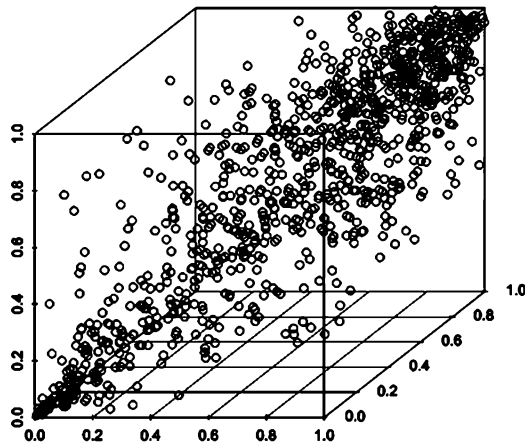
<i>fCopulae</i> -функция	Описание
<code>rarchmCopula</code>	моделирование случайных величин из архимедовой копула-функции
<code>parchmCopula</code>	вычисление значения архимедовой копула-функции
<code>darchmCopula</code>	вычисление значения плотности архимедовой копула-функции
<code>rarchmSlider</code>	график наблюдений, смоделированных из архимедовой копула-функции
<code>parchmSlider</code>	график функции распределения
<code>darchmSlider</code>	график функции плотности
<code>archmCopulaFit</code>	оценка параметров архимедовой копула-функции

Например, для того чтобы смоделировать наблюдения из двумерной копула-функции Гумбеля, а затем по ним оценить параметры той же копула-функции, необходимо использовать код:

```
# Random Variates:
R = archmCopulaSim(n = 1000, alpha = 1, type = "4")
# Fit:
fit = archmCopulaFit(u = R[, 1], v = R[, 2], type = "4")
fit
```

Если же рассматривать многомерную перестановочную архимедову копула-функцию, то необходимо прибегнуть к использованию модуля `copula`. Ниже представлен пример кода для трехмерной перестановочной архимедовой копула-функции (для более детальной информации рекомендуем обратиться к руководству статистическим пакетом *R*), а результаты моделирования изображены на рис. 6.10.

```
library(copula)
#Some graphical examples
v <- rcopula(claytonCopula(2, dim = 3), 1000)
scatterplot3d(v)
frank.cop <- frankCopula(3)
persp(frank.cop, dcopula)
gumbel.cop <- archmCopula("gumbel", 5)
contour(gumbel.cop, dcopula)
# A 5-dim Frank copula
frank.cop <- frankCopula(3, dim = 5)
```



**Рис. 6.10.** График смоделированных наблюдений из трехмерной копула-функции Клейтона

Для моделирования и оценки *четырёхмерной полности вложенной архимедовой копулы* можно было бы обратиться к модулю «copula GOF» (недавно разработанному Дэниелем Бергом). Однако к моменту написания данной работы этот модуль находился в состоянии « $\beta$ -версии» и не был общедоступным, т. е. он еще не был загружен в среду пакета *R*.

## 6.4. Парные копула-функции

### 6.4.1. Введение

Детальное изучение парных копула-функций было начато в работе [Joe (1997)], а позднее продолжено в [Bedford, Cooke (2001, 2002)], [Kurowicka, Cooke (2006)] (моделирование) и [Aas et al. (2009)] (статистические выводы). Их использование дает возможность получить значительно более гибкую структуру зависимости, чем структура перестановочных или иерархически вложенных архимедовых копула-функций. При помощи парных копула-функций можно разложить многомерную плотность на

произведение  $n(n-1)/2$  двумерных копула-функций, из которых  $(n-1)$  являются безусловными, а остальные — условными. Важно отметить, что используемые двумерные копула-функции не обязаны принадлежать одному классу.

Рассмотрим  $n$  случайных величин  $(X_1, \dots, X_n)$  с совместной функцией распределения  $H(x_1, \dots, x_n)$ , частными распределениями  $F_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , совместной плотностью  $f(x_1, \dots, x_n)$  и плотностями частных распределений  $f_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда для точек, в которых все плотности непрерывны и положительны<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ &= \prod_{t=2}^n f(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}) \cdot f_1(x_1). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из теоремы Шкляра известно, что для абсолютно непрерывного  $n$ -мерного распределения  $H(\cdot)$ , имеющего строго возрастающие непрерывные частные распределения  $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ , имеем:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1, \dots, n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n),$$

где  $c_{1, \dots, n}(\cdot, \dots, \cdot)$  —  $n$ -мерная плотность копула-функции, описывающей анализируемое распределение  $H(x_1, \dots, x_n)$ , а  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  — значения частных функций распределения рассматриваемых случайных величин в точках  $x_1, \dots, x_n$  соответственно.

В двумерном случае

$$f(x_1, x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2),$$

откуда легко следует, что:

$$f(x_1 | x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1).$$

Для трех случайных величин  $X_1, X_2$  и  $X_3$  имеем:

$$f(x_1 | x_2, x_3) = c_{12|3}(F(x_1 | x_3), F(x_2 | x_3)) f(x_1 | x_3),$$

где  $c_{12|3}(\cdot)$  — копула-функция для условных функций распределений  $((X_1 | X_3), (X_2 | X_3))$ . Кроме того,

$$f(x_1 | x_2, x_3) = c_{13|2}(F(x_1 | x_2), F(x_3 | x_2)) f(x_1 | x_2).$$

<sup>2</sup>В правой части формулы (6.11) и некоторых других местах далее для того, чтобы избежать усложнения обозначений, функции условной плотности и условного распределения случайной величины  $X_i$  при условиях на переменные с номерами Скопировано с сайта <http://www.lib.ru> не будут помечаться соответствующими индексами. Разработка электронных библиотек <http://www.lib.ru> для учебных и научных учреждений высшей школы. Copyright © 2000. <http://www.lib.ru>

Последнее соотношение может быть обобщено на  $n$ -мерный случай:

$$f(x|\mathbf{v}) = c_{xv_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j})) \cdot f(x|\mathbf{v}_{-j}), \quad (6.12)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор значений компонент, на которые наложены условия,  $v_j$  — произвольно выбранная компонента вектора  $\mathbf{v}$ , а через  $\mathbf{v}_{-j}$  обозначен вектор  $\mathbf{v}$ , из которого исключена  $j$ -я компонента.

Теперь, если воспользоваться (6.12), то из (6.11) получим следующее представление для  $f(x_t|x_1, \dots, x_{t-1})$ :

$$\begin{aligned} f(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}) &= \frac{f(x_t, x_{t-1}|x_1, \dots, x_{t-2})}{f(x_{t-1}|x_1, \dots, x_{t-2})} = \\ &= c_{t-1,t|1, \dots, t-2} \cdot f(x_t|x_1, \dots, x_{t-2}), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где для различающихся индексов  $i, j, i_1, \dots, i_k$ , таких, что  $i < j$  и  $i_1 < \dots < i_k$ , можно выразить двумерную условную копула-функцию при значениях аргументов, равных соответствующим условным функциям распределения, а именно:

$$c_{i,j|i_1, \dots, i_k} = c_{i,j|i_1, \dots, i_k}(F(x_i|x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), (F(x_j|x_{i_1}, \dots, x_{i_k}))).$$

Используя (6.13), можно записать (6.11) в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1) \cdot \prod_{t=2}^n \prod_{k=1}^{t-1} c_{t-k,t|1, \dots, t-k-1} \cdot f(x_t) = \\ &= \prod_{r=1}^n f(x_r) \cdot \prod_{t=2}^n \prod_{k=1}^{t-1} c_{t-k,t|1, \dots, t-k-1} = \\ &= \prod_{r=1}^n f(x_r) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j,j+1|1, \dots, j-1}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $j = t - k$ ,  $j + i = t$ .

Представление (6.14) называют разложением парных копула-функций. Для многомерных распределений существует много возможностей разложения на парные копула-функции. В [Bedford, Cooke (2001, 2002)] представлена графическая модель, называемая *моделью регулярной ветвизации*. Основной идеей этого метода является представление разложения на парные копула-функции типа (6.14) в виде последовательности вложенных деревьев с неориентированными ребрами, названными ветвями. В  $n$ -мерном случае ветвизация представлена  $(n - 1)$  деревом так, что  $j$ -е дерево имеет  $(n + 1 - j)$  узлов и  $(n - j)$  ребер. Каждое ребро отвечает плотности некоторой парной копула-функции, а ребра  $j$ -го дерева становятся узлами  $(j + 1)$ -го дерева. Два узла  $(j + 1)$ -го дерева связаны ребром в том случае, если соответствующие ребра  $j$ -го дерева имеют общий узел. Разложение на парные копула-функции



определяется  $n(n - 1)/2$  ребрами, а также плотностями частных распределений.

Сосредоточим внимание на двух примерах регулярной ветвизации, которые на сегодняшний день привлекли большое внимание исследователей. Речь пойдет о *канонической ветвизации* и *D-ветвизации*. Для более детальной информации относительно общей теории регулярной ветвизации и ее графического представления рекомендуется работа [Kurowicka, Cooke (2006)].

Рассмотрение упомянутых выше примеров регулярной ветвизации начнем с двумерных условных распределений, которые являются ключевыми элементами этой процедуры.

**Условные распределения для наиболее часто используемых двумерных копула-функций.** В работе [Joe (1997)] показано, что:

$$F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j}))}{\partial F(v_j|\mathbf{v}_{-j})} \quad \text{для любого } j, \quad (6.15)$$

где  $C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}$  — условная двумерная копула-функция (формальное определение см. выше). Если  $\mathbf{v}$  имеет размерность 1 (т.е.  $\mathbf{v} = v$ ), то (6.15) принимает вид:

$$F(x|v) = \frac{\partial C_{x,v}(F_1(x), F_2(v))}{\partial F(v)}.$$

Пусть  $F_1(x) = P(X \leq x) = x$  и  $F_2(v) = P(V \leq v) = v$  (т.е.  $f(x) = f(v) = 1$ ). Введем обозначение:

$$h(x, v; \Theta) = F(x|v) = \frac{\partial C_{x,v}(x, v; \Theta)}{\partial v}, \quad (6.16)$$

где через  $\Theta$  обозначены параметры копула-функции совместного распределения  $P(X \leq x, V \leq v)$ . Согласно терминологии работы [Aas et al. (2009)] функцию  $h(x, v; \Theta)$  назовем *h-функцией*, а  $h^{-1}(u, v; \Theta)$  — обратной *h-функцией* относительно первого аргумента  $u$ .

Для двумерной *нормальной копула-функции* *h-функция* имеет вид:

$$h(u_1, u_2; \rho_{12}) = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_{12}\Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right),$$

а обратная *h-функция* относительно первого аргумента равна:

$$h^{-1}(u_1, u_2; \rho_{12}) = \Phi \left( \Phi^{-1}(u_1)\sqrt{1 - \rho_{12}^2} + \rho_{12}\Phi^{-1}(u_2) \right),$$

где  $\Phi(z)$  — значение функции распределения стандартного нормального закона в точке  $z$ , а  $\rho_{12}$  — коэффициент корреляции между анализиру-

Для двумерной копула-функции Стьюдента с  $\nu_{12}$  числом степеней свободы  $h$ -функция равна:

$$h(u_1, u_2; \rho_{12}, \nu_{12}) = t_{\nu_{12}+1} \left( (t_{\nu_{12}}^{-1}(u_1) - \rho_{12} t_{\nu_{12}}^{-1}(u_2)) \times \left( \frac{(\nu_{12} + (t_{\nu_{12}}^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho_{12}^2)}{\nu_{12} + 1} \right)^{-1/2} \right),$$

а обратная  $h$ -функция относительно первого аргумента равна

$$h^{-1}(u_1, u_2; \rho_{12}, \nu_{12}) = t_{\nu_{12}} \left( t_{\nu_{12}+1}^{-1} \left( \sqrt{\frac{(\nu_{12} + (t_{\nu_{12}}^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho_{12}^2)}{\nu_{12} + 1}} \right) + \rho_{12} t_{\nu_{12}}^{-1}(u_2) \right).$$

В приведенных формулах используются следующие обозначения:  $t_v(z)$  — значение функции распределения Стьюдента с  $v$  степенями свободы в точке  $z$ , а  $t_v^{-1}(u)$  — значение обратной к  $t_v(z)$  функции распределения в точке  $u$ .

Для двумерной копула-функции Клейтона  $h$ -функция имеет вид:

$$h(u_1, u_2; \alpha_{12}) = u_2^{-\alpha_{12}-1} (u_1^{-\alpha_{12}} + u_2^{-\alpha_{12}} - 1)^{-1-1/\alpha_{12}},$$

а обратная  $h$ -функция относительно первого аргумента равна:

$$h^{-1}(u_1, u_2; \alpha_{12}) = \left( (u_1 \cdot u_2^{\alpha_{12}+1})^{-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}+1}} + 1 - u_2^{-\alpha_{12}} \right)^{-1/\alpha_{12}}.$$

Для двумерной копула-функции Гумбеля  $h$ -функция принимает вид:

$$h(u_1, u_2; \alpha_{12}) = C_{12}(u_1, u_2) \cdot \frac{1}{u_2} \cdot (-\ln u_2)^{\alpha_{12}-1} \cdot \{(-\ln u_1)^{\alpha_{12}} + (-\ln u_2)^{\alpha_{12}}\}^{1/\alpha_{12}-1},$$

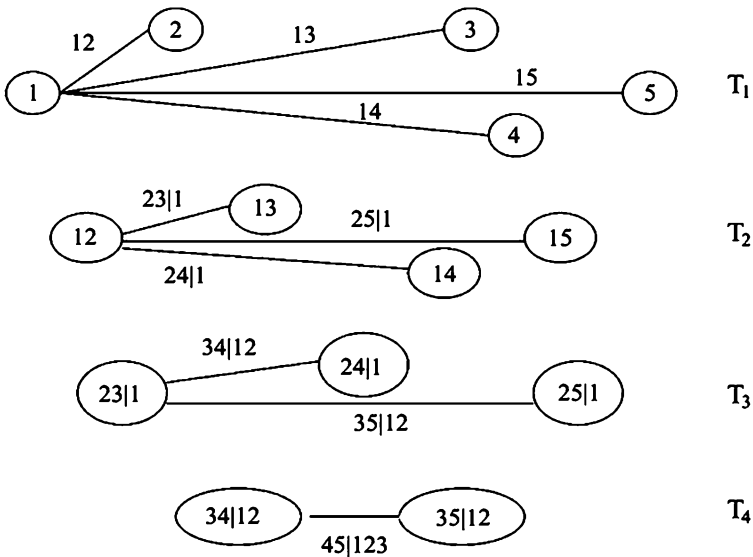
где  $C_{12}(u_1, u_2)$  — двумерное распределение Гумбеля. К сожалению, в случае копула-функции Гумбеля обратная  $h$ -функция может быть вычислена лишь с использованием численных методов. В условиях большой размерности целесообразнее использовать копула-функцию Клейтона см. [Joe (1997)] или [Cherubini et al. (2004)].

### 6.4.2. Каноническая ветвизация

Регулярную ветвизацию, при которой каждое дерево имеет единственный узел, называют *канонической ветвизацией*. Разложение  $n$ -мерной плотности, отвечающее канонической ветвизации, представлено в формуле (6.14), т. е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j,j+i|1, \dots, j-1} \{F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_{j+i}|x_1, \dots, x_{j-1})\}. \tag{6.17}$$

На рис. 6.11 показаны канонические ветвизации в 5-мерном случае:



**Рис. 6.11.** Примеры канонических ветвизаций в пятимерном случае

Представления вида (6.17) обладают преимуществом в ситуациях, когда можно выделить одну ключевую переменную, влияющую на другие переменные. Такая переменная может быть использована в качестве корня канонической ветвизации (переменная 1 на рис. 6.11).

**Генерирование многомерных наблюдений.** В работе [Aas et al. (2009)] показано, что алгоритм генерирования  $n$  зависимых случайных величин является общим как для канонической, так и для D-ветвизации:

- возьмем  $x_1 = w_1$ ;  $x_2 = F^{-1}(w_2|x_1)$ ;  $x_3 = F^{-1}(w_3|x_1, x_2)$ ; ...  
 ...;  $x_n = F^{-1}(w_n|x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Для того чтобы при любом  $j$  определить распределение случайной величины  $(X_j|X_1, X_2, \dots, X_{j-1})$ , в работе [Aas et al. (2009)] предлагается использовать  $h$ -функцию, заданную соотношением (6.16), и соотношение (6.15). Отметим, что отличие канонической ветвизации от D-ветвизации состоит в выборе переменной  $v_j$  для (6.15). Кроме того,

$$F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}) = \frac{\partial C_{j,j-1|1, \dots, j-2} \{F(x_j|x_1, \dots, x_{j-2}), F(x_{j-1}|x_1, \dots, x_{j-2})\}}{\partial F(x_{j-1}|x_1, \dots, x_{j-2})}$$

На основании этих результатов в работе [Aas et al. (2009)] предложена следующая процедура генерирования наблюдений, имеющих плотность в форме канонической ветвизации:

```

Sample  $w_1, \dots, w_n$  independent uniform on  $[0, 1]$ 
Set  $x_1 = v_{1,1} = w_1$ 
for  $i \leftarrow 2, \dots, n$ 
   $v_{i,1} = w_i$ 
  for  $k \leftarrow i - 1, i - 2, \dots, 1$ 
     $v_{i,1} = h^{-1}(v_{i,1}, v_{k,k}; \Theta_{k,i-k})$ 
  end for
   $x_i = v_{i,1}$ 
  if  $i == n$  then
    Stop
  end if
  for  $j \leftarrow 1, \dots, i - 1$ 
     $v_{i,j+1} = h(v_{i,j}, v_{j,j}; \Theta_{j,i-j})$ 
  end for
end for
    
```

Внешний цикл указанной выше процедуры работает по порядковым номерам компонент моделируемых многомерных наблюдений. Он включает в себя два подцикла: первый из них позволяет вычислить смоделированное значение  $i$ -й компоненты наблюдения, второй — вычислить условные распределения, необходимые для вычисления  $(i + 1)$ -й компоненты. Для вычисления этих условных распределений в работе [Aas et al. (2009)] используется  $h$ -функция, определенная соотношением (6.16), для которой в качестве аргументов берутся рассчитанные  $v_{i,j} = F(x_i|x_1, \dots, x_{j-1})$ . Параметры  $\Theta_{j,i}$  для  $h$ -функции — это параметры плотности соответствующей копула-функции  $c_{j,j+i|1, \dots, j-1}(\cdot|\cdot)$ .

**Оценивание параметров.** Копула-функции с канонической ветвизацией могут быть оценены с помощью метода максимального правдоподобия, для простоты положим, как и в [Aas et al. (2009)], что

$\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$ ,  $i = 1, \dots, n$  независимы во времени. Такое предположение не является ограничительным, поскольку при наличии зависимости можно на первом этапе оценить одномерные модели временных рядов, а затем для стандартизированных остатков использовать копула-функцию с канонической ветвизацией. Такой подход к оцениванию можно считать расширением метода максимального псевдоправдоподобия. Для копула-функций он впервые был предложен в работе [Oakes (1994)], а позднее в работах [Genest et al. (1995)], [Shih, Louis (1995)] были представлены такие асимптотические свойства получаемых оценок, как состоятельность и асимптотическая нормальность. В [Kim et al. (2007)] при помощи методов симуляционного моделирования показано, что в условиях, когда частные распределения неизвестны (это довольно распространенная ситуация в прикладных задачах), метод максимального псевдоправдоподобия дает более точные оценки, чем метод максимального правдоподобия. Кроме того, в [Kim et al. (2008)] показано, что в случае многомерных моделей с гетероскедастичностью этот метод дает оценки, являющиеся состоятельными и асимптотически нормальными.

Однако в случае, когда вместо многомерной копула-функции используется разложение на парные копула-функции, методология оценивания будет отличаться от представленной выше (см. [Aas et al. (2009)]).

Для копула-функции с канонической ветвизацией логарифмическая функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^T \ln \left[ c_{j,j+i|1,\dots,j-1} F(x_{j,t}|x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t}), \right. \\ \left. F(x_{j+i,t}|x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t}) \right]. \quad (6.18)$$

В работе [Aas et al. (2009)] предложен следующий алгоритм вычисления логарифмической функции правдоподобия (6.18):

```

log-likelihood = 0.
for i ← 1, ..., n
  v0,i = xi
end for
for j ← 1, ..., n - 1
  for i ← 1, ..., n - j
    log-likelihood = log-likelihood + L(vj-1,1, vj-1,i+1; Θj,i)
  end for
  if j == n - 1 then
    Stop
  end if

```



**Генерирование многомерных наблюдений.** В работе [Aas et al. (2009)] предложена следующая процедура моделирования наблюдений, закон распределения которых представлен с помощью D-ветвизации:

Sample  $w_1, \dots, w_n$  independent uniform on  $[0, 1]$

Set  $x_1 = v_{1,1} = w_1$

Set  $x_2 = v_{2,1} = h^{-1}(w_2, v_{1,1}; \Theta_{1,1})$

$v_{2,2} = h(v_{1,1}, v_{2,1}; \Theta_{1,1})$

for  $i \leftarrow 3, \dots, n$

$v_{i,1} = w_i$

for  $k \leftarrow i - 1, i - 2, \dots, 2$

$v_{i,k} = h^{-1}(v_{i,1}, v_{i-1,2k-2}; \Theta_{k,i-k})$

end for

$v_{i,1} = h^{-1}(v_{i,1}, v_{i-1,1}; \Theta_{1,i-1})$

$x_i = v_{i,1}$

if  $i = n$  then

Stop

end if

$v_{i,2} = h(v_{i-1,1}, v_{i,1}; \Theta_{1,i-1})$

$v_{i,3} = h(v_{i,1}, v_{i-1,1}; \Theta_{1,i-1})$

for  $i > 3$  then

for  $j \leftarrow 2, \dots, i - 2$

$v_{i,2j} = h(v_{i-1,2j-2}, v_{i,2j-1}; \Theta_{j,i-j})$

$v_{i,2j+1} = h(v_{i,2j-1}, v_{i-1,2j-2}; \Theta_{j,i-j})$

end for

end if

$v_{i,2i-2} = h(v_{i-1,2i-4}, v_{i,2i-3}; \Theta_{i-1,1})$

end for

Как и в случае канонической ветвизации, процедура моделирования D-ветвизации состоит из одного внешнего цикла, включающего один подцикл для моделирования переменных, а также один подцикл для вычисления необходимых условных распределений. Тем не менее с вычислительной точки зрения этот алгоритм является менее эффективным, чем алгоритм моделирования канонической ветвизации, поскольку число условных распределений, которые необходимо вычислить, для D-ветвизации равно  $(n - 2)^2$ , а для канонической ветвизации —  $(n - 2)(n - 1)/2$ . Отметим, что в случае D-ветвизации параметры  $\Theta_{j,i}$  в  $h$ -функции — это множество параметров соответствующей скопировано с сайта  
 Разработка электронных библиотек  
 https://право.информ2000.рф

**Оценивание параметров.** В случае D-ветвизации логарифмическая функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^T \ln \left[ c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1} \text{big}(F(x_{i,t}|x_{i+1,t}, \dots, x_{i+j-1,t}), F(x_{i+j,t}|x_{i+1,t}, \dots, x_{i+j-1,t})) \right].$$

В работе [Aas et al. (2009)] предлагается следующий алгоритм вычисления логарифмической функции правдоподобия:

```

log-likelihood = 0.
for i = 1, ..., n
  v0,i = xi
end for
for i = 1, ..., n - 1
  log-likelihood = log-likelihood + l(v0,i, v0,i+1; Θ1,i)
end for
v1,1 = h(v0,1, v0,2; Θ1,1)
for k = 1, ..., n - 3
  v1,2k = h(v0,k+2, v0,k+1; Θ1,k+1)
  v1,2k+1 = h(v0,k+1, v0,k+2; Θ1,k+1)
end for
v1,2n-4 = h(v0,n, v0,n-1; Θ1,n-1)
for j = 2, ..., n - 1
  for i = 1, ..., n - j
    log-likelihood = log-likelihood + l(vj-1,2i-1, vj-1,2i; Θj,i)
  end for
  if j = n - 1 then
    Stop
  end if
  vj,1 = h(vj-1,1, vj-1,2; Θj,1)
  if n > 4 then
    for i = 1, ..., n - j - 2
      vj,2i = h(vj-1,2i+2, vj-1,2i+1; Θj,i+1)
      vj,2i+1 = h(vj-1,2i+1, vj-1,2i+2; Θj,i+1)
    end for
  end if
  vj,2n-2j-2 = h(vj-1,2n-2j, vj-1,2n-2j-1; Θj,n-j)
end for

```

Здесь  $l(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \Theta)$  — логарифмическая функция правдоподобия для выбираемой копула-функции, параметры которой определяются вектором  $\Theta$ , а векторы наблюдений  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{v}$  заданы. Отметим, что  $\Theta_{j,i}$  — параметры плотности копула-функции  $c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}$ .

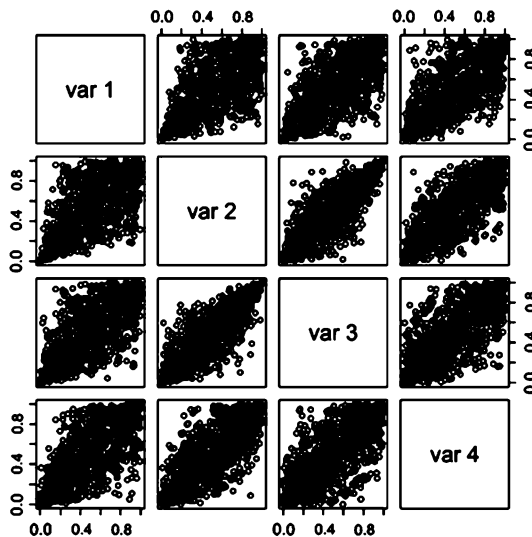


#### 6.4.4. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: построение парных копула-функций

Если нужно смоделировать и оценить копула-функцию, используя ее разложение на парные копула-функции, необходимо воспользоваться модулем процедур «copulaGOF» из пакета R, разработанного Даниэлем Бергом. Так, например, D-ветвизация в четырехмерном случае может быть смоделирована и оценена следующим образом:

```
x = SimulateCopulae(n=1000,d=4,construction =list(type = "dpcc",copula
=c("clayton", "gumbel", "frank", "gumbel", "clayton", "gumbel")),
param = list(c(2,3,6,1.3,1,1.4),
rep(0,6)))
pairs(x)
dpcc.par = EstimateCopulaParameter(x,construction=list(type=
"dpcc",copula = c("clayton", "gumbel", "frank", "gumbel", "clayton",
"gumbel"))))
dpcc.par
$t [1] 1.951387 2.991580 6.052075 1.343258 0.949556 1.410108
$nu [1] 0
$loglik [1] 1899.111
```

Биplotы (диаграммы рассеяния пар компонент) для наблюдений из четырехмерной копула-функции с D-ветвизацией представлены на рис. 6.13.



**Рис. 6.13.** Диаграмма рассеяния пар компонент для наблюдений из четырехмерной копула-функции с D-ветвизацией

## 6.5. Меры зависимости

Меры зависимости являются весьма полезными инструментами для описания структуры двумерной зависимости. В этой главе рассмотрим три возможные меры: *коэффициент корреляции*, *коэффициент ранговой корреляции* и *коэффициент хвостовой зависимости*.

Достаточно хорошей мерой зависимости в классе эллиптических распределений является коэффициент корреляции. Этот класс включает в себя, например, нормальное распределение, смеси нормальных распределений. Однако коэффициент корреляции как мера зависимости для многомерных распределений вне класса эллиптических распределений обладает рядом недостатков. В качестве альтернативы предлагаются две другие меры зависимости, которые в некоторых случаях оказываются более приемлемыми.

### 6.5.1. Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции между случайными величинами  $X$  и  $Y$ , как известно, определяется следующим образом (см., например, [Айвазян (2010), п. 3.2.2]):

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}},$$

где  $\text{Cov}(X, Y)$  — ковариация между  $X$  и  $Y$ ,  $\text{Var}(X)$  и  $\text{Var}(Y)$  — дисперсии  $X$  и  $Y$  соответственно. Ниже представлены основные свойства коэффициента корреляции.

1.  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ .
2. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\rho(X, Y) = 0$ .
3.  $|\rho(X, Y)| = 1$  тогда и только тогда, когда  $P(X = a + bY) = 1$  для некоторых  $a$  и  $b \neq 0$ .
4.  $\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sign}(\alpha\gamma)\rho(X, Y)$ .
5. Пусть  $(X, Y)$  имеет совместное двумерное нормальное распределение с частными стандартными нормальными распределениями. Тогда коэффициент корреляции  $\rho$  между  $X$  и  $Y$  однозначно определяет совместное распределение  $(X, Y)$ .

Обобщение коэффициента корреляции на многомерный случай можно найти во многих учебниках по статистике, например [Mardia et al. (1977)].

Пусть  $\hat{\rho}$  — выборочный коэффициент корреляции. Хорошо известно, что для проверки гипотезы  $H_0 : \rho = 0$  против альтернативы  $H_1 : \rho \neq 0$  может быть использована следующая тестовая статистика:

$$\hat{t} = \frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}},$$

которая при справедливости нулевой гипотезы имеет  $t_{n-2}$ -распределение — см., например, [Айвазян (2010), с.78].

Если воспользоваться  $z$ -преобразованием Фишера, то получим:

$$z = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1-\hat{\rho}}{1+\hat{\rho}} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right), \\ \sqrt{n-3}(z-\zeta) \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

где знаком  $\xrightarrow{d}$  обозначена асимптотическая сходимость по распределению при бесконечно растущем объеме выборки  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Более того, хорошо известно, что если  $\rho \neq 0$ , то

$$\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{d} N(0, (1-\rho^2)^2).$$

Если  $X$  и  $Y$  имеют распределения (не обязательно нормальные), для которых конечен четвертый момент и  $\rho(X, Y) \neq 0$ , то

$$\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{d} N(0, \gamma^2)$$

при некотором  $\gamma^2$  (см. [Fang et al. (1987)], [Rodgers, Nicewander (1988)], [Embrechts et al. (2002)] и ссылки в этих работах).

К сожалению, для многомерных распределений неэллиптического типа коэффициент корреляции обладает рядом недостатков.

1. Равенство коэффициента корреляции нулю эквивалентно независимости в случае многомерного нормального распределения. Однако уже для многомерного распределения Стьюдента это не так.
2. Коэффициент корреляции инвариантен относительно линейных преобразований, но, как правило, не инвариантен относительно более общих преобразований  $T(\cdot)$ :

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y).$$

Например, две случайные величины, имеющие логнормальное распределение, имеют коэффициент корреляции, отличный от коэффициента корреляции между их лог-преобразованиями.



**Определение 6.5.** Наблюдения  $(x_i, y_i)(x_j, y_j)$  называют согласованными, если  $x_i < x_j, y_i < y_j$ , или если  $x_i > x_j, y_i > y_j$ . Аналогично,  $(x_i, y_i)(x_j, y_j)$  называют рассогласованными наблюдениями, если  $x_i < x_j, y_i > y_j$  или если  $x_i > x_j, y_i < y_j$ . Это эквивалентно тому, что  $(x_i, y_i)(x_j, y_j)$  являются согласованными наблюдениями, если  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ , и рассогласованными, если  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ .

Другими словами, согласованность наблюдений возникает в случае, если большие значения одного наблюдения соответствуют большим значениям другого наблюдения, а малые значения также соответствуют малым значениям. Если это не так, то наблюдения называют рассогласованными.

**Коэффициент ранговой корреляции Спирмена ( $\rho$ -Спирмена).** Коэффициент  $\rho$ -Спирмена — мера согласованности между двумя случайными величинами, основанная на использовании понятий согласованности и рассогласованности.

**Определение 6.6.** Для двух непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ , совместное распределение которых имеет копула-функцию  $C(\cdot)$ ,  $\rho$ -Спирмена определяется как

$$\rho_S(X, Y) = 3Q(C, P) = 12 \iint uv dC(u, v) - 3 = 12 \iint C(u, v) dudv - 3, \quad (6.19)$$

где  $u = F_X(x), v = F_Y(y)$ , а  $Q(\cdot)$  — разность между вероятностями согласованности и рассогласованности (для более детальной информации см. [Nelsen (2006)]).

Эквивалентное выражение для  $\rho$ -Спирмена может быть дано в форме

$$\rho_S(X, Y) = \text{Corr}(F(X), G(Y)),$$

где корреляция (Corr) понимается в классическом смысле, а  $F$  и  $G$  — функции частных распределений случайных величин  $X$  и  $Y$ . Этот результат вытекает из того факта, что ранги  $u$  и  $v$  являются наблюдениями из равномерно распределенных на  $(0; 1)$  случайных величин  $U = F(X)$  и  $V = G(Y)$ , совместное распределение которых определяется копула-функцией  $C$ .

Поскольку  $U$  и  $V$  имеют среднее  $1/2$  и дисперсию  $1/12$ , выражение для  $\rho_S(X, Y)$  в (6.19) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 12 \iint uv dC(u, v) - 3 = 12E(UV) - 3 = \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \\ &= \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\rho$ -Спирмена для пары непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$  равно корреляции между рангами  $X$  и  $Y$ .

В многомерном случае  $\rho$ -Спирмена (*матрица*) определяется как

$$\rho_S(\mathbf{X}) = \mathbf{Corr}(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)),$$

где  $\mathbf{Corr}(\cdot)$  — корреляционная матрица; компоненты матрицы  $\rho_S(\mathbf{X})$  определяются как

$$\rho_S(\mathbf{X})_{ij} = \text{Corr}(F_i(X_i), F_j(X_j)).$$

Перечислим основные свойства коэффициента  $\rho$ -Спирмена.

1.  $\rho_S$  симметричен.
2.  $|\rho_S| \leq 1$ . В частности, для  $Y = T(X)$ , где  $T(\cdot)$  — строго возрастающая функция,  $\rho_S(X, Y) = 1$ ; а для  $Y = T(X)$ , где  $T(\cdot)$  — строго убывающая функция,  $\rho_S(X, Y) = -1$ .
3.  $\rho_S(T_x(X), T_y(Y)) = \rho_S(X, Y)$  для любых строго возрастающих отображений  $T_x(\cdot)$  и  $T_y(\cdot)$ .
4. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\rho_S(X, Y) = 0$ .
5. Если  $(X, Y)$  имеет нормальное распределение с коэффициентом корреляции  $\rho$  и стандартными нормальными частными распределениями, то

$$\rho = 2 \sin[(\pi/6)\rho_S] \quad \text{или} \quad \rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2}\rho\right).$$

Последний результат справедлив также в случае, когда совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  имеет нормальную копула-функцию, а частные распределения непрерывны. К сожалению, соотношение между коэффициентом  $\rho$ -Спирмена и коэффициентом корреляции не выполняется для всех распределений из эллиптического семейства — см., например, [Hult, Lindskog (2002)], [Nelsen (2006)].

Можно показать, что непараметрическая оценка для  $\rho_S$ , построенная по наблюдениям  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, T$ , имеет вид

$$\hat{\rho}_S = \frac{6}{T(T-1)(T-2)} \sum_{1 \leq i < j < k \leq T} 3 \cdot \text{sign}(X_i - X_j) \cdot \text{sign}(Y_i - Y_k)$$

и является несмещенной.

Если  $X_i$  и  $Y_i$  независимы,  $i = 1, \dots, T$ , то распределение  $\sqrt{T}\hat{\rho}_S$  асимптотически сходится к  $N(0, 1)$ . Более детальную информацию см.

в [Hollander, Wolfe (1973)], [Conover (1999)], [van de Wiel, Bucchianico (2001)].

**Коэффициент ранговой корреляции Кендалла ( $\tau$ -Кендалла).** Коэффициент  $\tau$ -Кендалла — это также мера связи между двумя случайными величинами, основанная на использовании понятий согласованности и рассогласованности и определяемая следующим образом.

**Определение 6.7** (заимствовано из [Kruskal (1958)]). Пусть  $(X, Y)$  — случайный вектор с распределением  $H(x, y)$ , а  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  — случайный вектор, такой, что  $X$  и  $Y$  независимы, распределение  $X$  совпадает с распределением  $\tilde{X}$ , распределение  $Y$  совпадает с распределением  $\tilde{Y}$ . Коэффициент  $\tau$ -Кендалла для вектора  $(X, Y)$ , компоненты которого есть непрерывные случайные величины, определяется как разность между вероятностью согласованности и вероятностью рассогласованности, т. е.

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= P \left\{ (X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0 \right\} - P \left\{ (X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0 \right\} = \\ &= E[\text{sign}(X - \tilde{X})\text{sign}(Y - \tilde{Y})] = \\ &= P \left\{ X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y} \right\} + P \left\{ X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y} \right\} - \\ &\quad - P \left\{ X < \tilde{X}, Y > \tilde{Y} \right\} - P \left\{ X > \tilde{X}, Y < \tilde{Y} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда для  $n$ -мерного случайного вектора  $\mathbf{X}$  и случайного вектора  $\tilde{\mathbf{X}}$ , компоненты которого независимы, а их частные распределения равны частным распределениям соответствующих компонент вектора  $\mathbf{X}$ , матрица  $\tau$ -Кендалла  $\rho_\tau(\mathbf{X})$  определяется следующим образом:

$$\rho_\tau(\mathbf{X}) = \text{Cov} \left[ \text{sign}(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) \right],$$

где  $(i, j)$ -й элемент этой матрицы определяется формулой  $\rho_\tau(\mathbf{X})_{ij} = \text{Cov}[\text{sign}(X_i - \tilde{X}_i), \text{sign}(X_j - \tilde{X}_j)]$ .

В частности, в двумерном случае ( $n = 2$ ) матрицей  $\tau$ -Кендалла будет

$$\rho_\tau(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \tau(X, Y) \\ \tau(X; Y) & 1 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что существуют некоторые другие  $n$ -мерные обобщения  $\tau$ -Кендалла. Более детальную информацию можно найти, например, в [Clemen, Jouini (1996)] и [Barbe et al. (1996)]. Основные свойства этой меры зависимости, а также соответствующие доказательства представлены в работах [Embrechts et al. (2002)] и [Nelsen (2006)].

Как правило, если  $\tau$ -Кендалла положителен, то с большой вероятностью мы имеем положительную зависимость. Если этот коэффициент отрицателен, то следует ожидать отрицательную зависимость. Кроме того,  $\tau$ -Кендалла может быть представлен в терминах копула-функции, что облегчает вычислительную работу.

**Теорема 6.5.** Коэффициент  $\tau$ -Кендалла для двумерной случайной величины, характеризующейся копулой  $(u, v)$ , определяется формулой

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

**Доказательство.** См. в [Nelsen (1999), p. 127–129].

Основные свойства коэффициента  $\tau$ -Кендалла:

1.  $\tau(X, Y)$  симметричен.
2.  $-1 \leq \tau(X, Y) \leq 1$ .
3. Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\tau(X, Y) = 0$ .
4.  $\tau(T_x(X), T_y(Y)) = \tau(X, Y)$  для любых строго возрастающих отображений  $T_x(\cdot)$  и  $T_y(\cdot)$ .

Оценка коэффициента  $\tau$ -Кендалла требует вычисления двойного интеграла, что для распределений эллиптического типа представляет собой довольно непростую задачу. Однако можно показать (см. [Lindskog et al. (2003)]), что  $\tau$ -Кендалла для эллиптических распределений определяется следующим образом:

$$\tau(X, Y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho,$$

где  $\rho$  — обычный парный коэффициент корреляции.

Для архимедовых копула-функций ситуация значительно проще, так как  $\tau(X, Y)$  может быть оценен с использованием генератора копула-функции. А именно, в работе [Genest, MacKay (1986)] показано, что  $\tau$ -Кендалла для архимедовых копула-функций определяется соотношением

$$\tau(X, Y) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt,$$

где  $\varphi(\cdot)$  — генератор копула-функции. Например, можно показать, что для копула-функций Клейтона или Гумбеля мы имеем следующие ре-



- для копула-функции Клейтона:  $\tau(X, Y) = \frac{\alpha}{\alpha+2}$ ;
- для копула-функции Гумбеля:  $\tau(X, Y) = 1 - \frac{1}{\alpha}$ ,

где  $\alpha$  — параметр копула-функции.

Можно показать, что непараметрическая оценка для  $\tau$ -Кендалла, построенная по наблюдениям  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, T$ , и имеющая вид

$$\hat{\tau} = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq T} \text{sign}(X_i - X_j) \text{sign}(Y_i - Y_j),$$

является несмещенной.

Если  $X_i$  и  $Y_i$  независимы, то распределение случайной величины  $\sqrt{T}\hat{\tau}$  сходится к  $N(0, 4/9)$ . Более подробная информация содержится, например, в [Ferguson et al. (2000)].

### 6.5.3. Хвостовая зависимость

Определим понятия верхней и нижней хвостовой зависимости [Joe (1997)]:

**Определение 6.8.** Пусть  $(X, Y)$  — случайный вектор, компоненты которого есть непрерывные случайные величины с частными распределениями  $F_X$  и  $F_Y$ . Тогда коэффициент  $\lambda^U$  верхней хвостовой зависимости  $X$  и  $Y$  определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \lambda^U &= \lim_{u \rightarrow 1} P[Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)] = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} P[X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)] = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \end{aligned}$$

при условии, что пределы существуют, где  $C(u, v)$  — двумерная копула-функция случайного вектора  $(X, Y)$ .

При этом случайные величины  $X$  и  $Y$  называют асимптотически зависимыми на верхнем хвосте, если  $\lambda^U \in (0, 1]$ ,  $X$  и  $Y$  называют асимптотически независимыми, если  $\lambda^U = 0$ .

Другими словами, верхняя хвостовая зависимость существует тогда, когда имеется положительная вероятность одновременного возникновения положительные выбросов.  $\lambda^U$  широко используется в теории экстремальных значений и представляет собой вероятность того, что одна переменная примет экстремальные значения при условии, что другая переменная также принимает экстремальные значения. Коэффициент  $\lambda^U$  можно рассматривать как меру зависимости квантилей — см., например, [Coles et al. (1999)].

Аналогично можно определить нижнюю хвостовую зависимость.

**Определение 6.9.** Пусть  $(X, Y)$  — двумерный случайный вектор, компонентами которого являются непрерывные случайные величины, частные распределения которых равны  $F_X$  и  $F_Y$ . Тогда коэффициент  $\lambda^L$  нижней хвостовой зависимости между  $X$  и  $Y$  равен:

$$\begin{aligned} \lambda^L &= \lim_{u \rightarrow 0} P[Y \leq F_Y^{-1}(u) | X \leq F_X^{-1}(u)] = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} P[X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \end{aligned}$$

при условии, что предел существует.

Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются асимптотически зависимыми на нижнем хвосте, если  $\lambda^L \in (0, 1]$ , и асимптотически независимыми на нижнем хвосте, если  $\lambda^L = 0$ .

Таким образом, нижняя хвостовая зависимость существует тогда, когда существует положительная вероятность возникающих одновременно отрицательных выбросов.

Поскольку эллиптические распределения являются радиально симметричными, для них коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости будут равны между собой. Например, для нормальной копула-функции коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости определяются соотношением

$$\lambda^L = \lambda^U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} [P(Y > x | X = x)] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 - \Phi \left( x \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \right] = 0.$$

Таким образом, вне зависимости от величины парного коэффициента корреляции  $\rho$  ( $\rho \neq 1$ ), если рассматривать экстремально большие положительные значения  $X$  и  $Y$  на правом хвосте, то для них получим асимптотическую независимость. Этот факт хорошо известен — см., например, [Sibuya (1961)], [Resnick (1987)].

Для копула-функции Стьюдента коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости также совпадают и равны

$$\lambda^L = \lambda^U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} [P(Y > x | X = x)] = 2 - 2t_{\nu+1} \left( \sqrt{\nu+1} \cdot \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right).$$

Очевидно, они возрастают по  $\rho$  и убывают по  $\nu$ . В этой формуле через  $t_{\nu+1}$ , как и ранее, обозначена одномерная функция распределения Стьюдента с  $(\nu + 1)$  степенями свободы. Если число степеней свободы устремить к бесконечности, то  $\lambda^U$  будет стремиться к 0 при  $\rho < 1$ .

Рассмотрим коэффициенты  $\lambda^L$ ,  $\lambda^U$  для архимедовых копула-функций. Так, для копула-функции Гумбеля лишь верхняя хвостовая зависимость положительна:  $\lambda^U = 2 - 2^{1/\alpha}$ , а  $\lambda^L = 0$ . Тогда как для

копула-функции *Клейтона* положительна лишь нижняя хвостовая зависимость:  $\lambda^U = 0$ ,  $\lambda^L = 2^{-1/\alpha}$ .

Следует отметить, что хвостовая зависимость для архимедовых копула-функций может быть представлена в терминах генераторов, обратных к ним функций и первых производных, см. [Joe (1997), [Nelsen (2006)]. В работах [Coles et al. (1999)], [Poon et al. (2004)] представлены робастные непараметрические оценки для коэффициентов хвостовой зависимости.

#### 6.5.4. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: меры зависимости

В пакете R использование модулей «copula» и «fscopulae» дает возможность вычислять упомянутые выше меры зависимости для множества типов копула-функций. Ниже представлены некоторые примеры (заинтересованным читателям рекомендуется ознакомиться с руководством к пакету R).

```
# EXAMPLES WITH ARCHIMEDEAN COPULAS AND THE
"copula" PACKAGE
gumbel.cop <- gumbelCopula(3)
kendallsTau(gumbel.cop)
[1] 0.6666667
spearmanRho(gumbel.cop)
[1] 0.848167
tailIndex(gumbel.cop)
lower upper
0.000000 0.740079
# let us compute the sample versions
x <- rcopula(gumbel.cop, 200)
cor(x, method = "kendall")
[1] [,2]
[1,] 1.0000000 0.6592965
[2,] 0.6592965 1.0000000
cor(x, method = "spearman")
[1] [,2]
[1,] 1.0000000 0.8483507
[2,] 0.8483507 1.0000000
# compare with the true parameter value 3
calibKendallsTau(gumbel.cop, cor(x, method="kendall")[1,2])
[1] 2.935103
calibSpearmanRho(gumbel.cop, cor(x, method="spearman")[1,2])
[1] 3.001893
calibSpearmanRho(gumbel.cop, cor(x, method="spearman")[1,2])
[1] 3.001893
# EXAMPLES WITH ARCHIMEDEAN COPULAS AND THE
"fscopulae" PACKAGE
# calibrating Kendall's tau for elliptical copulae
```

```

# ellipticalRho computes Spearman's rho for elliptical copulae
ellipticalTau(rho = -0.5)
Tau
-0.3333333 attr(,"control")
rho
-0.5
ellipticalRho(rho = 0.75, type = "t", subdivisions = 100)
Rho
0.71
attr(,"control")
rho type tau
"0.75" "t" "0.5399"
# ellipticalTailCoeff
# Student-t Tail Coefficient:
ellipticalTailCoeff(rho = 0.25, param = 3, type = "t")
lambda
0.1962612
attr(,"control")
rho type param.nu
"0.25" "t" "3"

```

## 6.6. Процедуры оценивания: параметрические методы

Пусть  $x_{1t}, \dots, x_{nt}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , — многомерные наблюдения, где  $n$  — размерность наблюдаемой случайной величины, а  $T$  — число имеющихся наблюдений.

### 6.6.1. Метод максимального правдоподобия (ММП или одношаговый метод)

Пусть  $f(\cdot)$  — плотность совместного распределения случайного вектора  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

$$f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma) = c(F_1(\tilde{x}_1; \alpha_1), \dots, F_1(\tilde{x}_n; \alpha_n); \gamma) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(\tilde{x}_i; \alpha_i),$$

где  $f_i$  — плотность одномерного частного распределения  $X_i$ ,  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  — некоторые заданные (текущие) значения случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  соответственно, а  $c(\cdot)$  — плотность копула-функции, определяемая следующим соотношением:

$$c(u_1, \dots, u_n; \gamma) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n; \gamma)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}$$

Пусть  $\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \gamma)$  — вектор оцениваемых параметров, где  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — параметры частных распределений  $F_i$ ,  $\gamma$  — вектор параметров копула-функции. Логарифмическая функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln(c(F_1(x_{1,t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{n,t}; \alpha_n); \gamma)) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{i,t}; \alpha_{i,t}).$$

Оценка максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_{ML}$  для параметров определяется как

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} l(\theta).$$

Ниже приводится результат, описывающий асимптотические свойства оценки максимального правдоподобия.

**Теорема 6.6 (состоятельность и асимптотическое распределение ММП-оценок).** Пусть  $\hat{\theta}_{ML}$  — ММП-оценка. Тогда при выполнении некоторых стандартных условий регулярности, см. [White (1994)], справедливо следующее:  $\hat{\theta}_{ML} \xrightarrow{P} \theta_0$ , где  $\theta_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma)'$ . Кроме того,

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \rightarrow N(0, I^{-1}(\theta_0)),$$

где  $I(\theta_0)$  — информационная матрица Фишера.

Доказательство. См. [White (1994)].

### 6.6.2. Двухшаговый метод максимального правдоподобия<sup>3</sup>

В соответствии с этим методом параметры частных распределений оцениваются независимо от параметров копула-функции. Другими словами, процедура оценивания разделена на следующие два шага.

Шаг 1: Используя ММП, оцениваются параметры  $\alpha_i$ ,  $i = 1 \dots, n$ , частных одномерных распределений  $F_i(\cdot)$ :

$$\hat{\alpha}_i = \arg \max_{\alpha} l^i(\alpha) = \arg \max_{\alpha} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{i,t}; \alpha),$$

где  $l^i$  — логарифмическая функция правдоподобия для частного распределения  $F_i(\cdot)$ .

<sup>3</sup> В англоязычном оригинале этот метод назван The Inference Functions for Margins. Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

Шаг 2: *Оцениваются параметры  $\gamma$  копула-функции при заданных значениях оценок, полученных на шаге 1:*

$$\hat{\gamma} = \arg \max_{\gamma} l^c(\gamma) = \arg \max_{\gamma} \sum_{t=1}^T \ln(c(F_1(x_{1,t}; \hat{\alpha}_1), \dots, F_n(x_{n,t}; \hat{\alpha}_n); \gamma)),$$

где  $l^c$  — логарифмическая функция правдоподобия для копула-функции.

Ниже (см. теоремы 6.7–6.9) описаны асимптотические свойства оценок, получаемых IFM-методом. Эти результаты представляют собой простые обобщения результатов, полученных для ММП-процедуры, см. [Newey, McFadden (1994)], [White (1994)], [Patton (2006a, b)].

Представленные ниже результаты получены в предположении некоторых стандартных условий регулярности, которые мы не будем конкретизировать, заинтересованный читатель может ознакомиться с ними в работе [White (1994)]. Из соображений простоты рассматривается двумерный случай. Отметим, что обобщения на многомерный случай получаются достаточно просто.

**Теорема 6.7 (состоятельность  $\hat{\alpha}_1$  и  $\hat{\alpha}_2$ ).** *Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\hat{\alpha}_1 \xrightarrow{P} \alpha_1$  и  $\hat{\alpha}_2 \xrightarrow{P} \alpha_2$ .*

**Доказательство.** См. [White (1994), теорема 3.13].

**Теорема 6.8 (состоятельность параметра  $\gamma$ ).** *Пусть функция*

$$n^{-1} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1,t}; \hat{\alpha}_1), F_2(x_{2,t}; \hat{\alpha}_2); \gamma)$$

*имеет единственный максимум в точке  $\gamma_0 \in \text{int}(\Gamma)$ . Тогда  $\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\Gamma$  — область допустимых значений параметра  $\gamma$ , а  $\text{int}(\Gamma)$  — внутренность этого множества.*

**Доказательство.** См. [White (1994), теорема 3.10].

Перед формулировкой теоремы 6.9 введем ряд обозначений. Определим штрафы для оценки  $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\gamma})'$ :

$$s_{1t} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \ln f_1(x_{1,t}; \alpha_1), \quad s_{2t} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \ln f_2(x_{2,t}; \alpha_2),$$

$$s_{3t} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln c(F_1(x_{1,t}; \alpha_1), F_2(x_{2,t}; \alpha_2); \gamma).$$

$$\begin{pmatrix}
 T^{-1} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 \ln f_1(x_{1,t}; \alpha_1)}{\partial \alpha_1^2} \right) & 0 \\
 0 & T^{-1} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 \ln f_2(x_{2,t}; \alpha_2)}{\partial \alpha_2^2} \right) \\
 T^{-1} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 \ln c(F_1(\cdot), F_2(\cdot); \gamma)}{\partial \alpha_1 \partial \gamma} \right) & T^{-1} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 \ln c(F_1(\cdot), F_2(\cdot); \gamma)}{\partial \alpha_2^2} \right) \\
 & 0 \\
 & 0 \\
 & T^{-1} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 \ln c(F_1(\cdot), F_2(\cdot); \gamma)}{\partial \gamma^2} \right)
 \end{pmatrix}$$

Последний столбец матрицы Hess( $\theta$ )

Матрица

$$\begin{pmatrix}
 T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{1t} \cdot s'_{1t} & T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{1t} \cdot s'_{2t} & T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{1t} \cdot s'_{3t} \\
 T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{2t} \cdot s'_{1t} & T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{2t} \cdot s'_{2t} & T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{2t} \cdot s'_{3t} \\
 T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{3t} \cdot s'_{1t} & T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{3t} \cdot s'_{2t} & T^{-1} \sum_{t=1}^T s_{3t} \cdot s'_{3t}
 \end{pmatrix}$$

ниже обозначается как OPG( $\theta$ )-матрица.

**Теорема 6.9 (асимптотика оценок, получаемых IFM-методом).** Для IFM-оценок выполняется свойство асимптотической нормальности, а именно

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \xrightarrow{d} N \left( 0, H_0^{-1} B_0 (H_0^{-1})' \right),$$

где  $H_0 = \mathbf{E} [Hess(\theta_0)]$ ,  $B_0 = \mathbf{E} [OPG(\theta_0)]$ , т. е.  $H_0$  и  $B_0$  – средние значения для гессиана штрафов и матрицы OPG. Матрица  $H_0^{-1} B_0 (H_0^{-1})'$  известна в теории копула-функций как информационная матрица Годамби [Joe, Xu (1996)], [Joe (1997)].

Из теорем 6.7–6.9 вытекает следующий весьма интересный факт.

**Равная эффективность IFM-метода и ММП.** Пусть  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  независимы (т. е. совместное распределение  $(x_{1t}, x_{2t})$  имеет копула-функцию  $C(u_1, u_2; \gamma) = u_1 \cdot u_2$ , плотность которой  $c(u_1, u_2; \gamma) = 1$ ), и для плотностей частных распределений выполнено информационное равенство. Тогда IFM-метод и ММП дают оценки, имеющие одинаковые

### 6.6.3. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: процедуры параметрического оценивания

Модуль «copula» в статистическом пакете R позволяет получать как ММП, так и IFM-оценки. Ниже представлен пример, взятый из работы [Yan (2007)]. Вначале генерируется выборка из двумерного распределения, частные распределения которого — гамма-распределения с параметрами  $\theta_\gamma = \{(2; 1), (3; 2)\}$ , а копула-функция — нормальная с параметром  $\alpha = 0.5$ ; затем по сгенерированной выборке строятся ММП- и IFM-оценки параметров.

```
# One step EML example from [Yan (2007)]
myMvd <- mvdc(copula=ellipCopula(family="normal", param=0.5),
margins=c("gamma", "gamma"),
paramMargins=list(list(shape=2, scale=1),
list(shape=3, scale=2)))
n <- 200
dat <- rmvdc(myMvd, n)
loglikMvdc(c(2,1,3,2,0.5), dat, myMvd)
[1] -778.3114
mm <- apply(dat, 2, mean)
vv <- apply(dat, 2, var)
b1.0 <- c(mm[1]^2 / vv[1], vv[1] / mm[1])
b2.0 <- c(mm[2]^2 / vv[2], vv[2] / mm[2])
a.0 <- sin(cor(dat[,1], dat[,2], method = "kendall")) * pi / 2)
start <- c(b1.0, b2.0, a.0)
fit.eml <- fitMvdc(dat, myMvd, start=start, optim.control=list
(trace=TRUE, maxit=2000))
fit.eml
The Maximum Likelihood estimation is based on 200 observations.
Margin 1 :
Estimate Std. Error
m1.shape 2.1279360 0.19842701
m1.scale 0.9246803 0.09716286
Margin 2 :
Estimate Std. Error
m2.shape 3.213331 0.3061706
m2.scale 1.778994 0.1835066
Copula:
Estimate Std. Error
rho.1 0.4671964 0.0552821
The maximized loglikelihood is -777.1381
The convergence code is 0 see ?optim.
```



```
loglik.marg <- function(b, x) sum(dgamma(x, shape=b[1], scale=b[2],
log=TRUE))
ctrl <- list(fnscale = -1)
b1hat <- optim(b1.0, fn=loglik.marg, x=dat[,1], control=ctrl)$par
b2hat <- optim(b2.0, fn=loglik.marg, x=dat[,2], control=ctrl)$par
udat <- cbind(pgamma(dat[,1], shape=b1hat[1], scale=b1hat[2]),
pgamma(dat[,2], shape=b2hat[1], scale=b2hat[2]))
fit.ifm <- fitCopula(myMvd, udat, method="ml",start=a.0)
c(b1hat, b2hat, fit.ifm@estimate) fit.ifm
[1] 2.3494821 0.9395788 3.1645483 2.0540858 0.4782428
fit.ifm
```

The estimation method is Maximum Likelihood based on 200 observations.

Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)

rho.1 0.4782428 0.04920972 9.718461 0

The maximized loglikelihood is 25.95508

The convergence code is 0

## 6.7. Процедуры оценивания: полупараметрические и непараметрические методы

### 6.7.1. Канонический метод максимального правдоподобия (КММП)<sup>4</sup>

КММП отличается от описанных выше методов тем, что в нем не делается никаких предположений относительно параметрической формы частных распределений. Процесс оценивания в КММП состоит из следующих двух шагов.

1. Преобразуем наблюдения  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ ,  $t = 1, \dots, T$ , следующим образом:

$$\hat{u}_{it} = F_{i,T}(x_{it}),$$

где  $F_{i,T}(\cdot) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{x_{it} \leq \cdot\}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а  $\mathbf{I}_{\{\cdot\}}$  — индикаторная функция множества  $\{\cdot\}$ . Другими словами,  $F_{i,T}(x)$  — это непараметрическая оценка частной функции распределения переменной  $X_i$ .

2. Оценим параметры копула-функции, максимизируя логарифмическую функцию правдоподобия<sup>5</sup>:

$$\hat{\gamma}_{CML} = \arg \max_{\gamma} \sum_{t=1}^T \ln c(F_{1,T}(x_{1t}), \dots, F_{n,T}(x_{nt}); \gamma).$$

Для простоты при описании асимптотических свойств КММП-оценки снова будем рассматривать только двумерный случай. Пусть  $l(u_1, u_2, \gamma) = \ln c(u_1, u_2; \gamma)$ . Далее индексами 1, 2,  $\gamma$  будем обозначать частные производные функции  $l(u_1, u_2, \gamma)$  относительно  $u_1, u_2, \gamma$  соответственно. В частности, обозначим первую и вторую производную функции  $l$  по  $\gamma$ :

$$S_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_{\gamma}(F_{1,T}(x_{1t}), F_{2,T}(x_{2t}); \gamma),$$

$$H_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_{\gamma\gamma}(F_{1,T}(x_{1t}), F_{2,T}(x_{2t}); \gamma).$$

Поскольку  $\hat{\gamma}_{CML}$  является решением следующего дифференциального уравнения:

$$S_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_{\gamma}(F_{1,T}(x_{1t}), F_{2,T}(x_{2t}); \gamma) = 0,$$

то, используя члены первого порядка разложения функции  $S_T$  в ряд Тейлора, получим:

$$0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_{\gamma}(F_{1,T}(x_{1t}), F_{2,T}(x_{2t}); \gamma) \Big|_{\gamma=\hat{\gamma}_{CML}} \simeq S_T + H_T(\hat{\gamma}_{CML} - \gamma),$$

и, следовательно,

$$\sqrt{T}(\hat{\gamma}_{CML} - \gamma) \simeq \sqrt{T} \frac{S_T}{-H_T}.$$

Из работ [Ruymgaart et al. (1972)], [Genest et al. (1995)], [Ruud (2000)] отметим, в частности, следующие результаты, справедливые при соблюдении некоторых условий регулярности:

- а)  $\hat{\gamma}_{CML} \rightarrow \gamma_0$  (п.н.) при  $T \rightarrow \infty$ ;
- б)  $\sqrt{T}(\hat{\gamma}_{CML} - \gamma_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 h^{-2})$ , где  $\sigma^2 = \text{Var}[l_{\gamma}(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}); \gamma) + W_1(x_{1t}) + W_2(x_{2t})]$ ,

<sup>5</sup> В дальнейшем предполагается, что анализируемое семейство копул зависит от единственного параметра  $\gamma$ .  
 Скопировано с сайта <http://www.Процедуры.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

$h = \mathbf{E}[l_{\gamma\gamma}(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}); \gamma)]$ ; выражение для  $\sigma^2$  дано здесь для *двумерного* случая ( $n = 2$ ), а  $W_i(x_{it})$  определяются соотношениями ( $i = 1, 2$ ):

$$W_i(x_{it}) = - \int \mathbf{I}_{\{F_i(x_{it}) \leq u_i\}} l_{\gamma i}(u_{1t}, u_{2t}; \gamma) c(u_{1t}, u_{2t}; \gamma) du_1 du_2;$$

в) полупараметрическая оценка  $\hat{\gamma}_{CML}$  менее эффективна, чем оценка, полученная с помощью одношагового метода максимального правдоподобия  $\hat{\gamma}_{ML}$  (за исключением случая, когда  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  статистически независимы).

### 6.7.2. Трехшаговый канонический метод максимального правдоподобия (КМЕ–СМЛ-метод)<sup>6</sup>

Начиная с момента выхода работы [Genest et al. (1995)] использование полупараметрических методов для копула-функций эллиптического типа стало обычной практикой, см., например, [Cherubini et al. (2004)], [McNeil et al. (2005)]. В частности, для копула-функций Стьюдента, после того, как на первом шаге получены непараметрические оценки частных функций распределения, можно получить оценку корреляционной матрицы, вычисленную с использованием метода моментов и оценок ранговых коэффициентов корреляции  $\tau$ -Кендалла. При этом степени свободы оцениваются с использованием метода максимального правдоподобия. Отметим, что оценка частных распределений на первом шаге не является необходимым условием для оценки корреляционной матрицы, поскольку оценка  $\tau$ -Кендалла основана на количестве согласованных наблюдений, которое не зависит от монотонных преобразований. Однако оценивание частных распределений является необходимым при оценке числа степеней свободы.

Ниже дается описание трехшагового КМЕ–СМЛ-метода (см. также [Boyué et al. (2000)], [McNeil et al. (2005)], [Fantazzini (2010)]).

#### Трехшаговый КМЕ–СМЛ-метод оценивания параметров копула-функций

1. Преобразуем  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$  к нормированным рангам  $(F_{1T}(x_{1t}), F_{2T}(x_{2t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}))$ , используя эмпирическую функцию распределения для каждой компоненты вектора наблюдений (здесь и далее  $n$  — размерность анализируемой случайной величины,  $T$  — общее число ее наблюдений).

<sup>6</sup> В англоязычном оригинале метод называется *Kendall- $\tau$  Moment-Estimator of Likelihood Method*.  
 Скопировано с сайта <http://www.право.информ2000.ru>  
 Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

2. Для всех пар  $(j, k)$  компонент вектора наблюдений оценим  $\tau$ -Кендалла:

$$\hat{R}_{jk}^\tau = \tau [F_{jT}(X_j), F_{kT}(X_k)] = (C_T^2)^{-1} \sum_{1 \leq t < s \leq T} \text{sign}((x_{1t} - x_{1s})(x_{2t} - x_{2s})).$$

Возьмем оценку корреляции для  $(j, k)$  компонент вектора наблюдений  $\hat{\Sigma}_{jk} = \sin(\frac{\pi}{2} \hat{R}_{jk}^\tau)$ . Поскольку покомпонентное преобразование, осуществленное на первом шаге, не гарантирует положительной определенности матрицы  $\hat{\Sigma} = (\hat{\Sigma}_{jk})$ , то для ее обеспечения обычно вносятся некоторые поправки [Rousseeuw, Molenberghs (1993)].

3. Находим оценку степеней свободы  $\hat{\nu}_{CML}$  копула-функций Стьюдента с использованием метода максимального правдоподобия:

$$\hat{\nu}_{CML} = \arg \max_{\nu} \sum_{t=1}^T \ln c_{T-copula} (F_{1T}(x_{1t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}); \hat{\Sigma}, \nu).$$

Второй шаг описанной процедуры реализует метод моментов, основанный на оценках  $q = n(n - 1)/2$  моментов и такого же количества коэффициентов  $\tau$ -Кендалла, оцененных с использованием эмпирических распределений (эта оценка известна как моментная оценка  $\tau$ -Кендалла). Следует еще раз отметить, что нет необходимости использовать оценку  $\tau$ -Кендалла, полученную с использованием именно эмпирических распределений, так как  $\tau$ -Кендалла сохраняет одно и то же значение при всех монотонных преобразованиях. Таким образом, можно взять  $q$  моментов от некоторой векторнозначной функции  $\psi$ , зависящей от корреляций  $\theta_0 = (\rho_1, \dots, \rho_q)'$ , а именно:

$$\psi(F_1, \dots, F_n; \theta_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}[\psi_1(F_1, F_2); \rho_1(\theta)] \\ \vdots \\ \mathbf{E}[\psi_q(F_{n-1}, F_n); \rho_q(\theta)] \end{pmatrix}.$$

Тогда теоретические моментные тождества могут быть представлены в виде

$$\psi(F_1, \dots, F_n; \theta_0) = (0, 0, \dots, 0)', \quad (6.20)$$

где  $\theta_0$  — истинное значение оцениваемого векторного параметра. Соответственно оценка  $\hat{\theta}$  определится из (6.20) с заменой теоретических моментов их выборочными аналогами.

Для оценки, полученной с помощью метода КМЕ–СМЛ, справедливы следующие теоремы (все доказательства представлены в приложении А работы Fantazzini (2010)).

**Теорема 6.10 (состоятельность  $\hat{\theta}$ ).** Предположим, что  $(x_{1t}, \dots, x_{nt})$  — независимые (по  $t$ ) наблюдения  $n$ -мерной случайной величины  $(X_1, \dots, X_n)$  со структурой зависимости, заданной плотностью копула-функции  $c(u_{1,t}, \dots, u_{n,t}; \Sigma_0, \nu_0)$ . Предположим, что:

а) пространство параметров  $\Theta$  является компактным подмножеством  $\mathbb{R}^q$ ;

б)  $q$ -мерный вектор моментов  $\psi(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n); \theta_0)$  непрерывен относительно  $\theta_0$  для любых  $X_j$ ;

в)  $\psi_i(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n); \theta)$  измеримы относительно  $X_j$  для всех  $\theta \in \Theta$ ;

г)  $\psi(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n); \theta) \neq 0$  для всех  $\theta \neq \theta_0, \theta \in \Theta$ ;

д)  $\sup_{\theta \in \Theta} \|\psi(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n); \theta)\| < \infty$ , где  $\|A\|$  обозначает евклидову норму матрицы  $A$ .

Тогда  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$  при  $T \rightarrow \infty$ .

При условиях теоремы 6.10, дополненных некоторыми условиями регулярности [Genest et al. (1995)], доказана и состоятельность оценки  $\hat{\nu}_{CML}$  (т. е.  $\hat{\nu}_{CML} \xrightarrow{P} \nu_0$  при  $T \rightarrow \infty$ ).

Асимптотическая нормальность оценок, полученных методом КМЕ–СМЛ, неочевидна, так как используется трехшаговая процедура, при которой на втором и третьем шагах используются разные методы оценивания. Возможным решением является представление оценки на третьем шаге КММП как оценки специального вида, полученной методом моментов. Отметим, что КММП-оценка определяется путем приравнивания к нулю производной (относительно параметра  $\nu$ ) логарифма функции правдоподобия:

$$\frac{\partial l(\cdot; \nu)}{\partial \nu} = \sum_{t=1}^T l_{\nu} \left( F_{1T}(x_{1t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}); \hat{\Sigma}, \hat{\nu} \right) = 0.$$

Разделив обе части на  $T$ , получим определение оценки по методу моментов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_{\nu} \left( F_{1T}(x_{1t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}); \hat{\Sigma}, \hat{\nu} \right) &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_{\nu} \left( F_{1T}(x_{1t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}); \hat{\Sigma}, \hat{\nu} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, КММП-оценка может быть представлена как оценка, получаемая методом моментов (ММ).

Оценка методом моментов — это то значение  $\theta$ , которое обеспечивает равенство между выборочными моментами (выборочные средние)

и их теоретическими аналогами. Поскольку число параметров равно  $q$ , то требуются  $q$  моментных уравнений с неизвестными  $\hat{\theta}$  (более подробно см. [Greene (2002)]). Таким образом, можно использовать известные асимптотические результаты, справедливые для метода моментов.

Определим выборочные моменты вектора  $\Psi_{KME-CML}$ , зависящего от параметров  $\hat{\Xi} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_q, \hat{\nu})'$ :

$$\Psi_{KME-CML} (F_{1T}(x_{1t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}); \hat{\Xi}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_1 (F_{1T}(x_{1t}), F_{2T}(x_{2t}); \hat{\rho}_1) \\ \dots \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_q (F_{(n-1)T}(x_{(n-1)t}), F_{nT}(x_{nt}); \hat{\rho}_q) \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_\nu (F_{1T}(x_{1t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}); \hat{\Sigma}, \hat{\nu}) \end{pmatrix} = 0. \quad (6.21)$$

В работе [Genest et al. (1995), § 4] получено асимптотическое распределение полученных из (6.21) оценок  $\hat{\Xi}$  векторного параметра  $\Xi$  (при этом используются непараметрические оценки частных распределений  $F_i$ ).

С учетом вышеизложенного справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.11 (асимптотическое распределение КМЕ–СМЛ-оценок).** Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы и некоторые дополнительные условия [Genest et al. (1995)]. Кроме того, предположим, что матрица  $\frac{\partial \Psi_{KME-CML}(\cdot; \Xi)}{\partial \Xi'}$  имеет ограниченные (по  $T$ ) элементы и является отрицательно определенной.

Тогда при  $T \rightarrow \infty$ :

$$\sqrt{T}(\hat{\Xi} - \Xi_0) \xrightarrow{d} N \left\{ 0, \mathbf{E} \left[ \frac{\partial \Psi_{KME-CML}}{\partial \Xi'} \right]^{-1} \right. \\ \left. \Upsilon_0 \left( \mathbf{E} \left[ \frac{\partial \Psi_{KME-CML}}{\partial \Xi'} \right]^{-1} \right)' \right\}, \quad (6.22)$$

где матрица  $T_0$  – ковариационная матрица вектора

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} \psi_1 (F_1(X_1), F_2(X_2); \rho_1) \\ \vdots \\ \psi_q (F_{n-1}(X_{n-1}), F_n(X_n); \rho_q) \\ \psi_\nu (F_1(X_1), \dots, F_n(X_n); \Sigma_0, \nu_0) + \sum_{j=1}^n W_{j\nu}(X_j) \end{pmatrix},$$

*a*

$$W_{j,\nu}(X_j) = \int \mathbf{I}_{\{F_j(X_j) \leq u_j\}} \frac{\partial^2}{\partial \nu \partial u_j} \ln c(u_1, \dots, u_n) dC(u_1, \dots, u_n).$$

Отметим, что последнее асимптотическое свойство выполняется и для многомерных моделей с *гетероскедастичностью*. Для таких моделей на первом этапе получают состоятельные оценки параметров одномерных частных распределений, а затем рассчитывают соответствующие оценки остатков (так называемые невязки), которые используются для оценки совместного распределения многомерного вектора остатков при помощи копула-функций. Этот результат является прямым следствием теорем 1 и 2 из работы [Kim et al. (2008)], которая, в свою очередь, использует работы [Koul, Ling (2006)], [Koul (2002)]. Отметим, что похожие результаты представлены также и в [Chen, Fan (2006)], но без доказательств. Соответствующий результат формулируется в теореме 6.12.

**Теорема 6.12 (асимптотика КМЕ–СМЛ-оценок для многомерных моделей с гетероскедастичностью).** *Предположим, что выполнены условия а)–д) теоремы 6.10, а также А.1–А.9 из [Kim et al. (2008)]. Тогда для КМЕ–СМЛ-оценки имеет место асимптотическая сходимость (6.22).*

Условия (А.1)–(А.4) справедливы для моделей достаточно общего вида. В частности, условия (А.1)–(А.2) требуют, чтобы плотность копула-функций имела непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Кроме того, они должны быть конечными вместе с их вторым моментом. Условие (А.3) — это техническое условие на частные производные, а условие (А.4) требует, чтобы было выполнено условие А.1 из [Genest et al. (1995)]. Условия (А.5)–(А.8) также являются техническими и взяты из работ [Koul (2002)] и [Koul, Ling (2006)]. Условие (А.9) не является слишком ограничительным. Например, если условное среднее является функцией исторических значений строго стационарных и эргодических временных рядов, то каждое слагаемое суммы является строго стационарным и эргодическим процессом с нулевым средним, а значит, условие (А.9) выполняется (см. [Taniguchi, Kakizawa (2000), теоремы 1.3.3–1.3.5], а также [Kim et al. (2008)]).

### **Свойства и вычислительные аспекты в условиях малых выборок**

Поскольку основные свойства предлагаемого полупараметрического метода являются асимптотическими, то на примерах смоделированных выборок в работе [Fantazzini (2010)] было проведено исследование





**Определение 6.10.** *Ядерная функция* — это действительная функция  $K(u)$ ,  $-\infty < u < +\infty$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) симметричность:  $K(u) = K(-u)$ ;
- 2) в точке  $u = 0$  достигается максимум;
- 3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1$ ;
- 4) неотрицательность:  $K(u) \geq 0$ ;
- 5)  $K(u)$  ограничена;
- 6)  $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u) du < \infty$ .

Свойства 5 и 6 необходимы для вывода асимптотических свойств оценок, получаемых на основе ядерных функций. Возьмем  $n$ -мерное ядро и его кумулятивную функцию:

$$k(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n k_j(x_j), \quad K(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{x_j} k_j(x) dx = \prod_{j=1}^n K_j(x_j),$$

где для простоты взяты произведения одномерных ядерных функций. Кроме того, возьмем

$$k(\mathbf{x}; \mathbf{h}) = \prod_{j=1}^n k_j\left(\frac{x_j}{h_j(T)}\right), \quad K(\mathbf{X}; \mathbf{h}) = \prod_{j=1}^n K_j\left(\frac{x_j}{h_j(T)}\right),$$

где  $\mathbf{h}(T)$  — диагональная матрица с элементами  $h_j(T)$ ,  $j = 1, \dots, n$  на главной диагонали и детерминантом  $|\mathbf{h}(T)|$ . При этом  $h_j(T)$  положительна и  $h_j \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ .  $\mathbf{h}(T)$  обычно называют «шириной окна» ядерной функции.

**Определение 6.11.** *Ядерная оценка  $\hat{f}_j(\cdot)$  плотности  $f_j(\cdot)$  распределения случайной величины  $Y_{jt}$  у<sub>j</sub> определяется как*

$$\hat{f}_j(y_j) = \frac{1}{Th_j} \sum_{i=1}^T k_j\left(\frac{y_j - Y_{jt}}{h_j(T)}\right),$$

а ядерная оценка плотности случайного вектора  $\mathbf{Y}_t$  в точке  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$  равна

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{T|\mathbf{h}(T)|} \sum_{i=1}^T k(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_t; \mathbf{h}(T)).$$

Аналогичным образом, ядерная оценка кумулятивной функции распределения случайной величины  $Y_{jt}$  в точке  $y_j$  равна

$$\hat{F}_j(y_j) = \int_{-\infty}^{y_j} \hat{f}_j(x) dx,$$

а ядерная оценка кумулятивной функции распределения случайного вектора  $\mathbf{Y}_t$  в точке  $\mathbf{y}$  равна:

$$\hat{F}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_n} \hat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Например, для гауссовской ядерной функции  $k_j(x) = \varphi(x)$  получаются следующие ядерные оценки функций распределения:

$$\hat{F}_j(y_j) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \Phi\left(\frac{y_j - Y_{jt}}{h_j}\right), \quad \hat{F}(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{y_j - Y_{jt}}{h_j}\right),$$

где через  $\varphi(\cdot)$  и  $\Phi(\cdot)$  обозначены соответственно плотность и функция распределения стандартного нормального распределения.

**Определение 6.12** (ядерная оценка копула-функции). В силу следствия из теоремы Шкляра  $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n))$ , где  $H(\cdot)$  — многомерная функция распределения. Тогда ядерная оценка  $\hat{C}(\mathbf{u})$  копула-функции  $C(\mathbf{u})$  определяется следующим образом:

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \hat{H}(\hat{\zeta}) = \hat{H}(\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_n),$$

где  $\hat{\zeta}_j = \inf_{y \in \mathbb{R}} \{y : \hat{F}_j(y) \geq u_j\}$  соответствует ядерной оценке квантиля уровня  $u_j$  для функции распределения случайной величины  $Y_{jt}$ .

В работах [Fermanian, Scaillet (2003)], [van der Vaart, Wellner (1996)] доказывается состоятельность и асимптотическая нормальность ядерных оценок  $\hat{C}(\mathbf{u})$ .

#### 6.7.4. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: процедуры полупараметрического оценивания

Продолжим рассмотрение примера, начатое в п. 6.6.3 (см. также [Фанташин, 2011]). Можно оценить параметр зависимости  $\rho$  при помощи

канонического метода максимума правдоподобия (КММП) без спецификации частных распределений.

```
# CML method
eu <- cbind((rank(dat[,1]) - 0.5)/n, (rank(dat[,2]) - 0.5)/n)
fit.cml <- fitCopula(myMvd, eu, method="mpl", start=a.0)
fit.cml
The estimation method is Maximum Pseudo-Likelihood based on 200
observations.
Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
rho.1 0.4806303 0.05066396 9.48663 0
The maximized loglikelihood is 26.02639
The convergence code is 0
```

Ниже представлены другие примеры, взятые из `copula` пакета.

```
# Example: Gumbel copula
gumbel.cop <- gumbelCopula(3, dim=2)
n <- 200 x <- rcopula(gumbel.cop, n) ## true observations
u <- apply(x, 2, rank) / (n + 1) ## pseudo-observations
## inverting Kendall's tau
fit.tau <- fitCopula(gumbel.cop, u, method="itau")
fit.tau
## inverting Spearman's rho
fit.rho <- fitCopula(gumbel.cop, u, method="irho")
fit.rho
## maximum pseudo-likelihood
fit.mpl <- fitCopula(gumbel.cop, u, method="mpl")
fit.mpl
## maximum likelihood
fit.ml <- fitCopula(gumbel.cop, x, method="ml")
fit.ml
## A multiparameter example
normal.cop <- normalCopula(c(0.6,0.36, 0.6),dim=3,dispstr="un")
x <- rcopula(normal.cop, n) ## true observations
u <- apply(x, 2, rank) / (n + 1) ## pseudo-observations
## inverting Kendall's tau
fit.tau <- fitCopula(normal.cop, u, method="itau")
fit.tau
## inverting Spearman's rho
fit.rho <- fitCopula(normal.cop, u, method="irho")
fit.rho
## maximum pseudo-likelihood
fit.mpl <- fitCopula(normal.cop, u, method="mpl")
fit.mpl
## maximum likelihood
fit.ml <- fitCopula(normal.cop, x, method="ml")
fit.ml
```

## 6.8. Выбор копула-функции

Из нескольких моделей копула-функций следует выбрать ту, которая наилучшим образом описывает рассматриваемые данные. В разделах 6.8.1–6.8.3 описываются различные критерии, руководствуясь которыми исследователи обычно осуществляют такой выбор.

### 6.8.1. Информационный критерий Акаике (AIC)

Этот метод выбора копула-функций является достаточно простым, см., например, [Breumann et al. (2003)], [Dias, Embrechts (2004)].

AIC (Akaike Information Criterion) — это критерий, позволяющий выбрать копула-функцию, которая отвечает наименьшему значению из следующих:

$$AIC(C_k, \hat{\alpha}_k) = -2 \sum_{t=1}^T \log c_k(u_{1t}, \dots, u_{nt}; \hat{\alpha}_k) + 2q_k, \quad (6.23)$$

$$k = 1, \dots, K,$$

где  $C_k$  —  $k$ -я модель копула-функции,  $c_k(\cdot)$  — плотность для  $C_k$ ;  $\hat{\alpha}_k$  — вектор параметров копула-функции  $C_k$ ,  $q_k$  — число параметров, от которых зависит функция  $C_k$ . Функция  $AIC(C_k, \hat{\alpha}_k)$  в определенном смысле штрафует модели с большим числом параметров.

AIC предполагает, что наиболее адекватная модель находится среди рассматриваемых моделей. Если сравнивать «невложенные» модели, то слагаемое  $2q_k$  является не вполне корректным штрафом, и указанная выше формула становится неприменимой. Для того чтобы разрешить эту проблему, Такеучи предложил в [Takeuchi (1976)] информационный критерий TIC. Однако TIC редко используется на практике, поскольку для него требуется наличие весьма больших (по размеру) выборок наблюдений.

В применении AIC некоторые вопросы остаются открытыми. Например, до сих пор неизвестно, что происходит с AIC в случае, если в качестве частных одномерных распределений использовать эмпирическую функцию распределения. Использование эмпирической функции распределения как оценки соответствующей частной функции распределения на практике является стандартной процедурой, но последствия такого использования для AIC до сих пор не изучены.

### 6.8.2. Тесты отношения псевдоправдоподобия

В работе [Chen, Fan (2006)] предлагаются так называемые тесты отношения псевдоправдоподобия, которые учитывают случайность возни-

кающую в АИС при использовании нормированных рангов. Эти тесты позволяют удостовериться в том, что среди рассматриваемых моделей нет такой, которая была бы значительно лучше выбранной (проверяемой) модели. При этом не требуется, чтобы рассматриваемый класс моделей содержал истинную модель. Таким образом можно сравнивать невложенные модели.

Основной идеей тестов является сравнение каждой из рассматриваемых моделей-кандидатов с остальными моделями с точки зрения меры их правдоподобия, по результатам сравнения выбирается та модель, которая оказывается наиболее правдоподобной. А именно, пусть  $C_1(u_1, \dots, u_n; \alpha_1)$  — выбранная из числа рассматриваемых модель-образец копула-функции,  $C_i(u_1, \dots, u_n; \alpha_i)$ ,  $i = 2, \dots, M$  — остальные модели-кандидаты,  $C^0(u_1, \dots, u_n)$  — истинная (и ненаблюдаемая) копула-функция, в действительности описывающая зависимости между компонентами многомерных наблюдений. В работе [Chen, Fan (2006)] предлагается, используя расстояние Каллбэка — Лейблера, тестировать гипотезу о том, является ли модель-образец наиболее правдоподобной среди всех рассматриваемых моделей. Таким образом, нулевой гипотезой является гипотеза

$$H_0^M: \max_{i=2, \dots, M} \mathbf{E}^0 \left[ \ln \frac{c_i(F_1^0(\varepsilon_{1t}), \dots, F_n^0(\varepsilon_{nt}); \alpha_i^*)}{c_1(F_1^0(\varepsilon_{1t}), \dots, F_n^0(\varepsilon_{nt}); \alpha_1^*)} \right] \leq 0,$$

где  $\alpha_i^*$ ,  $i = 1, \dots, M$ , — параметры рассматриваемых моделей копула-функций;  $F_j^0(\cdot)$  — истинные (неизвестные) частные распределения для  $\varepsilon_{jt}$ ,  $j = 1, \dots, n$ <sup>7</sup>. Указанная нулевая гипотеза означает, что среди всех рассматриваемых моделей модель-образец оказывается в определенном смысле ближе к истинной модели, чем все остальные из рассматриваемых. Альтернативная гипотеза

$$H_1^M: \max_{i=2, \dots, M} \mathbf{E}^0 \left[ \ln \frac{c_i(F_1^0(\varepsilon_{1t}), \dots, F_n^0(\varepsilon_{nt}); \alpha_i^*)}{c_1(F_1^0(\varepsilon_{1t}), \dots, F_n^0(\varepsilon_{nt}); \alpha_1^*)} \right] > 0$$

означает, что среди рассматриваемых моделей существует модель-кандидат, которая ближе к истинной модели, чем модель-образец. Тест из работы [Chen, Fan (2006)] основан на следующей статистике отношения псевдоправдоподобия ( $i = 2, \dots, M$ ):

$$LR_n(F_{1T}, \dots, F_{nT}; \tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_1) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \ln \frac{c_i(F_1(\varepsilon_{1t}), \dots, F_n(\varepsilon_{nt}); \tilde{\alpha}_i)}{c_1(F_1(\varepsilon_{1t}), \dots, F_n(\varepsilon_{nt}); \tilde{\alpha}_1)} \right],$$

<sup>7</sup> Верхний индекс <sup>0</sup> здесь и в дальнейшем означает, что соответствующая характеристика является истинной в условиях гипотезы  $H_0^M$ .  
 Скопировано с сайта <http://www.pravo.inform2000.ru> Разработка электронных библиотек <https://pravo.inform2000.ru>

где  $F_{jT}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — нормированные ранги; знак  $\sim$  над буквой означает, что соответствующий параметр  $\alpha$  оценен при помощи квази метода максимального правдоподобия (КММП). Введем матрицу  $\Omega = (\sigma_{ik})_{i,k=2}^M$ , где

$$\sigma_{ik} = \text{Cov}^0 \left[ \ln \frac{c_i(U_{1t}, \dots, U_{nt}; \alpha_i^*)}{c_1(U_{1t}, \dots, U_{nt}; \alpha_1^*)} + \sum_{j=1}^n \{Q_{i,j}(U_{jt}; \alpha_i^*) - Q_{1,j}(U_{jt}; \alpha_1^*)\}, \right. \\ \left. \ln \frac{c_k(U_{1t}, \dots, U_{nt}; \alpha_k^*)}{c_1(U_{1t}, \dots, U_{nt}; \alpha_1^*)} + \sum_{j=1}^n \{Q_{k,j}(U_{jt}; \alpha_k^*) - Q_{1,j}(U_{jt}; \alpha_1^*)\} \right]$$

при  $U_{jt} = F_j^0(\varepsilon_{jt})$  и  $Q_{i,j}(U_{jt}; \alpha_i^*) \equiv \mathbf{E}^0 \{l_{ij}(U_s; \alpha_i^*)[\mathbf{I}_{\{U_{jt} \leq U_{js}\}} - U_{js}] | U_{jt}\}$  для  $i = 1, \dots, M$ ,  $j = 1, \dots, d$ ; добавочные слагаемые  $Q_{i,j}(\cdot)$  введены в связи с необходимостью оценивать частные распределения  $F_j^0(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а  $\mathbf{I}_{\{x < x_0\}}$ , как и прежде, индикаторная функция множества  $\{x < x_0\}$ . Более подробно см. [Chen, Fan (2006)]. Отметим, что если частные распределения известны, то эти слагаемые исчезают. Как показано в работе [Chen, Fan (2006)], при некоторых условиях регулярности:

$$n^{1/2} \left\{ LR_n(F_{1T}, \dots, F_{nT}; \tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_1) - \mathbf{E}^0 \left[ \ln \frac{c_i(U_{1t}, \dots, U_{nt}; \alpha_i^*)}{c_1(U_{1t}, \dots, U_{nt}; \alpha_1^*)} \right] \right\}_{i=2, \dots, M} \\ \xrightarrow{d} (Z_2, \dots, Z_M)',$$

где вектор  $(Z_2, \dots, Z_M)'$  имеет нормальное распределение  $N(0, \Omega)$ , так что

$$\max_{i=2, \dots, M} n^{1/2} \left\{ LR_n(F_{1T}, \dots, F_{nT}; \tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_1) - \mathbf{E}^0 \left[ \ln \frac{c_i(U_t; \alpha_i^*)}{c_1(U_t; \alpha_1^*)} \right] \right\} \\ \xrightarrow{d} \max_{i=2, \dots, M} Z_i. \quad (6.24)$$

В [Chen, Fan (2006)] показано, что при так называемой наименее благоприятной конфигурации

$$T_T^M = \max_{i=2, \dots, M} [n^{1/2} LR_n(F_{1T}, \dots, F_{nT}; \tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\theta})] \xrightarrow{d} \max_{i=2, \dots, M} Z_i, \quad (6.25)$$

так как второе слагаемое в (6.24) обнуляется:  $\mathbf{E}^0[\cdot] = 0$ . Поскольку асимптотическая ковариационная матрица  $\Omega$  для  $Z_2, \dots, Z_M$  зависит от  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*$ , распределение  $\max_i Z_i$  неизвестно. Но, несмотря на это, можно использовать  $p$ -значения, получаемые либо методом Монте-Карло, либо бутстрэп методом, см. [White (2000)], [Chen, Fan (2006)].

Состоятельная оценка для  $\Omega = (\sigma_{ik})_{i,k=2}^M$  определяется формулой:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ik} = & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \ln \frac{c_i(F_{tT}; \tilde{\alpha}_i)}{c_1(F_{tT}; \tilde{\alpha}_1)} - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \ln \frac{c_i(F_{sT}; \tilde{\alpha}_i)}{c_1(F_{sT}; \tilde{\alpha}_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \left( \hat{Q}_{i,j}(F_{jt}; \tilde{\alpha}_i) - \hat{Q}_{1,j}(F_{jt}; \tilde{\alpha}_1) \right) \right) \times \\ & \times \left( \ln \frac{c_k(F_{tT}; \tilde{\alpha}_k)}{c_1(F_{tT}; \tilde{\alpha}_1)} - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \ln \frac{c_k(F_{sT}; \tilde{\alpha}_k)}{c_1(F_{sT}; \tilde{\alpha}_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \left( \hat{Q}_{k,j}(F_{jt}; \tilde{\alpha}_k) - \hat{Q}_{1,j}(F_{jt}; \tilde{\alpha}_1) \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\hat{Q}_{i,j}$  — состоятельная оценка  $Q_{i,j}$ , которая вычисляется следующим образом:

$$\hat{Q}_{i,j}(U_{js}; \hat{\alpha}_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1, t \neq s}^T l_{ij}(U_t; \hat{\alpha}_i) \left( \mathbf{I}_{\{U_{js} \leq U_{jt}\}} - U_{jt} \right).^8$$

Затем можно вычислить разложение Холецкого  $\hat{\Omega} = \hat{C}\hat{C}'$  и сформировать  $\hat{Z}_b = (\hat{Z}_{b,2}, \dots, \hat{Z}_{b,M})' = \hat{C}\eta_b$ , где  $\eta_b \in N(0, I_{M-1})$ , т.е. имеет  $(M-1)$ -мерное стандартное нормальное распределение. После чего найдем наибольшую порядковую статистику  $\zeta_{b,M-1} = \max_{k=2, \dots, M} \hat{Z}_{b,k}$ , а для того, чтобы вычислить  $p$ -значение методом Монте-Карло, повторим эти итерации много раз (например, порядка  $B = 100\,000$ ), см. [Chen, Fan (2006)]:

$$\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{I}_{\{\zeta_{b,M-1} \leq T_T^M\}}.$$

### 6.8.3. Байесовский выбор копула-функций

В [Huard et al. (2006)] предлагается байесовская процедура выбора наиболее вероятного двумерного семейства копула-функций среди заданного множества копула-функций. В этом подходе параметры копула-функций интерпретируются как случайные величины. Кроме того, в указанной работе параметризация плотности копула-функции осуществляется в терминах  $\tau$ -Кендалла (см. выше, п. 6.5.2), так что априорные распределения параметров заменены априорными распределениями  $\tau$ -Кендалла, которое концептуально является более удобным.

Априорное распределение  $\tau$ -Кендалла берется одним и тем же для всех тестируемых копула-функций и используется как базис для сравнения.

Пусть  $\mathcal{C}$  — множество всех копула-функций. Возьмем из  $\mathcal{C}$  конечное подмножество  $\mathcal{C}_Q \subset \mathcal{C}$  копула-функций, которые необходимо включить в предложенный метод. Каждая копула-функция из  $\mathcal{C}_Q$  обозначается  $C_l, l = 1, \dots, Q$ . Метод, предложенный в работе [Huard et al. (2006)], на первом шаге состоит в проверке следующих  $Q$  гипотез:

$$H_l : \text{данные извлечены из копула-функции } C_l, \quad l = 1, \dots, Q.$$

Для этого вычисляются  $P(H_l|D)$  — вероятности реализации гипотезы  $H_l$  при заданных наблюдениях  $D$ , которые представляют собой  $T$  независимых пар  $(u_t, v_t), t = 1, \dots, T$  с равномерно распределенными компонентами (в работе [Huard et al. (2006)] называемые квантилями). Если используются нормированные ранги, то условие независимости может нарушаться, и предложенный метод следует рассматривать как аппроксимацию и применять с некоторой осторожностью. Используя теорему Байеса, получим:

$$P(H_l|D, I) = \frac{P(D|H_l, I)P(H_l|I)}{P(D|I)}, \quad (6.26)$$

где  $P(D|H_l, I)$  — функция правдоподобия,  $P(H_l|I)$  — априорное распределение для копула-функции,  $P(D|I)$  — нормирующая константа;  $I$  соответствует дополнительной информации. «Правильной» копула-функцией, в терминах работы [Huard et al. (2006)], называют копула-функцию, отвечающую наибольшему значению апостериорной вероятности  $P(H_l|D, I)$ .

В [Huard et al. (2006)] плотность копула-функции перепараметризуется в терминах параметра  $\tau$ -Кендалла ( $\tau = g_l(\alpha)$ ), который становится общим параметром для всех копула-функций из  $\mathcal{C}_Q$ .

**Таблица 6.3.** Выражения параметра  $\tau$ -Кендалла для некоторых копула-функций

Копула-функция	$\tau = g_l(\alpha)$	Область изменения $\tau$
Клейтон	$1 - 2(2 + \alpha)^{-1}$	$[0; 1] \setminus \{0\}$
Гумбель	$1 - \alpha^{-1}$	$[0; 1]$
Франк	$1 - 4\alpha^{-1} \left(1 - \alpha^{-1} \int_0^\alpha s / (e^s - 1) ds\right)$	$[-1; 1] \setminus \{0\}$
Гаусс	$2\pi^{-1} \arcsin \rho$	$[-1; 1]$



Следовательно,  $\tau$ -Кендалла может использоваться в (6.26) как случайная величина

$$\begin{aligned} P(H_l|D, I) &= \int_{-1}^{+1} P(H_l, \tau|D, I) d\tau = \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{P(D|H_l, \tau, I)P(H_l|\tau, I)P(\tau|I) d\tau}{P(D|I)}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

где  $P(H_l|\tau, I)$  — априорная вероятность гипотезы  $H_l$  для копула-функции;  $P(\tau|I)$  — априорная плотность для  $\tau$ -Кендалла; правдоподобие  $P(D|H_l, \tau, I)$ , которое теперь зависит от  $\tau$ , может быть вычислено следующим образом:

$$P(D|H_l, \tau, I) = \prod_{t=1}^T P(u_t, v_t|\tau, l, I) = \prod_{t=1}^T c_l(u_t, v_t|g_l^{-1}(\tau)), \quad (6.28)$$

где  $c_l(u_t, v_t|g_l^{-1}(\tau))$  — плотность  $l$ -й копула-функции, параметризованной в терминах  $\tau$ -Кендалла.

Для того чтобы выбрать априорные распределения, в работе [Huard et al. (2006)] указываются некоторые требования и правила:

( $I_1$ )  $\tau$ -Кендалла принадлежит множеству  $\Lambda$  и каждая реализация  $\tau \in \Lambda$  равновероятна;

( $I_2$ ) для заданного  $\tau$  все копула-функции, для которых  $\tau \in \Omega_l$ , равновероятны, здесь  $\Omega_l$  — область значений  $\tau$  в условиях справедливости гипотезы  $H_l$ .

Область  $\Lambda$  необходима для того, чтобы включать дополнительную информацию относительно зависимости между переменными. Например, если известно, что  $\tau$  положительно, то можно предположить, что  $\Lambda = [0; 1]$ ; если априорная информация относительно значений  $\tau$  отсутствует, то  $\Lambda = [-1; 1]$ . Следовательно, учитывая ( $I_1$ ), априорное распределение  $\tau$  есть:

$$P(\tau|I_1) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(\Lambda)} & \text{при } \tau \in \Lambda; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6.29)$$

где  $\lambda(\cdot)$  обозначает меру Лебега, т. е.  $\lambda(\Lambda)$  — длина интервала  $\Lambda$ . Кроме того, условие ( $I_2$ ) определяет априорное распределение для копула-функции:

где предполагается, что все копула-функции равновероятны относительно  $\tau$ . В случае, если известно, что  $\tau$  концентрируется вокруг определенного значения, то в работе [Huard et al. (2006)] предлагается использовать бета-распределение на интервале  $[-1; 1]$  с параметрами, обеспечивающими такую форму распределения, которая соответствует априорной информации.

Если подставить (6.28), (6.30) и (6.29) в (6.27), то получим:

$$P(H_l|D, I) = \frac{1}{P(D|I)} \int_{-1}^{+1} \prod_{t=1}^T c_l(u_t, v_t|g_l^{-1}(\tau)) \times \frac{\mathbf{1}\{\tau \in \Omega_l \cap \Lambda\}}{\lambda(\Lambda)} d\tau = \frac{1}{P(D|I)\lambda(\Lambda)} \int_{\Omega \cap \Lambda} \prod_{t=1}^T c_l(u_t, v_t|g_l^{-1}(\tau)) d\tau, \quad (6.31)$$

где нормирующая константа  $P(D|I)$  в (6.31) вычисляется при помощи так называемого правила суммы, более подробно об этом см. [Jaynes, Bretthorst (2003)]:

$$P(D|I) = \sum_{l=1}^Q P(D|H_l, I)P(H_l|I).$$

Важно отметить, что правило суммы справедливо только тогда, когда гипотезы  $H_l$  являются взаимоисключающими и исчерпывающими (в совокупности). К сожалению, эти условия обычно не выполняются по двум причинам. Во-первых, если данные сгенерированы из копула-функции, не входящей в  $\mathcal{C}_Q$  (что является довольно распространенной ситуацией), то гипотезы  $H_l$  в совокупности не являются исчерпывающими. Во-вторых, если множество гипотез  $H_l$  содержит две или более похожих копула-функций, то в этом случае гипотезы  $H_l$  не являются взаимно исключающими. В работе [Huard et al. (2006)] весьма кратко рассматриваются возможные решения, которые бы обеспечили полноту, но более детальное изучение этого вопроса оставлено для дальнейшего исследования.

Этот метод представляется весьма интересным, поскольку не требует предварительного оценивания параметров копула-функций. Более того, отметим, что рассматриваемые копула-функции не обязаны быть вложенными.

#### 6.8.4. Эмпирические приложения: пример выбора копула-функций

Критерий АИС не вычисляется напрямую в пакете  $R$ , но несложно написать необходимую функцию, которая бы вычисляла значение АИС. При

заданных значениях максимума логарифмической функции правдоподобия и числе параметров. Эта задача остается в качестве упражнения.

В пакете MATLAB реализован код для байесовского выбора копула-функции из работы [Huard et al. (2006)], который доступен на сайте <http://code.google.com/p/copula/>.

## 6.9. Критерии согласия для копула-функций

После того как, согласно указанным выше процедурам, выбрана «наиболее подходящая» копула-функция, следующим шагом является проверка того, насколько хорошо она согласуется с имеющимися данными.

Одним из вариантов такой проверки является *неформальная графическая диагностика*, в соответствии с которой сравниваются нормированные ранги со случайными выборками, сгенерированными в соответствии с используемой копула-функцией. А именно, графически сравнивается эмпирическая оценка копула-функции с параметрической моделью. Однако эту процедуру можно рассматривать в качестве предварительного и приблизительного анализа.

С недавнего времени начали появляться работы, в которых изучаются статистические тесты, используемые в критериях согласия. Вот лишь некоторые из них: [Genest, Rivest (1993)], [Shih (1998)], [Breymann et al. (2003)], [Malevergne, Sornette (2003)], [Scaillet (2005)], [Fermanian (2005)], [Panchenko (2005)], [Genest et al. (2006a)], [Berg, Bakken (2007)], [Dobrić, Schmid (2007)], [Quessy et al. (2007)], [Genest et al. (2009)], [Genest, Rémillard (2008)], [Berg (2009)].

Пусть  $C(\cdot)$  — некоторая  $n$ -мерная копула-функция. Необходимо протестировать следующую гипотезу для рассматриваемой выборки:

$$H_0 : C \in \mathcal{C} = \{C_\alpha; \alpha \in \Theta\} \text{ против } H_1 : C \notin \mathcal{C},$$

где  $C_\alpha(\cdot)$  — параметрическая копула-функция,  $\Theta$  — пространство параметров.

В случае, когда выбирается наиболее приемлемая *одномерная* модель, обычно используются такие критерии согласия, как критерий Колмогорова — Смирнова или критерий Андерсона — Дарлинга.

Возможным вариантом построения критерия согласия для копула-функций, используемых для описания многомерных распределений, являются подходы, основанные на многомерном группировании, см., например, [Dobrić, Schmid (2005)]. К сожалению, при этом, как и во всех подходах, основанных на группировании, используется дискретизация вероятностного пространства, которая практически нереализуема в случае задач большой размерности. Более того, группирование данных

в некотором смысле произвольно и весьма нетривиально. Аналогично, подходы, основанные на использовании многомерных ядерных оценок копула-функций, представленные, например, в работах [Fermanian (2005)], [Scaillet (2005)], являются в случае большой размерности (характерной для задач из области финансов и страхования) чрезмерно затратными с вычислительной точки зрения. Поэтому далее, характеризуя многомерный случай, будут рассматриваться некоторые другие подходы.

Перед тем как приступить к анализу различных тестов, коротко определим, что представляет собой *преобразование Розенблатта*. Изначально оно было предложено в работе [Rosenblatt (1952)] и стало известным как *условно-вероятностное интегральное преобразование* (Conditional Probability Integral Transform, CPIT). Оно позволяет преобразовать набор зависимых случайных величин, описываемых некоторым многомерным распределением, в набор независимых равномерно распределенных на  $[0; 1]$  случайных величин. Таким образом, если для многомерных случайных величин имеется тест на независимость и равномерность, то, используя преобразование Розенблатта, можно протестировать адекватность любой модели.

Если взять случайную величину  $\nu = F(X)$ , где  $F(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $X$ , то  $\nu$  будет иметь равномерное распределение на  $[0; 1]$ . Если в качестве  $F(\cdot)$  взять иную функцию распределения, скажем,  $G(\cdot)$ , то  $\nu = G(X)$  уже не будет равномерно распределенной. Это простое свойство лежит в основе большинства работ, в которых изучаются вопросы, связанные с тестированием распределений и копула-функций.

Дадим формальное определение преобразования Розенблатта.

**Определение 6.13** (преобразование Розенблатта). Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайный вектор с функцией распределения  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $F_{X_i} = P(X_i \leq x_i)$  — функция распределения случайной величины  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим следующее вероятностно-интегральное преобразование, определяющее  $n$  случайных величин  $V_i = T(X_i)$ :

$$\begin{aligned} T(x_1) &= P(X_1 \leq x_1) = F_{X_1}(x_1); \\ T(x_2) &= P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) = F_{X_2|X_1}(x_2|x_1); \\ &\vdots \\ T(x_n) &= P(X_n \leq x_n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \\ &= F_{X_n|X_1, \dots, X_{n-1}}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогда случайные величины  $V_i = T(X_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются равномерно распределенными на отрезке  $[0; 1]$  и взаимно независимыми, а сами преобразования  $T(X_i)$  называются преобразованиями Розенблатта или условно-вероятностными интегральными преобразованиями (СПИТ).

Предположим, что многомерная функция распределения  $F_X(\cdot)$  имеет копула-функцию  $C(\cdot)$ , т. е.

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

Обозначим через  $C_i(u_1, \dots, u_i)$  совместное  $i$ -мерное распределение, такое, что:

$$C_i(u_1, \dots, u_i) = C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

При этом  $C_1(u_1) = u_1$  и  $C_n(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n)$ . Пусть случайный вектор  $(U_1, \dots, U_i)$  имеет распределение  $C_i(u_1, \dots, u_i)$ . Тогда плотность условного распределения  $U_i$  в точке  $u_i$  при заданных значениях  $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$  случайных величин  $U_1, \dots, U_{i-1}$  соответственно равна:

$$c_i(u_i | u_1, \dots, u_{i-1}) = \frac{\partial^{i-1} C_i(u_1, \dots, u_i)}{\partial u_1 \dots \partial u_{i-1}} \bigg/ \frac{\partial^{i-1} C_{i-1}(u_1, \dots, u_i)}{\partial u_1 \dots \partial u_{i-1}}$$

при  $i = 1, \dots, n$ . Теперь с использованием условных распределений  $C_i(\cdot)$  можно определить случайные величины  $V_i$  при  $i = 2, \dots, n$ :

$$V_i = C_i(F_{X_i}(X_i) | F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_{i-1}}(X_{i-1})).$$

Как указано в работе [Berg (2009)], преобразование Розенблатта дает значительные преимущества при тестировании критериев согласия. В [Hong, Li (2005)] представлены результаты многомерных тестов с использованием имитационного моделирования и преобразованных исходных случайных величин, которые оказались лучше, чем результаты с использованием *не преобразованных* случайных величин. В работе [Chen et al. (2004)] высказывается предположение, что аналогичный вывод справедлив и для критериев согласия для копула-функций.

В качестве недостатка тестов, основанных на преобразовании Розенблатта, следует отметить отсутствие инвариантности относительно принятого порядка нумерации рассматриваемых случайных величин. Общее число возможных преобразований случайных величин тогда будет равно  $n!$ . В [Berg (2009)] показано, что для некоторых подходов, основанных на преобразовании Розенблатта, оценки  $p$ -значений критической статистики зависят от того, какой порядок преобразований

выбран для рассматриваемых случайных величин. Однако в этой работе также указывается, что по мере роста числа наблюдений различия в  $p$ -значениях уменьшаются, причем, эти  $p$ -значения асимптотически сходятся к некоторым общим критическим уровням. Таким образом, в работе [Berg (2009)] высказывается предположение, что выбор порядка преобразований лишь незначительным образом влияет на результаты теста.

Следуя схеме, представленной в [Berg (2009)], критерии согласия для копула-функций могут быть классифицированы в девять семейств:

$\mathcal{A}_1$  : Тесты, основанные на преобразовании Розенблатта. Предложены в работе [Berg, Bekken (2007)]. Этот подход в качестве частных случаев включает в себя подходы, предложенные в работах [Malevergne, Sornette (2003)], [Breymann et al. (2003)], [Chen et al. (2004)].

$\mathcal{A}_2$  : Тесты, основанные на эмпирических оценках копула-функций. Предложены в работах [Kole et al. (2007)], [Genest, Rémillard (2008)].

$\mathcal{A}_3$  : Тесты, основанные на подходе  $\mathcal{A}_2$  и преобразовании Розенблатта. Предложены в [Genest et al. (2009)].

$\mathcal{A}_4$  : Тесты, основанные на эмпирических оценках копула-функций и их функций распределения. Предложены в работах [Genest, Rivest (1993)], [Wang, Wells (2000)], [Savu, Trede (2008)], [Genest et al. (2006a)].

$\mathcal{A}_5$  : Тесты, основанные на функциях спирменовской меры зависимости. Предложены в [Quessy et al. (2007)].

$\mathcal{A}_6$  : Тесты, основанные на критерии Шиха [Shih (1998)] для двумерной модели Клейтона. Обобщены на случай произвольной размерности в работе [Berg (2009)].

$\mathcal{A}_7$  : Тесты, основанные на внутреннем произведении векторов, как мере расстояния между ними. Предложены в работе [Panchenko (2005)].

$\mathcal{A}_8$  : Тесты, основанные на подходе  $\mathcal{A}_7$  и преобразовании Розенблатта. Предложены в [Berg (2009)].

$\mathcal{A}_9$  : Тесты, основанные на объединении указанных выше подходов. Предложены в [Berg (2009)].

Подходы  $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_5$  основаны на снижении размерности, поскольку статистики этих тестов являются одномерными, тогда как статистика подхода  $\mathcal{A}_6$  строится с использованием моментов; критерии  $\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_8$  представляют собой многомерные подходы. В следующих разделах 6.9.1–6.9.4 будем придерживаться структуры, предложенной в работах [Berg (2009)] и [Berg, Bekken (2007)].

### 6.9.1. Тесты, основанные на преобразовании Розенблатта

#### Подход $\mathcal{A}_1$ (CRIT-подход)

Подход  $\mathcal{A}_1$  основан на преобразовании Розенблатта, примененного к нормированным рангам  $\hat{\mathbf{u}}_1 = (\hat{u}_{11}, \dots, \hat{u}_{n1}), \dots, \hat{\mathbf{u}}_T = (\hat{u}_{1T}, \dots, \hat{u}_{nT})$ , где компоненты  $\hat{u}_{it}$  вектора  $\hat{\mathbf{u}}_t$  вычисляются в предположении справедливости нулевой гипотезы о копула-функции  $C_{\hat{\alpha}}$  по следующей формуле (см. выше, п. 6.7.1):

$$\hat{u}_{it} = F_{1,T}(x_{it}), \text{ где } F_{i,T}(x) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{x_{it} < x\}}, \quad (6.32)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

В соотношении (6.32) правая часть определяет непараметрическую оценку частной функции распределения переменной  $X_i$  в точке  $x_{it}$ . При справедливости нулевой гипотезы выборка  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$  представляет собой выборку из копула-функции  $P$ , отвечающей случаю независимости (также обозначаемой как  $C_{\perp}$ ). К сожалению, эмпирический аналог преобразования Розенблатта предполагает использование рангов, что индуцирует зависимость эмпирических значений  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом,  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  не являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Тем не менее, как показано в работе [Genest et al. (2006a)], можно получать достаточно надежные оценки  $p$ -значений тестовых статистик при помощи параметрической бутстреп-процедуры. Теоретические свойства этих оценок представлены в работе [Genest, Rémillard (2008)]<sup>9</sup>.

Общий вид тестовой статистики критериев согласия для подхода  $\mathcal{A}_1$  следующий:

$$W_{1t} = \sum_{i=1}^n \Gamma\{v_{it}\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (6.33)$$

где  $\Gamma\{\cdot\}$  — весовая функция, используемая для взвешивания информации из  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$ . В качестве весовой функции может быть использована, например,  $\Gamma\{v_{it}\} = (\Phi^{-1}(v_{it}))^2$ , что соответствует подходу из [Breumann et al. (2003)]. Более того, если нулевая гипотеза соответствует гауссовской копула-функции, тогда имеем подход, предложенный в работе [Malevergne, Sornette (2003)]. В двух последних упомянутых работах используется статистика Андерсона — Дарлинга [Anderson,

<sup>9</sup> Асимптотические свойства этой бутстреп-процедуры до сих пор были получены лишь для подходов  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{A}_4$ . Однако результаты, полученные в работах [Berg, Bekken (2007)], [Dobrić, Schmid (2007)], [Berg (2009)], указывают на справедливость Скопировано с сайта [http://www.math.ru.nl/~sjoerd/ftp/asymp.pdf](http://www.math.ru.nl/~sjoerd/ftp/asymp/asymp.pdf) Разработка электронных библиотек <http://www.math.ru.nl/~sjoerd/ftp/asymp.pdf> и для других подходов <http://www.math.ru.nl/~sjoerd/ftp/asymp.pdf>

Darling (1954)]. В работе [Berg, Bekken (2007)] показано, что статистика Андерсона — Дарлинга с  $\Gamma\{v_{it}\} = |v_{it} - 0.5|$  дает достаточно хорошие результаты при тестировании нулевой гипотезы, соответствующей гауссовской копула-функции. Следовательно, для двух упомянутых выше вариантов выбора весовой функции имеем два подхода:

$$\mathcal{A}_{1t}^{(a)} = \sum_{i=1}^n (\Phi^{-1}(v_{it}))^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_{1t}^{(b)} = \sum_{i=1}^n |v_{it} - 0.5|.$$

Можно показать, что для подхода  $\mathcal{A}_{1t}^{(a)}$  функция распределения  $F_1(\cdot)$  статистики  $W_{1t}$  для любых  $t$  представляет собой  $\chi_n^2$ -распределение. Однако, как говорилось выше, если использовать нормированные ранги, распределение  $W_{1t}$  неизвестно. Но для аппроксимации функции распределения  $F_1(\cdot)$  при справедливости нулевой гипотезы необходимо обратиться к бутстреп-процедуре.

Так называемый «тестовый датчик» (*test observator*)  $S_1$  подхода  $\mathcal{A}_1$  определяется как функция распределения для  $F_1(W_{1t})$ , см. [Berg (2009)]:

$$S_{1t}(w) = P(F_1(W_{1t}) \leq w), \quad w \in [0; 1].$$

При справедливости нулевой гипотезы имеем  $S_{1t}(w) = w$  при всех  $t$ . Эмпирическая версия тестового датчика может быть вычислена в виде:

$$\hat{S}_1(w) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{F_1(W_{it}) \leq w\}} \quad w = \frac{1}{T+1}, \dots, \frac{T}{T+1}. \quad (6.34)$$

Для всех подходов, которые предполагают снижение размерности, в работе [Berg (2009)] рассматривается статистика Крамера — фон Мизеса, но следует иметь в виду, что могут быть использованы и другие статистики (например, Андерсона — Дарлинга, Колмогорова — Смирнова, см. [Berg, Bekken (2007)], [Marsaglia, Marsaglia (2004)]). Если использовать статистику Крамера — фон Мизеса, то тестовая статистика имеет вид:

$$\hat{T}_1 = \frac{T}{3} + \frac{T}{T+1} \sum_{t=1}^T \hat{S}_1 \left( \frac{t}{T+1} \right)^2 - \frac{T}{(T+1)^2} \sum_{t=1}^T (2t+1) \hat{S}_1 \left( \frac{t}{T+1} \right)^2 \quad (6.35)$$

(см. доказательство в [Berg (2009)]).

**Некоторое расширение: CRIT-2 подход.** В работе [Berg, Bekken (2007)] показано, что описанный выше подход, в котором используется весовая функция  $(\Phi^{-1}(\cdot))^2$ , не всегда является адекватным по-



скольку данным, расположенным на границе  $n$ -мерного единичного гиперкуба, присваиваются большие веса: при небольших выборках такой способ взвешивания делает подход менее устойчивым и менее мощным, поскольку будут присутствовать несколько наблюдений в граничных областях. Более того, в [Berg, Bekken (2007)] показано, что CRIT-подход может давать плохие результаты в случаях, когда рассматриваемые данные расположены радиально асимметрично.

Учитывая указанные недостатки, в [Berg, Bekken (2007)] был предложен новый подход, названный CRIT-2, который позволяет использовать любую весовую функцию в (6.33) и при помощи дополнительного интегрального условно-вероятностного преобразования, построенного с использованием порядковых статистик, идентифицировать радиальную асимметрию. По существу, в работе [Berg, Bekken (2007)] предлагается на первом шаге применить условное интегрально-вероятностное преобразование к нормированным рангам  $\hat{U}$ , а на втором шаге применить условное интегрально-вероятностное преобразование к  $\mathbf{V}$ , полученному на первом шаге.

Пусть  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ , где  $V_1, \dots, V_n$  — независимые равномерно распределенные на  $[0; 1]$  случайные величины (будем обозначать это  $\mathbf{V} \in U(0; 1)^n$ ). Вектор  $V$  получен путем применения интегрального условно-вероятностного преобразования к  $\hat{U}$ . В работе [Berg, Bekken (2007)] соответствующие порядковые статистики обозначаются как

$$V_{(1)} \leq V_{(2)} \leq \dots \leq V_{(n-1)} \leq V_{(n)}.$$

Если  $V_{(1)}, \dots, V_{(n)}$  — порядковые статистики выборки независимых одинаково распределенных из  $U(0; 1)$  случайных величин, тогда  $V_{(i)}$  имеет бета-распределение с параметрами  $(i, n - (i - 1))$ , см. [D'Agostino, Stephens (1986), гл. 8]. Для того чтобы вычислить интегральное условно-вероятностное преобразование для порядковых статистик, Берг и Беккен используют результаты теоремы 2.7 из [David (1981)]. С использованием результатов теоремы 1 из [Deheuvels (1984)] и того факта, что в условиях справедливости нулевой гипотезы  $\mathbf{V} \in U(0; 1)^n$ , в работе [Berg, Bekken (2007)] получено следующее выражение для интегрального условно-вероятностного преобразования порядковой статистики  $\mathbf{V}$ :

$$H_1 = F_{V_{(i)}}(v_{(i)} | V_{(i-1)} = v_{(i-1)}) = 1 - \left( \frac{1 - v_{(i)}}{1 - v_{(i-1)}} \right)^{n-(i-1)}, \quad (6.36)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad v_{(0)} = 0.$$

[Berg, Bekken (2007)] получена статистика, основанная на одновременном использовании  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$W_{2t} = \sum_{i=1}^n \Gamma_V(V_{(i,t)}) \cdot \Gamma_H(H_{it}), \quad t = 1, \dots, T, \quad (6.37)$$

где  $\Gamma_V(\cdot)$  и  $\Gamma_H(\cdot)$  — весовые функции, используемые для взвешивания информации из  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$  соответственно. Выбор весовых функций зависит от того, какой области определения копула-функции уделяется наибольшее внимание. Например, если  $\Gamma_V = (\Phi^{-1}(\cdot))^2$  и  $\Gamma_H = 1$ , то получим исходный CRIT-подход (6.33) из [Breymann et al. (2003)].

В работе [Berg, Bekken (2007)] указывается на то, что во многих тестах могут быть получены достаточно хорошие результаты при использовании следующей комбинации двух весовых функций:

- а)  $\Gamma_V(X) = |X - 0.5|$ ,  $\Gamma_H(X) = 1$ ,
- б)  $\Gamma_V(X) = (X - 0.5)^2$ ,  $\Gamma_H(X) = 1$ .

Наконец, важно отметить, что в целом распределение  $W_{2t}$  неизвестно, и для его оценки необходимо использовать бутстреп-приближение. Если вычислить  $W_{2t}$  с использованием некоторых весовых функций  $\Gamma_V$  и  $\Gamma_H$ , то можно смоделировать  $n$  независимых одинаково распределенных  $U(0; 1)$  случайных величин  $\tilde{V}$ , вычислить  $\tilde{W}_{2t}$ , используя те же самые весовые функции, что и для  $W_{2t}$ . Повторяя эту процедуру большое число раз в предположении справедливости нулевой гипотезы, можно аппроксимировать функцию распределения  $F_{2t}$  для  $W_{2t}$ .

### Реализация тестов

Далее представлено подробное описание тестовых процедур, включая вычисление оценок соответствующих  $p$ -значений в предположении справедливости нулевой гипотезы о параметрическом виде копула-функции. Среди описанных процедур — CRIT и CRIT-2 подходы.

#### Процедура 6.9.1. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_1$ .

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры копула-функции  $\alpha$  с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , где  $l$  — логарифмическая функция правдоподобия наблюдений  $\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T$ , т. е. полупараметрического метода.

3. Вычислить  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$ , полученные путем применения интегрального условно-вероятностного преобразования к  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  в предположении справедливости нулевой гипотезы о том, что копула-функ-

4. Вычислить СРПТ-2 выборку  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_T)$ , применяя интегральное условно-вероятностное преобразование (6.36) к  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$ .

5. Используя весовые функции  $\Gamma_V$  и  $\Gamma_H$  (если  $\Gamma_H = 1$ , то  $W_{1t}$  и  $W_{2t}$  совпадают), вычислить  $W_{1t}$  или  $W_{2t}$  по формулам (6.33) или (6.37) соответственно.

6. Если при справедливости нулевой гипотезы для  $W_{1t}$  или  $W_{2t}$  функция распределения известна, вычислить  $F_1(W_1)$  или  $F_2(W_2)$  и перейти к шагу 8. Если распределение неизвестно, аппроксимировать  $F_1(W_1)$  или  $F_2(W_2)$  следующим образом: для некоторого достаточно большого целого  $N_b$  итеративно повторять нижеприведенную процедуру для каждого  $l \in \{1, \dots, N_b\}$ :

а) сгенерировать случайную выборку  $\mathbf{v}_l^* = (v_{1,l}^*, \dots, v_{n,l}^*)$ , компоненты которой представляет собой компоненты  $U(0; 1)^n$  случайного вектора;

б) применяя интегральное условно-вероятностное преобразование (6.36) к  $(v_{1,l}^*, \dots, v_{n,l}^*)$ , вычислить  $\mathbf{h}_l^* = (h_{1,l}^*, \dots, h_{n,l}^*)$ ;

в) в соответствии с (6.33) или (6.37), используя те же весовые функции, что и на шаге 5, и беря  $(v_{1,l}^*, \dots, v_{n,l}^*)$  и  $(h_{1,l}^*, \dots, h_{n,l}^*)$ , вычислить  $\hat{W}_{1,l}^*$  или  $\hat{W}_{2,l}^*$  соответственно.

7. Вычислить  $F_1(W_1) = \frac{1}{N_b+1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{W}_{1,l}^* > W_1\}}$ .  $F_2(W_2)$  вычисляется аналогичным образом.

8. В соответствии с (6.34) и (6.35) вычислить  $\hat{T}_1$  (относительно статистики Андерсона — Дарлинга см. [Berg, Bekken (2007)]).  $\hat{T}_2$  вычисляется аналогично.

9. Для некоторого достаточно большого целого  $K$  повторить следующие шаги для каждого  $k = 1, \dots, K$ :

а) получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  в нормированные ранги с использованием (6.32);

б) по полученным таким образом псевдонаблюдениям оценить параметры копула-функции  $\alpha^0$  с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода;

в) вычислить  $(\mathbf{v}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^0)$ , полученные путем применения интегрального условно-вероятностного преобразования к  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$  в предположении справедливости нулевой гипотезы о том, что копула-функция равна  $C_{\hat{\alpha}_k^0}$ ;

г) вычислить СРПТ-2 выборку  $(\mathbf{h}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{h}_{T,k}^0)$  путем применения интегрального условно-вероятностного преобразования (6.36) к  $(\mathbf{v}_{1,k}^0, \dots,$

д) используя такие же весовые функции, как на шаге 5, примененные к  $(\mathbf{v}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^0)$  и  $(\mathbf{h}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{h}_{T,k}^0)$ , вычислить  $W_{1,k}^0$  или  $W_{2,k}^0$  по формулам (6.33) или (6.37) соответственно;

е) если при справедливости нулевой гипотезы для  $W_{1,k}^0$  или  $W_{2,k}^0$  функция распределения известна, вычислить  $F_1(W_{1,k}^0)$  или  $F_2(W_{2,k}^0)$  и перейти к шагу 3; если распределение неизвестно, аппроксимировать  $F_1(\cdot)$  или  $F_2(\cdot)$ , итеративно повторяя (для некоторого достаточно большого целого  $N_b$ ) нижеприведенную процедуру для каждого  $l \in \{1, \dots, N_b\}$ :

- сгенерировать случайную выборку  $\mathbf{v}_{l,k}^{0*} = (v_{1,l,k}^{0*}, \dots, v_{n,l,k}^{0*})$  из  $U(0; 1)^n$  случайного вектора;
- применяя интегральное условно-вероятностное преобразование (6.36) к  $(v_{1,l,k}^{0*}, \dots, v_{n,l,k}^{0*})$ , вычислить  $\mathbf{h}_l^{0*} = (h_{1,l,k}^{0*}, \dots, h_{n,l,k}^{0*})$ ;
- в соответствии с (6.33) или (6.37), используя те же весовые функции, что и на шаге 5, и беря  $(v_{1,l,k}^{0*}, \dots, v_{n,l,k}^{0*})$  и  $(h_{1,l,k}^{0*}, \dots, h_{n,l,k}^{0*})$ , вычислить  $\hat{W}_{1,l,k}^{0*}$  или  $\hat{W}_{2,l,k}^{0*}$  соответственно;

ж) вычислить  $F_1(W_{1,k}^0) = \frac{1}{N_b+1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{W}_{1,l,k}^{0*} > W_{1,k}^0\}}$ .  $F_2(W_{2,k}^0)$  вычисляется аналогичным образом;

з) в соответствии с (6.34) и (6.35) вычислить  $\hat{T}_{1,k}^0$  (относительно статистики Андерсона — Дарлинга см. [Berg, Bekken (2007)]);  $\hat{T}_{2,k}^0$  вычисляется аналогично.

10. Для оценки  $p$ -значения для подхода  $\mathcal{A}_1$  воспользоваться формулой:

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{1,k}^0 > \hat{T}_1\}}.$$

### 6.9.2. Тесты, основанные на использовании эмпирических копула-функций

#### Подход $\mathcal{A}_2$

Подход  $\mathcal{A}_2$ , описанный в [Berg (2009)], основан на тесте, предложенном в работе [Genest, Rémillard (2008)]. А именно, этот подход основан на использовании эмпирической копула-функции, впервые представленной в [Deheuvels (1979)]:

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{\hat{u}_{1t} \leq u_1, \dots, \hat{u}_{nt} \leq u_n\}} \quad (6.38)$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0; 1]^n$ . Идея, лежащая в основе этого теста, состоит в сравнении  $\hat{C}(\cdot)$  с параметрической оценкой копула-функции  $C_{\hat{\alpha}}(\cdot)$ . Это — классический подход в статистике, который состоит в построении одномерного критерия согласия, основанного на расстоянии между эмпирической функцией распределения и распределением, предполагаемым при нулевой гипотезе. С использованием статистики Крамера — фон Мизеса в работе [Genest et al. (2009)] получена следующая тестовая статистика:

$$\hat{T}_2 = T \int_{[0;1]^d} \left( \hat{C}(\hat{\mathbf{u}}) - C_{\hat{\alpha}}(\hat{\mathbf{u}}) \right)^2 d\hat{C}(\hat{\mathbf{u}}) = \sum_{t=1}^T \left( \hat{C}(\hat{\mathbf{u}}_t) - C_{\hat{\alpha}}(\hat{\mathbf{u}}_t) \right)^2. \quad (6.39)$$

Далее более подробно представлено описание параметрической бутстреп-процедуры вычисления оценок  $p$ -значений при тестировании параметрической нулевой гипотезы для копула-функции.

### Процедура 6.9.2. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_2$

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода.

3. В соответствии с формулой (6.38) вычислить  $\hat{C}(\hat{\mathbf{u}})$ .

4. Если имеется аналитическое выражение для  $C_{\alpha}(\cdot)$ , то, подставляя  $\hat{C}(\hat{\mathbf{u}})$  и  $C_{\hat{\alpha}}(\hat{\mathbf{u}})$  в (6.39), вычислить оценку  $\hat{T}_2$  и перейти к шагу 5.

Если аналитического выражения для  $C_{\alpha}(\cdot)$  нет, то выбрать достаточно большое натуральное  $N_b \geq T$  и реализовать следующие шаги:

а) согласно предположению о справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{N_b}^*)$  и, согласно (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_1^*, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_b}^*)$ ;

б) вычислить аппроксимацию  $C_{\hat{\alpha}}$  при помощи

$$C_{\hat{\alpha}}^*(\mathbf{u}) = \frac{1}{N_b + 1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{\mathbf{u}}_l^* \leq \mathbf{u}\}}, \quad \mathbf{u} \in [0; 1]^n;$$

в) по формуле (6.39) вычислить приближение статистики Крамера — фон Мизеса:  $\hat{T}_2 = \sum_{t=1}^T \left( \hat{C}(\hat{\mathbf{u}}_t) - C_{\hat{\alpha}}^*(\hat{\mathbf{u}}_t) \right)^2$ .

5. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1, \dots, K$  последовательно повторить следующие шаги:

а) согласно предположению о справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ .

б) по полученным таким образом псевдонаблюдениям оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha^0} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т. е. с использованием полупараметрического метода;

в) определить  $\hat{C}_k^0(u)$  по формуле  $\hat{C}_k^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}\{\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0 \leq \mathbf{u}\}$ ,  $\mathbf{u} \in [0; 1]^n$ ;

г) если определено аналитическое выражение для  $C_\alpha(\cdot)$ , то положить:

$$\hat{T}_{2,k}^0 = \sum_{t=1}^T \left( \hat{C}_k^0(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) - C_{\hat{\alpha}_k^0}(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) \right)^2$$

и перейти к шагу б; если аналитическое выражение для  $C_\alpha(\cdot)$  не определено, то выбрать достаточно большое натуральное  $N_b \geq T$  и реализовать следующие шаги:

- согласно предположению о справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^{0*}, \dots, \mathbf{x}_{N_b,k}^{0*})$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^{0*}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_b,k}^{0*})$ ;
- вычислить аппроксимацию  $C_{\hat{\alpha}_k^0}$  при помощи:

$$C_{\hat{\alpha}_k^0}^{0*}(\mathbf{u}) = \frac{1}{N_b + 1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}\{\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*} \leq \mathbf{u}\};$$

- по формуле (6.39) вычислить приближение статистики Крамера — фон Мизеса:

$$\hat{T}_{2,k}^* = \sum_{t=1}^T \left( \hat{C}_k^0(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) - C_{\hat{\alpha}_k^0}^{0*}(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) \right)^2.$$

6. Для оценки  $p$ -значения в подходе  $\mathcal{A}_2$  воспользоваться формулой

$$\hat{p} = \frac{1}{K + 1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}\{\hat{T}_{2,k}^0 > \hat{T}_2\}.$$

**Некоторое расширение.** В работе [Kole et al. (2007)] предложен тест, который можно рассматривать в качестве расширения подхода  $\mathcal{A}_2$  на случай, когда аналитическое выражение (гауссовское, студентовское и т.п.) для копула-функции отсутствует.

В основе этого теста лежит та же идея, что и в [Genest et al. (2009)], состоящая в вычислении расстояния между эмпирической и параметрической копула-функциями. Однако формальное представление функции распределения эллиптического типа, как правило, невозможно, и вычисление их значений с вычислительной точки зрения очень трудоемко в условиях большой размерности. В работе [Kole et al. (2007)] используется свойство постоянства функции плотности эллиптических распределений на эллипсоидах. Каждой случайной величине, имеющей эллиптическое распределение, отвечает одномерная случайная величина со специфическим распределением, которое соответствует радиальным эллипсоидам, для которых плотность постоянна (см. [Fang et al. (1990)]). Вместо того чтобы рассматривать исходные наблюдения, в работе [Kole et al. (2007)] рассматриваются квадраты радиусов эллипсоида, отвечающего постоянной плотности. Как следствие, авторы последней упомянутой работы сравнивают эмпирические распределения квадратов радиусов с их теоретическими распределениями, которые представляют собой некоторые стандартные распределения в случае гауссовской и студентовской копула-функции.

Пусть имеется случайный вектор  $U = (u_{1t}, \dots, u_{nt})'$ ,  $t = 1, \dots, T$ , с частными равномерными на  $[0; 1]$  распределениями, зависимости между компонентами которого определяются гауссовской копула-функцией с корреляционной матрицей  $\Sigma$ . В работе [Kole et al. (2007)] строится квадрат радиуса следующим образом:

$$Z_{\Phi} = \zeta' \Sigma^{-1} \zeta, \quad (6.40)$$

где  $\zeta = (\Phi^{-1}(u_{1t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{nt}))'$  — вектор значений обратной функции гауссовского одномерного распределения в точках  $u_{1t}, \dots, u_{nt}$ . Легко показать, что случайная величина  $Z_{\Phi}$  имеет  $\chi_n^2$ -распределение.

Пусть  $V = (v_1, \dots, v_n)'$  — случайный вектор, в котором  $v_i$  имеет равномерное распределение на  $[0; 1]$ , а зависимости между компонентами совместного распределения определяются копула-функцией Стьюдента с корреляционной матрицей  $\Sigma$  и числом степеней свободы  $\nu$ . В [Kole et al. (2007)] квадрат радиуса строится следующим образом:

$$Z_{\nu} = \zeta'_{\nu} \Sigma^{-1} \zeta_{\nu} / n, \quad (6.41)$$

где  $\zeta_{\nu} = (t_{\nu}^{-1}(v_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(v_n))'$  — вектор значений обратной функции одномерного распределения Стьюдента с числом степеней свободы  $\nu$ . Случайная величина  $Z_{\nu}$  имеет  $F$ -распределение с параметрами  $n$  и  $\nu$ , так как  $\zeta_{\nu}$  имеет распределение Стьюдента и может быть представлено как  $W/\sqrt{n}$ , где  $W$  —  $n$ -мерная нормальная случайная величина.

с ковариационной матрицей  $\Sigma$ , а  $S$  — одномерная случайная величина с  $\chi^2_\nu$ -распределением. Как следствие для  $Z_\nu$  из (6.41) имеем:

$$Z_\nu = \frac{W'\Sigma^{-1}W/n}{S/\nu}.$$

Это представление показывает, что  $Z_\nu$  есть отношение двух независимых  $\chi^2$ -распределенных случайных величин, каждая из которых делится на соответствующее ей количество степеней свободы. А это значит, что  $Z_\nu$  имеет  $F_{n,\nu}$ -распределение.

**Практическая реализация** этого расширения подхода  $\mathcal{A}_2$  аналогична реализации самого  $\mathcal{A}_2$  и состоит из четырех шагов.

1. При помощи IFM-метода (см. п.6.6.2) оценить параметры  $\alpha$  копула-функции следующим образом:

а) для моделирования частных распределений воспользоваться полупараметрическим методом из работы [Danielsson, de Vries (2000)], который состоит в том, чтобы моделировать центральную часть функции распределения при помощи эмпирического распределения, а хвосты — при помощи одномерных распределений из теории экстремальных значений; в частности, для моделирования хвостов можно использовать распределение Парето; соответственно, хвосты определяются левым эмпирическим 0,01-квантилем и правым эмпирическим 0,99-квантилем;

б) при помощи метода максимума правдоподобия оценить параметры  $\alpha$  копула-функции.

2. Оценить качество выбранной параметрической копула-функции, вычисляя ее расстояние до эмпирической копула-функции; если копула-функция принадлежит эллиптическому семейству (например, гауссовская или стьюдентовская), то с использованием (6.40) или (6.41) воспользоваться одним из стандартных критериев согласия. В работе [Kole et. al. (2007)] используются следующие меры расстояния:

$$D_{KS}^m = \max_t |\mathfrak{F}_E - F_H|,$$

$$D_{KS}^a = \int_x |\mathfrak{F}_E - F_H| dF_H,$$

$$D_{AD}^m = \max_t \frac{|\mathfrak{F}_E - F_H|}{\sqrt{F_H(1 - F_H)}},$$

$$D_{AD}^a = \int_x \frac{|\mathfrak{F}_E - F_H|}{\sqrt{F_H(1 - F_H)}} dF_H,$$

где  $\mathfrak{F}_E$  — эмпирическая функция распределения, а  $F_H$  — гипотетическое распределение. Первая мера расстояния — расстояние Колмогорова, второе расстояние — среднее абсолютное отклонение



третья мера — расстояние Андерсона — Дарлингга, четвертое — аналог расстояния Андерсона — Дарлингга с усреднением. Для того чтобы уменьшить влияние выбросов при использовании расстояний Андерсона — Дарлингга, в работе [Kote et al. (2007)], следуя [Malevergne, Sornette (2003)], исходное  $|F_E - F_H|$  заменено на  $(F_E - F_H)^2$ .

3. Если форма меры расстояния известна, а параметры копула-функции оценены, для вычисления распределения случайных величин, отвечающих указанным выше четырем расстояниям, в работе [Kote et al. (2007)] используется параметрическая бутстреп-процедура с  $K$  итерациями, это отвечает в точности шагу 5 в реализации подхода  $\mathcal{A}_2$ . Отметим, что двухшаговый IFM-метод также должен быть использован в упомянутой бутстреп-процедуре.

4. Подобно шагу 6 в реализации подхода  $\mathcal{A}_2$  для оценки  $p$ -значений использовать полученное на предыдущем шаге распределение для мер расстояний, т. е. подсчитать, сколько раз значения меры расстояния, вычисленные с использованием бутстреп-выборок, превышают значение, отвечающее исходной выборке, и поделить это число на  $(K + 1)$ .

### Подход $\mathcal{A}_3$

В работе [Genest et al. (2009)] предложено применить предыдущий подход  $\mathcal{A}_2$  к случайным величинам, подвергнутым преобразованию Розенблатта, т. е. к  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$ . Следующий шаг состоит в сравнении  $\hat{C}(\mathbf{v})$  с копула-функцией  $C_{\perp}(\mathbf{v})$ , отвечающей независимости, с использованием статистики Крамера — фон Мизеса, см. [Genest et al. (2009)]:

$$\hat{T}_3 = T \int_{[0;1]^d} \left( \hat{C}(\mathbf{v}) - C_{\perp}(\mathbf{v}) \right)^2 d\hat{C}(\mathbf{v}) = \sum_{t=1}^T \left( \hat{C}(\mathbf{v}_t) - C_{\perp}(\mathbf{v}_t) \right)^2. \quad (6.42)$$

### Процедура 6.9.3. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_3$ .

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , т. е. с использованием полупараметрического метода.

3. В предположении справедливости нулевой гипотезы относительно копула-функции  $C_{\hat{\alpha}}$  вычислить интегральное условно-вероятностное преобразование (СРІТ) выборочных данных  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$  путем применения СРІТ к  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$ .

4. Согласно формуле (6.38) вычислить  $\hat{C}(\mathbf{v})$ .

5. Согласно формуле (6.42) вычислить  $\hat{T}_3$ .

6. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1$ ,

- а) отправляясь от справедливости нулевой гипотезы, сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ ;
- б) по сгенерированной таким образом псевдовыборке оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha^0} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т. е. с использованием полупараметрического метода;
- в) в предположении справедливости нулевой гипотезы о параметрическом виде копула-функции  $C_{\hat{\alpha}_k^0}$  вычислить интегральное условно-вероятностное преобразование выборочных данных  $(\mathbf{v}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^0)$ , применяя СРІТ к  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ ;

г) определить  $\hat{C}_k^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}\{\mathbf{v}_{t,k}^0 \leq \mathbf{u}\}$ ,  $\mathbf{u} \in [0; 1]^n$ ;

д) вычислить  $\hat{T}_{3,k}^0 = \sum_{t=1}^T \left( \hat{C}_k^0(\mathbf{v}_{t,k}^0) - C_{\perp}(\mathbf{v}_{t,k}^0) \right)^2$ .

7. Вычислить оценку  $p$ -значения следующим образом:

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{3,k}^0 > \hat{T}_3\}}.$$

#### Подход $\mathcal{A}_4$

В работах [Genest, Rivest (1993)], [Wang, Wells (2000)], [Savu, Trede (2008)], [Genest et al. (2006a)] для построения критериев согласия для копула-функций предлагается использовать так называемую функцию зависимости Кендалла  $K(w) = P(C(\hat{\mathbf{U}}) \leq w)$  (см. п. 6.5.2). Тестовый датчик  $S_4$  для подхода  $\mathcal{A}_4$  определяется в форме этой функции, т. е.

$$S_4(w) = P(C(\hat{\mathbf{U}}) \leq w), \quad w \in [0; 1],$$

где  $\hat{\mathbf{U}}$  — псевдовектор, каждая компонента которого составлена из соответствующих нормированных рангов. При справедливости нулевой гипотезы  $S_4(w) = S_{4,\hat{\alpha}}(w)$ , где  $S_{4,\hat{\alpha}}(w)$  — функция зависимости Кендалла, рассчитанная в условиях нулевой гипотезы  $H_0$  и зависящая от параметров соответствующей копула-функции. Непараметрическая оценка для тестового датчика  $S_4$  равна:

$$\hat{S}_4(w) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{\hat{C}(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) \leq w\}} \quad (6.43)$$

Статистика Крамера — фон Мизеса вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{T}_4 &= T \int_0^1 \left( \hat{S}_4(w) - S_{4, \hat{\alpha}}(w) \right)^2 d\hat{S}_4(w) = \\ &= \sum_{t=1}^T \left( \hat{S}_4\left(\frac{t}{T+1}\right) - S_{4, \hat{\alpha}}\left(\frac{t}{T+1}\right) \right)^2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

**Процедура 6.9.4. Реализация теста в подходе  $\mathcal{A}_4$**

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода.

3. В соответствии с формулой (6.38) вычислить  $\hat{C}(\hat{\mathbf{u}})$ .

4. Если для  $S_{4, \alpha}$  можно получить аналитическое выражение, то в соответствии с (6.43) и (6.44) вычислить статистику  $\hat{T}_4$ , а затем перейти к шагу 5. Если аналитическое выражение для  $S_{4, \alpha}$  получить невозможно, то выбрать  $N_b \geq T$  и реализовать следующие шаги:

а) согласно предположению о справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{N_b}^*)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_1^*, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_b}^*)$ ;

б) вычислить аппроксимацию  $S_{4, \hat{\alpha}}$  при помощи  $\hat{S}_4^*(w) = \frac{1}{N_b+1} \times \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{C}^*(\hat{\mathbf{u}}_l^*) \leq w\}}$ , где

$$\hat{C}^*(\mathbf{u}) = \frac{1}{N_b+1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{\mathbf{u}}_l^* \leq \mathbf{u}\}} \quad \mathbf{u} \in [0; 1]^n;$$

в) по формуле (6.44) вычислить приближение для статистики Крамера — фон Мизеса:

$$\hat{T}_4 = \frac{T}{N_b} \sum_{l=1}^{N_b} \left( \hat{S}_4\left(\hat{C}^*(\hat{\mathbf{u}}_l^*)\right) - \hat{S}_4^*\left(\hat{C}^*(\hat{\mathbf{u}}_l^*)\right) \right)^2.$$

5. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k =$

- а) согласно предположению нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ ;
- б) оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha^0} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т.е. с использованием полупараметрического метода;
- в) определить  $\hat{S}_{4,k}^0(w) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{\hat{C}_k^0(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) \leq w\}}$ , где  $\hat{C}_k^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \times \mathbf{I}_{\{\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0 \leq \mathbf{u}\}}$ ,  $\mathbf{u} \in [0; 1]^n$ ;
- г) если для  $S_{4,\alpha}$  можно получить аналитическое выражение, то с использованием  $\hat{S}_{4,k}^0$  и  $S_{4,\hat{\alpha}_k^0}$  в формуле (6.44) вычислить  $\hat{T}_{4,k}^0$  и перейти к шагу б; если аналитическое выражение для  $S_{4,\alpha}$  получить невозможно, тогда выбрать достаточно большое натуральное  $N_b \geq T$  и реализовать следующие шаги:

- в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^{0*}, \dots, \mathbf{x}_{N_b,k}^{0*})$  и в соответствии с (6.32) вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^{0*}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_b,k}^{0*})$ ;
- вычислить аппроксимацию  $S_{4,\hat{\alpha}_k^0}$  по формуле:  $\hat{S}_{4,k}^{0*}(w) = \frac{1}{N_b+1} \times \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{C}_k^{0*}(\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*}) \leq w\}}$ , где  $\hat{C}_k^{0*}(\mathbf{u}) = \frac{1}{N_b+1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*} \leq \mathbf{u}\}}$ ,  $\mathbf{u} \in [0; 1]^n$ ;
- по формуле (6.44) вычислить приближение для статистики Крамера – фон Мизеса:

$$\hat{T}_{4,k}^0 = \frac{T}{N_b} \sum_{l=1}^{N_b} \left( \hat{S}_{4,k}^0 \left( \hat{C}_k^{0*}(\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*}) \right) - \hat{S}_{4,k}^{0*} \left( \hat{C}_k^{0*}(\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*}) \right) \right)^2.$$

6. Вычислить оценку  $p$ -значения с использованием формулы:

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{4,k}^0 > \hat{T}_4\}}.$$

### Подход $\mathcal{A}_5$

В работе [Quessy et al. (2007)] предлагается критерий согласия для двумерных копула-функций, который основан на функции зависимости  $L_2(w) = P(\hat{U}_1 \hat{U}_2 \leq w)$ . При этом  $P(\hat{U}_1 \hat{U}_2 \leq w) =$

$= P(C_{\perp}(\hat{U}_1 \hat{U}_2) \leq w)$ . Этот подход обобщается на случай произвольной размерности  $n$ , при этом  $L_n(w) = P(C_{\perp}(\hat{U}) \leq w)$  и тестовый датчик  $S_5$  подхода  $\mathcal{A}_5$  определяется соотношением:

$$S_5(w) = P(C_{\perp}(\hat{U}) \leq w), \quad w \in [0; 1],$$

где  $\hat{U}$  — псевдовектор, каждая компонента которого составлена из соответствующих нормированных рангов. При справедливости нулевой гипотезы ( $H_0$ ),  $S_5(w) = S_{5,\hat{\alpha}}(w)$ , где  $S_{5,\hat{\alpha}}(w)$  — функция зависимости Кендалла, рассчитанная при справедливости  $H_0$  и зависящая от параметров соответствующей копула-функции. Возьмем непараметрическую оценку для  $S_5$ :

$$\hat{S}_5(w) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{C_{\perp}(\hat{u}_t) \leq w\}}. \quad (6.45)$$

Статистика Крамера — фон Мизеса вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{T}_5 &= T \int_0^1 (\hat{S}_5(w) - S_{5,\hat{\alpha}}(w))^2 d\hat{S}_5(w) = \\ &= \sum_{t=1}^T \left( \hat{S}_5\left(\frac{t}{T+1}\right) - S_{5,\hat{\alpha}}\left(\frac{t}{T+1}\right) \right)^2. \end{aligned} \quad (6.46)$$

### Процедура 6.9.5. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_5$

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода.

3. Если для  $S_{5,\alpha}$  существует аналитическое выражение, то, используя формулы (6.45) и (6.46), вычислить  $\hat{T}_{5,k}^0$  и перейти к шагу 4. Если аналитическое выражение для  $S_{5,\alpha}$  получить невозможно, тогда выбрать достаточно большое натуральное  $N_b \geq T$  и реализовать следующие шаги:

а) согласно предположению о справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{N_b}^*)$  и, используя (6.32),

б) вычислить аппроксимацию  $S_{5,\hat{\alpha}}$  при помощи:  $\hat{S}_5^*(w) = \frac{1}{N_b+1} \times$   
 $\times \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_l^*) \leq w\}};$

в) по формуле (6.46) вычислить приближение для статистики Крамера — фон Мизеса:

$$\hat{T}_5 = \frac{T}{N_b} \sum_{l=1}^{N_b} \left( \hat{S}_5(C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_l^*)) - \hat{S}_5^*(C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_l^*)) \right)^2.$$

4. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1, \dots, K$  последовательно повторить следующие шаги:

а) в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0);$

б) оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha^0} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т. е. полупараметрического метода;

в) определить  $\hat{S}_{5,k}^0(w) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_{t,k}^0) \leq w\}};$

г) если для  $S_{5,\alpha}$  существует аналитическое выражение, то с использованием  $\hat{S}_{5,k}^0$  и  $S_{5,\hat{\alpha}_k^0}$  по формуле (6.46) вычислить  $\hat{T}_{5,k}^0$  и перейти к шагу 5; если аналитическое выражение для  $S_{5,\alpha}$  получить невозможно, то выбрать достаточно большое натуральное  $N_b \geq T$  и реализовать следующие шаги:

- в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^{0*}, \dots, \mathbf{x}_{N_b,k}^{0*})$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^{0*}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_b,k}^{0*});$

- вычислить аппроксимацию  $S_{5,\hat{\alpha}_k^0}$  при помощи формулы

$$\hat{S}_{5,k}^{0*}(w) = \frac{1}{N_b+1} \sum_{l=1}^{N_b} \mathbf{I}_{\{C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*}) \leq w\}};$$

- по формуле (6.46) вычислить приближение для статистики Крамера — фон Мизеса

$$\hat{T}_{5,k}^0 = \frac{T}{N_b} \sum_{l=1}^{N_b} \left( \hat{S}_{5,k}^0(C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*})) - \hat{S}_{5,k}^{0*}(C_{\perp}(\hat{\mathbf{u}}_{l,k}^{0*})) \right)^2.$$

5. Вычислить оценку  $p$ -значения по формуле

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{5,k}^0 > \hat{T}_5\}}.$$

### 6.9.3. Другие подходы к построению критериев согласия

#### Подход $\mathcal{A}_6$

В работе [Shih (1998)] предложен основанный на моментных тождествах критерий согласия для двумерных моделей, задаваемых копула-функцией Клейтона. В ней рассматриваются невзвешенные и взвешенные оценки параметра зависимости  $\alpha$  с использованием  $\tau$ -Кендалла и взвешенной ранговой оценки, а именно:

$$\hat{\alpha}_\tau = \frac{2\hat{\tau}}{1-\hat{\tau}} \quad \text{и} \quad \hat{\alpha}_W = \frac{\sum_{i<j} \Delta_{ij}/W_{ij}}{\sum_{i<j} (1-\Delta_{ij})/W_{ij}}, \quad (6.47)$$

где  $\hat{\tau} = -1 + 4 \sum_{i<j} \Delta_{ij}/T(T-1)$ ,  $\Delta_{ij} = \mathbf{I}_{\{(\hat{U}_{1i}-\hat{U}_{1j})(\hat{U}_{2i}-\hat{U}_{2j})>0\}}$ , а  $W_{ij} = \sum_{t=1}^T \mathbf{I}_{\{\hat{U}_{1t} \leq \max(\hat{U}_{1i}, \hat{U}_{1j}), \hat{U}_{2t} \leq \max(\hat{U}_{2i}, \hat{U}_{2j})\}}$ . Учитывая, что  $\hat{\alpha}_\tau$  и  $\hat{\alpha}_W$  являются несмещенными оценками для  $\alpha$ , в предположении справедливости нулевой гипотезы ( $C = C_\alpha$  для  $\alpha \geq 0$ ) в [Shih (1998)] была предложена следующая тестовая статистика:

$$\hat{T}_{\text{Shih}} = \sqrt{T}(\hat{\alpha}_\tau - \hat{\alpha}_W).$$

Там же показано, что при справедливости нулевой гипотезы приведенная выше статистика имеет асимптотически нормальное распределение. Однако позднее в [Genest et al. (20066)] было указано, что представленная в [Shih (1998)] формула для дисперсии этого асимптотического нормального распределения неверна, и предложен исправленный вариант этой формулы. В работе [Berg (2009)] предлагается расширить этот подход на случай произвольной размерности  $n$  путем сравнения  $\hat{\alpha}_\tau$  и  $\hat{\alpha}_W$  для каждой пары случайных величин. Как следствие, результирующий вектор, составленный из  $n(n-1)/2$  статистик, будет иметь асимптотическое  $n(n-1)/2$ -мерное нормальное распределение с невырожденной ковариационной матрицей, формула для которой пока не выведена. Если умножить вектор статистик на матрицу, обратную к квадратному корню ковариационной матрицы, то результирующий нормированный вектор имеет асимптотическое стандартное нормальное распределение, а сумма квадратов нормированных статистик будет иметь  $\chi^2$ -распределение с  $n(n-1)/2$  степенями свободы.

Не имея формулы ковариационной матрицы, Берг вычисляет ненормированные суммы квадратов и использует параметрическую бутстреп-процедуру для оценки  $p$ -значения. Тестовая статистика для подхода  $\mathcal{A}_6$  равна:

$$\hat{T}_6 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\hat{\alpha}_{\tau,ij} - \hat{\alpha}_{W,ij})^2. \quad (6.48)$$

Отметим, что  $\hat{\alpha}_W$  и в целом подход  $\mathcal{A}_6$  может быть использован только для тестирования копула-функции Клейтона.

**Процедура 6.9.6. Реализация теста в подходе  $\mathcal{A}_6$**

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода.

3. В соответствии с (6.47) вычислить параметры  $\hat{\alpha}_{\tau}$  и  $\hat{\alpha}_W$ .

4. В соответствии с (6.48) вычислить  $\hat{T}_6$ .

5. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1, \dots, K$  последовательно повторить следующие шаги:

а) в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ ;

б) в соответствии с (6.47) вычислить  $\hat{\alpha}_{\tau,k}^0$  и  $\hat{\alpha}_{W,k}^0$ ;

в) в соответствии с (6.48) и используя полученные на предыдущем шаге  $\hat{\alpha}_{\tau,k}^0$  и  $\hat{\alpha}_{W,k}^0$ , вычислить  $\hat{T}_{6,k}^0$ .

6. Вычислить оценку  $p$ -значения, используя формулу

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{6,k}^0 > \hat{T}_6\}}.$$

**Подход  $\mathcal{A}_7$**

В работе [Ranchenko (2005)] предложен тест, основанный на так называемом внутреннем произведении  $\hat{U} - \hat{U}_{\alpha}$  на  $\hat{U} - \hat{U}_{\alpha}$ , где  $\hat{U}$  — псевдовектор, каждая компонента которого равна соответствующему нормированному рангу, а  $\hat{U}_{\alpha}$  — аналог вектора  $\hat{U}$ , отвечающий нулевой гипотезе (при этом  $\hat{\alpha}$  — состоятельная оценка параметра копула-функции).

Идея этого теста состоит в использовании внутреннего произведения в



качестве меры расстояния между двумя векторами. Определим квадрат расстояния  $Q$  между двумя векторами  $\hat{U}$  и  $\hat{U}_\alpha$  формулой

$$Q = \int \int \kappa_n(\Delta u, \Delta u) f^2(\Delta u) d(\Delta u) d(\Delta u),^{10}$$

где  $\kappa_n$  — положительно определенное симметричное ядро; в частности, в качестве  $\kappa_n$  может быть взято гауссовское ядро:

$$\kappa_n(\Delta u, \Delta u) = \exp\{-\|\Delta u\|^2/2nh^2\},$$

где  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму в  $R^n$ ;  $h > 0$  — ширина «окна», а  $\Delta u$  — одно из возможных значений  $\Delta U$ . Очевидно, что  $Q$  будет равно нулю тогда и только тогда, когда  $\hat{U} = \hat{U}_\alpha$ .

Если имеются случайные выборки  $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T)$  из  $\hat{U}$ , то следующим шагом является генерация случайных выборок  $(\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_T^*)$  вектора  $\hat{U}_\alpha$ , отвечающего нулевой гипотезе. Тестовая статистика подхода  $\mathcal{A}_7$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{T}_7 = & \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \kappa_n(\hat{u}_i, \hat{u}_j) - \frac{2}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \kappa_n(\hat{u}_i, \hat{u}_j^*) + \\ & + \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \kappa_n(\hat{u}_i^*, \hat{u}_j^*). \end{aligned} \quad (6.49)$$

### Процедура 6.9.7. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_7$

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(x_1, \dots, x_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода.

3. В условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(x_1^*, \dots, x_T^*)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_T^*)$ .

4. В соответствии с (6.49), используя  $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T)$  и  $(\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_T^*)$ , вычислить  $\hat{T}_7$ .

5. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1, \dots, K$  последовательно повторить следующие шаги:

- а) в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(x_{1,k}^0, \dots, x_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{u}_{1,k}^0, \dots, \hat{u}_{T,k}^0)$ ;

- б) оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т. е. полупараметрического метода;
- в) используя копула-функцию  $C_{\hat{\alpha}_k^0}$ , отвечающую нулевой гипотезе, сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^{0*}, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^{0*})$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдобыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^{0*}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^{0*})$ ;
- г) в соответствии с (6.49) и с использованием  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$  и  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^{0*}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^{0*})$  вычислить  $\hat{T}_{7,k}^0$ .

6. Вычислить оценку  $p$ -значения по формуле

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{7,k}^0 > \hat{T}_7\}}.$$

### Подход $\mathcal{A}_8$

В работе [Berg (2009)] предложено расширение подхода  $\mathcal{A}_7$ , которое состоит в применении подхода  $\mathcal{A}_7$  к величинам, подвергнутым преобразованию Розенблатта, т. е. к  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$ . Если имеются выборки  $(\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_T^*)$ , извлеченные из копула-функции, отвечающей случаю независимости, статистика подхода  $\mathcal{A}_8$  равна:

$$\begin{aligned} \hat{T}_8 = & \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \kappa_n(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) - \frac{2}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \kappa_n(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j^*) + \\ & + \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \kappa_n(\mathbf{v}_i^*, \mathbf{v}_j^*). \end{aligned} \tag{6.50}$$

В работе [Berg (2009)] отмечается, что может показаться странным желание строить выводы относительно отклонения от проверяемой (нулевой) гипотезы на основании единственной выборки, отвечающей нулевой гипотезе. Тем не менее этот подход изначально рассматривался в работе [Ranchenko (2005)], и Берг предпочел рассматривать этот тест именно в таком виде. Более того, подход  $\mathcal{A}_8$  направлен на то, чтобы проверить эффект преобразования Розенблатта в случае использования подхода  $\mathcal{A}_7$ .

### Процедура 6.9.8. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_8$

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , т. е. полупараметрического метода.

3. В предположении справедливости нулевой гипотезы относительно копула-функции  $C_{\hat{\alpha}}$  вычислить интегральное условно-вероятностное преобразование (СРІТ) выборочных данных  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$  путем применения СРІТ к  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$ .

4. Сгенерировать выборку  $(\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_T^*)$  из копула-функции, отвечающей независимости.

5. В соответствии с (6.50) и с использованием  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_T)$  и  $(\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_T^*)$  вычислить  $\hat{T}_8$ .

6. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1, \dots, K$  последовательно повторить следующие шаги:

а) в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ ;

б) оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т. е. полупараметрического метода;

в) в предположении справедливости нулевой гипотезы относительно копула-функции  $C_{\hat{\alpha}_k^0}$  вычислить интегральное условно-вероятностное преобразование (СРІТ) выборочных данных  $(\mathbf{v}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^0)$  путем применения СРІТ к  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$ ;

г) используя копула-функцию, отвечающую независимости, сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{v}_{1,k}^{0*}, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^{0*})$ .

7. В соответствии с (6.50), используя  $(\mathbf{v}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^0)$  и  $(\mathbf{v}_{1,k}^{0*}, \dots, \mathbf{v}_{T,k}^{0*})$ , вычислить  $\hat{T}_{8,k}^0$ .

8. Вычислить оценку  $p$ -значения по формуле

$$\hat{p} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{8,k}^0 > \hat{T}_8\}}.$$

#### 6.9.4. Тесты, основанные на усреднении критических статистик

Выше были рассмотрены некоторые критерии согласия для копула-функций. Справедливо задаться вопросом, а может ли усреднение этих

тестов (с разными способами измерения отклонений от нулевой гипотезы) дать более устойчивые результаты? Ответ на этот вопрос дается в работе [Berg (2009)], где подход с усреднением обозначен как  $\mathcal{A}_9$ .

Понятно, что усреднение должно осуществляться по стандартизированным переменным. Более того, следует использовать оптимальные веса для расчета взвешенного среднего. Тем не менее в силу некоторых вычислительных аспектов в работе [Berg (2009)] представлены только два варианта усреднения:

- *первый вариант* состоит в усреднении всех девяти указанных выше подходов; ему отвечает статистика:

$$\hat{T}_9^{(a)} = \frac{1}{9} \left\{ \hat{T}_1^{(a)} + \hat{T}_1^{(b)} + \sum_{j=2}^8 \hat{T}_j \right\}; \quad (6.51)$$

- *второй вариант* состоит в усреднении лишь тех подходов, которые основаны на использовании эмпирической копула-функции, а именно подходов  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$  и  $\mathcal{A}_4$ ; статистика для такого усреднения равна:

$$\hat{T}_9^{(b)} = \frac{1}{3} \left( \hat{T}_2 + \hat{T}_3 + \hat{T}_4 \right). \quad (6.52)$$

### Процедура 6.9.9. Реализация теста в подходе $\mathcal{A}_9$

1. Получить псевдонаблюдения  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  путем преобразования выборочных данных  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$  в нормированные ранги с использованием (6.32).

2. Оценить параметры  $\alpha$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} l(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T; \alpha)$ , т. е. с использованием полупараметрического метода.

3. Используя  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_T)$  и  $\hat{\alpha}$ , реализовать необходимые шаги для вычисления тестовых статистик процедур 6.9.1–6.9.8 и вычислить  $\hat{T}_1^{(a)}$ ,  $\hat{T}_1^{(b)}$ ,  $\hat{T}_2 - \hat{T}_8$ .

4. В соответствии с (6.51)–(6.52) вычислить  $\hat{T}_9^{(a)}$  и  $\hat{T}_9^{(b)}$  соответственно.

5. При некотором достаточно большом натуральном  $K$  для  $k = 1, \dots, K$  последовательно повторить следующие шаги:

- а) в условиях справедливости нулевой гипотезы сгенерировать случайную выборку  $(\mathbf{x}_{1,k}^0, \dots, \mathbf{x}_{T,k}^0)$  и, используя (6.32), вычислить ассоциированную с ней псевдовыборку  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k})$ .

- б) оценить параметры  $\alpha^0$  копула-функции с использованием состоятельной ММП-оценки  $\hat{\alpha}_k^0 = \arg \max_{\alpha^0} l(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0; \alpha^0)$ , т. е. с использованием полупараметрического метода;
- в) используя  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,k}^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{T,k}^0)$  и  $\hat{\alpha}_k^0$ , реализовать необходимые шаги для вычисления тестовых статистик из процедур 6.9.1–6.9.8 и вычислить  $\hat{T}_{1,k}^{0,(a)}$ ,  $\hat{T}_{1,k}^{0,(b)}$ ,  $\hat{T}_{2,k}^0 - \hat{T}_{8,k}^0$ ;
- г) в соответствии с (6.51)–(6.52), используя  $\hat{T}_{1,k}^{0,(a)}$ ,  $\hat{T}_{1,k}^{0,(b)}$ ,  $\hat{T}_{2,k}^0 - \hat{T}_{8,k}^0$ , вычислить  $\hat{T}_{9,k}^{0,(a)}$  и  $\hat{T}_{9,k}^{0,(b)}$ .

6. Вычислить оценку  $p$ -значений по формулам:

$$\hat{p}^{(a)} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{9,k}^{0,(a)} > \hat{T}_9^{(a)}\}} \quad \hat{p}^{(b)} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{\{\hat{T}_{9,k}^{0,(b)} > \hat{T}_9^{(b)}\}}.$$

**Сравнение подходов с помощью имитационного моделирования.** В работе [Berg (2009)] проведено объемное имитационное моделирование в целях сравнения описанных выше подходов к построению критериев согласия для копула-функций. И хотя показано, что не существует критерия, превосходящего по мощности любой другой из рассматриваемых подходов, подходы  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_4$  и  $\mathcal{A}_9$  дают очень хорошие результаты, причем последний из них можно признать лучшим.

Интересно, что при тестировании гипотезы гауссовости (при альтернативе распределения с «тяжелыми хвостами») слабый в других ситуациях подход  $\mathcal{A}_1$  дает очень хорошие результаты для высоких размерностей и больших объемов выборок. Следовательно, его целесообразно использовать в качестве предварительного теста проверки эллипсоидальности распределения с тем, чтобы решить, какой из подходов выбрать для дальнейшего исследования, см. [Huffera, Park (2007)].

### 6.9.5. Эмпирические приложения с пакетом R: пример реализации подхода $\mathcal{A}_2$

Модули пакета R дают возможность численно реализовать критерии согласия, основанные на сравнении эмпирической копула-функции с ее параметрической оценкой (в предположении справедливости проверяемой гипотезы), т. е. практически осуществить подход  $\mathcal{A}_2$ . Тестовая статистика строится с использованием расстояния Крамера — фон Мизеса. Приближения для  $p$ -значений тестовой статистики вычисляются с использованием параметрических бутстреп-процедур, предложенных в

[Genest, Rémillard (2008)], [Genest et al. (2009)], или с помощью подхода, изложенного в [Kojadinovic et al. (2011)], [Kojadinovic, Yan (2011)]. Ниже приведен код процедуры в соответствующем модуле пакета *R*.

```
library(copula)
x <- rcopula(claytonCopula(3), 200)
## Does the Gumbel family seem to be a good choice?
gofCopula(gumbelCopula(1), x)
## What about the Clayton family?
gofCopula(claytonCopula(1), x)
## The same with a different estimation method
gofCopula(gumbelCopula(1), x, method="itau")
gofCopula(claytonCopula(1), x, method="itau")
## A three-dimensional example
x <- rcopula(tCopula(c(0.5, 0.6, 0.7), dim = 3, dispstr = "un"), 200)
## Does the Clayton family seem to be a good choice?
gofCopula(gumbelCopula(1, dim = 3), x)
## What about the t copula?
t.copula <- tCopula(rep(0, 3), dim = 3, dispstr = "un", df.fixed=TRUE)
gofCopula(t.copula, x)
## The same with a different estimation method
gofCopula(gumbelCopula(1, dim = 3), x, method="itau")
gofCopula(t.copula, x, method="itau")
## The same using the multiplier approach
gofCopula(gumbelCopula(1, dim = 3), x, simulation="mult")
gofCopula(t.copula, x, simulation="mult")
```

For sake of space, we report only the output relative to the first two goodness-of-fit tests:

```
>gofCopula(gumbelCopula(1), x)
Progress will be displayed every 100 iterations.
Iteration 100
...
Iteration 1000
$statistic [1] 0.2648942
$pvalue [1] 0.0004995005
$parameters [1] 1.980118
>gofCopula(claytonCopula(1), x)
Progress will be displayed every 100 iterations.
Iteration 100
...
Iteration 1000
$statistic [1] 0.01489807
$pvalue [1] 0.54995
$parameters [1] 3.317709
```

Отметим, что в пакете, созданном Даниэлем Бергом, рассмотрен более широкий диапазон критериев согласия для копула-функций. Однако к моменту написания данной главы книги (июль 2011 г.) существовала только предварительная версия этого пакета.

## Выводы

1. Очевидные недостатки универсального использования многомерного нормального распределения для моделирования совместного распределения многих экономических и финансовых временных рядов явились мотивирующими факторами для развития **теории копула-функций**. Учитывая растущую значимость этой теории в многомерном статистическом анализе, мы представили в этой главе как обзор основных результатов теории копула-функций, так и некоторое обсуждение наиболее часто используемых копула-функций, среди которых копула-функции эллиптического типа, архимедовы копула-функции, копула-функции, формируемые при помощи парных копула-функций.

2. **Копула-функция**.  $n$ -мерная копула-функция представляет собой многомерную функцию распределения с частными распределениями, имеющими равномерное распределение на отрезке  $[0; 1]$ . Особенно важным результатом является *теорема Шкляра* (см. п. 6.1.1): пусть  $H(\cdot)$  —  $n$ -мерная функция распределения с частными распределениями  $F_1 \dots F_n$ . Тогда существует  $n$ -мерная копула-функция  $C(\cdot)$  такая, что для всех действительных чисел  $(x_1, \dots, x_n)$ , мы имеем:  $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ . Если все частные распределения непрерывны, тогда копула-функция единственна; иначе  $C(\cdot)$  определена единственным образом на  $Ran F_1 \times Ran F_2 \dots Ran F_n$ , где  $Ran$  область значений соответствующего частного распределения. Обратно, если  $C(\cdot)$  — копула-функция, а  $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$  — одномерные функции распределения, тогда функция  $H(\cdot)$ , определенная выше, является совместной функцией распределения с частными распределениями  $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ .

3. **Эллиптические распределения и копула-функции** (см. п. 6.2.1). Пусть  $Z$  —  $n$ -мерный случайный вектор, а  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — симметричная положительно-полуопределенная матрица. Если  $(X - \mu)$  при некотором  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , имеет характеристическую функцию вида  $\phi_{X-\mu}(t) = \exp(it^T \mu) \times \psi(-\frac{1}{2}t^T \Sigma t)$ , тогда  $X$  называют случайной величиной, подчиняющейся распределению эллиптического типа с параметрами  $\mu$ ,  $\Sigma$  и  $\psi$ . Копула-функцию  $C(\cdot)$  называют *эллиптической*, если она представляет собой копула-функцию многомерного распределения эллиптического типа.

4. **Нормальная двумерная копула-функция с линейной корреляцией**  $\rho$  определяется формулой  $C^{Normal}(u_1, u_2; \rho) = \Phi^2(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2); \rho)$ , где  $\Phi^2(\cdot)$  обозначает совместную функцию распределения двумерного стандартного нормального распределения с единичными дисперсиями компонент, корреляцией  $\rho$  и нулевыми средними значениями, а  $\phi^{-1}(\cdot)$  — обратная функция для одномерного стандартного нормального распределения.

**5. Копула-функция двумерного распределения Стьюдента** с линейной корреляцией  $\rho$  определяется следующей формулой:  $C^{t-copula}(u_1, u_2; \rho, \nu) = T^2(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2); \rho, \nu)$ , где  $T^2(\cdot)$  — двумерная функция распределения Стьюдента,  $\nu$  — степени свободы, а  $t_\nu^{-1}(\cdot)$  — обратная функция для одномерного распределения Стьюдента (см. п. 6.2.2).

**6. Архимедовы копула-функции** (см. п. 6.3). Для их описания используются аналитические выражения, они легко строятся, и в это семейство входит множество параметрических подсемейств. Более того, это семейство не ограничено копула-функциями, имеющими радиальную симметрию, как это в случае нормальных копула-функций или, в более общем случае, эллиптических копула-функций.

Если мы рассмотрим функцию  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , которая непрерывна, строго убывает  $\varphi'(u) < 0$ , выпукла  $\varphi''(u) > 0$  и для которой  $\varphi(0) = \infty$  и  $\varphi(1) = 0$ , тогда мы можем определить псевдообращение  $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ , для которого:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi^{-1}(t) & \text{для } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{для } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{array} \right\}.$$

Если  $\varphi$  выпукла, тогда функция  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , определяемая как  $C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)]$ , является архимедовой копула-функцией (см. п. 6.3.1). Функцию  $\varphi(\cdot)$  называют «генератором» копула-функции.

**7. Конструкции, составленные из парных копула-функций** (см. п. 6.4). Из теоремы Шкляра известно, что для плотности  $f_H(\cdot)$  некоторого абсолютно непрерывного совместного распределения  $H(\cdot)$  со строго возрастающими, непрерывными частными функциями распределения  $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ , плотности которых  $f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot)$ , мы имеем:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1, \dots, n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).$$

В двумерном случае вышеприведенное утверждение имеет вид:  $f(x_1, x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ . В этом случае,  $c_{12}(\cdot, \cdot)$  — плотность парной копула-функции, откуда следует, что  $f(x_1|x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1)$ . Для случая совместного распределения трех случайных величин  $X_1, X_2$  и  $X_3$  мы имеем, что  $f(x_1|x_2, x_3) = c_{12|3}[F(x_1|x_3), F(x_2|x_3)]f(x_1|x_3)$ , где, как видно, плотность парной копула-функции  $c_{12|3}(\cdot)$  применяется к  $F(x_1|x_3)$  и  $F(x_2|x_3)$ , которые используются в качестве аргументов. Однако можно предложить несколько альтернативных разложений. Например:  $f(x_1|x_2, x_3) = c_{13|2}[F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)]f(x_1|x_2)$ . В  $n$ -мерном случае возможны аналогичные разложения:



где  $v_j$  — это произвольно выбранная компонента вектора  $\mathbf{v}$ ; через  $\mathbf{v}_{-j}$  обозначен  $\mathbf{v}$ -вектор, в котором исключена компонента  $v_j$ . Теперь, если мы рассмотрим следующее разложение:

$$\begin{aligned} f_H(x_1, \dots, x_n) &= f(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ &= \prod_{t=2}^n f(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}) \cdot f_1(x_1) \end{aligned} \quad (**)$$

и воспользуемся (\*), то получим

$$\begin{aligned} f(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}) &= \frac{f(x_t, x_{t-1} | x_1, \dots, x_{t-2})}{f(x_{t-1} | x_1, \dots, x_{t-2})} = \\ &= c_{t-1, t | 1, \dots, t-2} \cdot f(x_t | x_1, \dots, x_{t-2}). \end{aligned}$$

Для различных индексов  $i, j, i_1, \dots, i_k$  с  $i < j$  и  $i_1 < \dots < i_k$  мы будем использовать следующие обозначения для двумерных условных плотностей копула-функций:

$$c_{i, j | i_1, \dots, i_k} = c_{i, j | i_1, \dots, i_k} (F(x_i | x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), (F(x_j | x_{i_1}, \dots, x_{i_k}))).$$

Рекурсивно используя замену, мы можем переписать (\*\*) в виде:

$$\begin{aligned} f_H(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{r=1}^n f(x_r) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j, j+1 | 1, \dots, j-1} \\ &\text{с } (j = t - k, j + i = t). \end{aligned}$$

Последнее представление имеет вид разложения в виде произведения парных копула-функций. Существует множество возможных разложений в виде произведения парных копула-функций.

**8. Для функций распределений случайных векторов высокой размерности** существует множество возможных разложений в виде произведения парных копула-функций. В работе [Bedford, Cooke (2001, 2002)] впервые введена графическая модель, называемая *регулярной ветвизацией*, которая используется для того, чтобы помочь организовать произведения парных копула-функций. Регулярную ветвизацию, для которой каждое дерево имеет единственный корень, называют *канонической ветвизацией* (см. п. 6.4.2). Регулярная ветвизация, для которой у любого дерева  $T_j$ , соединенного с более чем одним узлом, отсутствуют листья называют *D-ветвизацией* (см. п. 6.4.3).

**9. В главе рассмотрены альтернативные меры статистической зависимости между случайными величинами**, полезные для того, чтобы описывать структуру зависимости анализируемого случайного вектора (см. п. 6.5). Среди них меры *хвостовой зависимости*

которые позволяют учесть асимметричность функций распределения, обычно свойственную временным рядам доходностей финансовых данных.

Ниже приведены основные результаты по этой тематике.

- *Недостатки линейной корреляции* (см. п. 6.5.1). Равенство нулю линейной корреляции отвечает независимости в случае многомерного нормального распределения; линейная корреляция инвариантна относительно линейных преобразований, но это не так в случае преобразований более общего вида. Частные распределения и корреляционные матрицы однозначно определяют совместное распределение только в условиях эллиптических семейств, но в общем случае это неверно. Дисперсии двух случайных величин  $X$  и  $Y$  должны быть конечными, иначе линейная корреляция не определена.
- *$\rho$ -Спирмена* (см. п. 6.5.2). Для двух непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ , копула-функция которых  $C(\cdot)$ ,  $\rho$ -Спирмена дается формулой  $\rho_S(X, Y) = 12 \int \int_{I^2} C(u, v) du dv - 3$ , где  $u = F_x(x)$ ,  $v = F_y(y)$ . Кроме того,  $\rho$ -Спирмена может быть выражено как корреляция рангов  $\rho_S(X, Y) = \text{Corr}(F_x(X), F_y(Y))$ . Перечислим основные свойства  $\rho$ -Спирмена:  $\rho_S$  симметрично;  $|\rho_S| \leq 1$ . В частности,  $\rho_S(X, Y) = 1$ , если  $Y = T(X)$ , где  $T(\cdot)$  — строго возрастающая функция; или  $\rho_S(X, Y) = -1$ , если  $Y = T(X)$ , где  $T(\cdot)$  — строго убывающая функция;  $\rho_S(T_x(X), T_y(Y)) = \rho_S(X, Y)$  для любых строго возрастающих  $T_x(\cdot)$  и  $T_y(\cdot)$ ; если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\rho_S(X, Y) = 0$ .
- *$\tau$ -Кендалла* (см. п. 6.5.2). Пусть  $(X_1, Y_1)$  — случайный вектор, совместное распределение которого  $H(x, y)$ ,  $(X_2, Y_2)$  — случайный вектор, компоненты которого независимы, а их функции распределения совпадают с функциями распределения  $X_1$  и  $Y_1$ , соответственно ( $(X_2, Y_2)$  называют независимой копией  $(X_1, Y_1)$ ). Тогда  $\tau$ -Кендалла для случайного вектора  $(X, Y)$ , компоненты которого являются непрерывными случайными величинами, определяется как *вероятность согласованности* минус *вероятность рассогласованности*:

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= P \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0 \} - \\ &\quad - P \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0 \} = \\ &= E[\text{sign}(X_1 - X_2)\text{sign}(Y_1 - Y_2)]. \end{aligned}$$

мы определим  $\tau$ -Кендалла как  $\rho_\tau(X) = \text{Cov} [\text{sign}(X - \tilde{X})]$ . Перечислим основные свойства  $\tau$ -Кендалла:  $\tau(X, Y)$  симметрична;  $-1 \leq \rho_\tau(X, Y) \leq +1$ ; если  $X_1$  и  $Y_1$  независимы, тогда  $\tau(X, Y) = 0$ ;  $\tau(T_x(X), T_y(Y)) = \tau(X, Y)$  для любых строго возрастающих  $T_x(\cdot)$  и  $T_y(\cdot)$ .

- *Верхняя хвостовая зависимость*  $\lambda^U$  (см. п. 6.5.3). Она существует тогда, когда имеется положительная вероятность положительных выбросов, возникающих одновременно. Мера  $\lambda^U$  широко используется в теории экстремальных значений: она представляет собой вероятность того, что одна случайная величина принимает экстремальные значения при условии, что другая также принимает экстремальные значения.  $X$  и  $Y$  называют *асимптотически зависимыми* на верхнем хвосте, если  $\lambda^U \in (0, 1]$ , и называют *асимптотически независимыми*, если  $\lambda^U = 0$ .
- *Нижняя хвостовая зависимость*  $\lambda^L$ . Она существует тогда, когда имеется положительная вероятность негативных выбросов, возникающих одновременно.  $X$  и  $Y$  называют *асимптотически зависимыми* на нижнем хвосте, если  $\lambda^L \in (0, 1]$ , и называют *асимптотически независимыми*, если  $\lambda^L = 0$ .

**10. Параметрические, полупараметрические и непараметрические методы статистической оценки копула-функций** (см. п. 6.6). В частности, описаны вычислительные преимущества, которые становятся возможными при использовании копула-функций, которые позволяют разделить проблему анализа многомерного распределения на функцию, описывающую зависимость (копула-функцию), и частных распределений. Представлены следующие методы.

- *Метод максимального правдоподобия (ММП)*. Оценка параметров  $\hat{\theta}_{ML}$ , получаемая этим методом, находится путем максимизации логарифмической функции правдоподобия, в которой имеется как компонента, отвечающая копула-функции, так и компонента, отвечающая частным распределениям.
- *Двухшаговый метод максимального правдоподобия*. На первом шаге, с использованием метода максимального правдоподобия оцениваются параметры  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  частных распределений  $F_i$ . Затем при заданных частных распределениях, оценки параметров которых получены на первом шаге, с использованием метода максимума логарифмического правдоподобия оцениваются

- **Канонический метод максимума правдоподобия (КММП).** На первом шаге ряд  $(x_{1t}, x_{2t} \dots x_{nt})$ ,  $t = 1 \dots T$ , преобразуется в ряд  $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$  с использованием эмпирической функции распределения  $F_{iT}(\cdot)$  таким образом, что:  $\hat{u}_{it} = F_{iT}(x_{it}) = \frac{1}{T+1} \sum_{\tau=1}^T \times \mathbf{I}_{\{x_{i\tau} < x_{it}\}}$   $i = 1 \dots n$ , где  $\mathbf{I}_{\{x \leq \bullet\}}$  — индикаторная функция. Затем оцениваются параметры копула-функции путем максимизации логарифмической функции правдоподобия для копула-функции.
- **Трехшаговый канонический метод максимального правдоподобия для многомерного распределения, которому отвечает копула-функция Стьюдента.** На первом шаге из  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ , путем соответствующего преобразования нормированных рангов (с использованием эмпирической функции распределения), приводится к  $(F_{1T}(x_{1t}), F_{2T}(x_{2t}), \dots, F_{nT}(x_{nt}))$ . На втором шаге для всех пар вычисляются оценки коэффициента Кендалла. В результате получим матрицу эмпирических оценок коэффициента Кендалла  $\hat{\mathbf{R}}^T$ ,  $(j, k)$ -й элемент которой равен  $\hat{R}_{jk}^T = \tau[F_{jT}(X_j), F_{kT}(X_k)]$ . Затем строится оценка корреляционной матрицы, которая основана на следующем соотношении  $\hat{\Sigma}_{j,k} = \sin(\frac{\pi}{2} \hat{R}_{j,k}^T)$ , где количество уникальных параметров равно  $q = n \cdot (n - 1) / 2$ . Поскольку нет никаких оснований гарантировать положительную определенность матрицы  $\hat{\Sigma}$ , то используются соответствующие поправки (см., например, процедуру, основанную на методе собственных значений, из работы [Rousseeuw, Molenberghs (1993)]). На третьем шаге, путем максимизации функции лог-правдоподобия копула-функции Стьюдента, находится оценка параметра, отвечающего за количество степеней свободы,  $\hat{\nu}_{CML}$ .

**11. Методы выбора копула-функций** (см. п. 6.8) позволяют идентифицировать ту модель для копула-функции, которая обеспечивает наилучшее приближение имеющихся данных, так же как в деталях рассмотрены вопросы, связанные с **критериями согласия для копула-функций**. Основываясь на ранее проведенных исследованиях, представлены некоторые рекомендации относительно того, какой подход следует использовать на практике. В частности,

- **выбор копула-функций:** можно выбирать из нескольких альтернативных моделей для копула-функций ту, которая отвечает наименьшему значению информационного критерия Акаике, или основываясь на более сложных методах, таких, как тесты отношения псевдоправдоподобия, см. [Chen, Fan (2006)], байесовские методы, см. [Huang et al (2006)] (см. п. 6.8.1– 6.8.3).

- *критерии согласия для копула-функций* могут быть разделены на девять семейств (см. п. 6.9):
  - $\mathcal{A}_1$ : тесты, основанные на преобразовании Розенблатта,
  - $\mathcal{A}_2$ : тесты, основанные на эмпирических оценках копула-функций,
  - $\mathcal{A}_3$ : тесты, основанные на подходе  $\mathcal{A}_2$  и преобразовании Розенблатта,
  - $\mathcal{A}_4$ : тесты, основанные на эмпирических оценках копула-функций (другой принцип),
  - $\mathcal{A}_5$ : тесты, основанные на спирменовской функции зависимости,
  - $\mathcal{A}_6$ : тест, основанный на тесте Шиха (см. [Shih (1998)]) для двумерной модели Клейтона,
  - $\mathcal{A}_7$ : тест, основанный на внутреннем произведении векторов как на мере расстояния между ними,
  - $\mathcal{A}_8$ : тест, основанный на подходе  $\mathcal{A}_7$  и преобразовании Розенблатта,
  - $\mathcal{A}_9$ : тест, основанный на объединении указанных выше подходов;
- в работе [Berg (2009)] представлены результаты сравнения критериев согласия для копула-функций на смоделированных данных. Показано, что не существует подхода, который бы всегда превосходил по мощности любой другой из рассматриваемых подходов.

## Глава 7

# Анализ финансовых данных в задачах управления риском

### 7.1. Введение: имеющийся опыт и некоторые общие понятия

#### 7.1.1. Исторические примеры

За последние десятилетия объемы торговли на мировых финансовых рынках значительно выросли. В 1970 г. средний ежедневный объем торговли на Нью-Йоркской фондовой бирже составлял 3,5 миллиона акций. В 2002 г. он уже составил 1,4 миллиарда акций. В последние несколько лет мы наблюдаем существенное увеличение объемов торгов и на рынках производных ценных бумаг.

На финансовых рынках имеется огромное число игроков, которые занимают рискованные позиции, и для должной оценки своих позиций им необходимы количественные инструменты.

Недавние события показали ряд примеров, когда большие потери на финансовом рынке происходят, главным образом, из-за отсутствия надлежащего управления рисками.

Джерри Корриган, бывший президент Нью-Йоркского отделения Федеральной резервной системы США, в ходе ежегодной встречи Ассоциации банкиров штата Нью-Йорк, имевшей место в январе 1992 г., сказал: *«Вы все можете побиться об заклад, что нужно обратить очень серьезное внимание на забалансовую деятельность. Рост объемов и сложность [этой] деятельности и характер расчетного риска непогашения кредита, который они влекут за собой, должны стать для всех нас поводом для беспокойства. ...Я надеюсь, что это звучит как предупреждение, потому что так оно и есть. Забалансовая дея-*

тельность очень нужна, но она должна тщательно управляться и контролироваться, и она должна быть понятна как высшему исполнительному руководству, так и трейдерам и аналитикам». К сожалению, Джерри Корриган стал настоящей современной «Кассандрой».

• **Округ Ориндж (1994).** 6 декабря 1994 г. округ Ориндж, преуспевающий район в Калифорнии, объявил о банкротстве после того, как понес потери приблизительно в 1,6 млрд долл. из-за ошибочной сделки с процентными ставками, совершенной одним из крупнейших инвестиционных фондов этого округа. Роберт Сайтрон, казначей округа Ориндж и управляющий фондом, размер которого составлял 7,5 млрд долл., инвестировал средства в портфель (это были в основном процентные ценные бумаги), включавший в себя рискованные активы, приобретенные за счет заемных средств. Его стратегия зависела от краткосрочных процентных ставок, остававшихся на относительно низком уровне по сравнению со среднесрочными процентными ставками. Но с февраля 1994 г. Федеральный резервный банк США начал повышать процентные ставки, что вызвало падение цен многих активов в инвестиционном пуле фонда округа Ориндж. В течение почти всего 1994 г. Сайтрон игнорировал изменение процентных ставок и увеличивающиеся номинальные убытки в своем портфеле. Однако к концу 1994 г. требования на миллиарды долларов по поручительствам от контрагентов Сайтрона с Уолл-стрит, а также угроза массового снятия денег с депозитов напуганными инвесторами местного правительства создали ловушку ликвидности, которую он не смог преодолеть.

• **Банк Barings (1995).** Банк Barings имел долгую историю успешной работы и был весьма уважаемым коммерческим банком, уже длительное время проработавшим в Великобритании. Но в феврале 1995 г. этот высоконадежный банк с капиталом в 900 млн долл. потерпел банкротство из-за 1 млрд долл. торговых убытков по несанкционированным операциям. Как же такое могло произойти? Трейдер Ник Лисон должен был использовать возможности низко-рисковых арбитражных операций, которые усилили бы различия в ценах сходных производных ценных бумаг на Сингапурской валютной бирже (Simex) и бирже в Осаке. Фактически же он занимал намного более рискованные позиции, покупая и продавая контракты разного типа на различные суммы на двух этих биржах. Из-за халатности со стороны высшего руководства Лисон получил контроль над функциями как торгового подразделения, так и бэк-офиса. Когда потери Лисона увеличивались, он повышал ставки. Однако после того как произошло землетрясение в Японии и индекс Nikkei резко снизился, его потери быстро выросли и составили более 1 млрд долл. Это были слишком большие убытки для банка, с которого он не сумел справиться; в марте 1995 г. банк Barings был куплен

голландским банком ING всего за один английский фунт стерлингов.

- **Банк Daiwa (1995).** Трейдер Тосихиде Игучи из банка Daiwa в Нью-Йорке подделывал подтверждения на продажу ценных бумаг, принадлежавших его клиентам. Соккрытие информации этим недобросовестным трейдером о потерях за более чем 11 лет послужило причиной убытков в 1,1 млрд долл., что привело к банкротству банка в 1995 г.

- **Банк Sumimoto (1996).** Неучтенные убытки за три года, допущенные трейдером Ясуо Хаманакой, занимавшимся торговлей медью, привели к убыткам величиной более чем 2,6 млрд долл. к концу июня 1996 г.

- **LTCM (1998).** В 1994 г. был основан хедж-фонд под названием Long-Term Capital Management, в нем собралась команда успешных трейдеров и ученых. Инвесторы и инвестиционные банки вложили около 1,3 млрд долл. в этот фонд, и спустя два года ежегодная доходность на капитал составила почти 40%. В начале 1998 г. номинальная стоимость активов достигла 4 млрд долл., но в конце года фонд потерял существенную долю акционерного капитала, и фонд находился на грани дефолта. Федеральная резервная система США сумела предпринять пакет спасательных мер, расходував 3,5 млрд долл., чтобы избежать угрозы системного кризиса в мировой финансовой системе.

- **Allied Irish Bank («Элайд Айриш Бэнк», «Объединенный Банк Ирландии»)** (2002). Трейдер Джон Раснак накопил убытки на спотовом и форвардном \$/Yen рынках, скрывая их путем регистрации поддельных опционов, возмещающих сумму его обязательств (он выписывал опционы, которые «глубоко в деньгах», не регистрируя их). К февралю 2002 г. потери составили более чем 750 млн долл.

- **Национальный Банк Австралии (2004).** Четыре трейдера маскировали свои убытки с октября 2003 г. на позициях по австралийскому доллару на рынке Fogex с помощью фиктивных сделок. Конечные убытки составили более чем 277 млн долл.

- **Société Générale (банк «Сосьетэ Женераль»)** (2008). 24 января 2008 г. банк объявил, что один трейдер (Jerome Kerviel, Жером Кервель), торговавший фьючерсами, мошенническим путем нанес банку ущерб в размере 4,9 млрд евро (это эквивалентно 7,2 млрд долл.), что стало наибольшим убытком в истории жульничеств подобного типа. Руководители банка сообщали, что трейдер действовал в одиночку и что он, возможно, не извлек прямую выгоду из своих мошеннических сделок. Помощник президента Франции Раймон Суби (Raymond Soubie) заявил, что Кервель имел отношение к сделкам по фьючерсам общей стоимостью 73,3 млрд долл. (что больше, чем рыночная капитализация банка, составляющая 52,6 млрд долл.).



органами правопорядка, все еще продолжается, и детали пока неизвестны, но предполагаемые масштабы мошенничества намного больше, чем сделки Ника Лисона, который разорил Банк Barings.

### 7.1.2. Регуляторный капитал и Базельский комитет по банковскому надзору

Чтобы быть в состоянии покрыть большую часть финансовых убытков, многие банки и финансовые учреждения откладывают необходимый капитал, также называемый *регуляторным капиталом*. Величина необходимого капитала, конечно, связана с величиной риска, взятой на себя банком или финансовым учреждением, т. е. с распределением доходов и убытков. Эта величина регламентируется законом, а национальные надзорные органы следят за тем, чтобы банки и финансовые учреждения следовали этим правилам. Одновременно с этим прилагаются усилия по разработке международных стандартов и методик для расчета регуляторного капитала. Это основная задача так называемого *Базельского комитета по банковскому надзору (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS))*. Базельский комитет, основанный в 1974 г., не обладает формальными наднациональными надзорными полномочиями, и его заключения не имеют юридической силы.

BCBS состоит из председателей национальных банков стран G-10 плюс Люксембург, Швейцария и является подкомитетом содействия при Банке международных расчетов (Bank for International Settlements (BIS)). Он формулирует (юридически ни к чему не обязывающие) стандарты банковского надзора для:

- содействия безопасности и прочности глобальной финансовой системы;
- создания равных условий для всех международных финансовых организаций;
- установки минимальных требований для основных финансовых институтов;
- расчета минимального достаточного капитала для банков, действующих на международном уровне.

BCBS формулирует стандарты, основополагающие принципы надзора и дает основанные на передовом опыте рекомендации по осуществлению деятельности в банках и других финансовых организациях. Таким образом, базельский комитет имеет сильное влияние на национальные надзорные органы. Кратко об истории базельских соглашений.

- **Базель I (1988)**. Первое базельское соглашение по банковскому надзору стало важным шагом к созданию международных стандартов по расчету достаточности капитала. Основное внимание в соглашении

сосредоточено на определении структуры капитальной базы на основе уровня риска для активов с кредитным риском.

● **Поправка к Первому базельскому соглашению (1996)** предписывает так называемую стандартизированную модель для рыночного риска с возможностью выбора для больших банков использовать внутренние модели так называемых границ потерь уровня  $\alpha^1$ . Кроме того, предписываемая модель учитывала риски по Foreign и риски торговых портфелей.

● **Базель II (2001–2012)**. В 2001 г. были начаты консультации по новому базельскому соглашению, основными темами которых было обсуждение передового опыта описания кредитного риска, а также обсуждение подходов к расчету достаточности капитала для операционного риска. Последние изменения в документации были сделаны в ноябре 2007 г. Регуляторы большинства юрисдикций мира планируют разработать и внедрить новое соглашение, где будет учтена разница в часовых поясах и определены более формальные методологии. Европейский союз уже внедрил подобное соглашение, оно называется Директивой ЕС достаточности капитала. Многие европейские банки уже сообщили о своих коэффициентах достаточности капитала согласно новой директиве. К 2008 г. все кредитные учреждения из стран — членов BCBS полностью перешли к работе в соответствии с вышеупомянутой директивой. Подробное обсуждение основ моделей оценки рисков, заложенных в соглашении Базель II, можно найти в книге [Алексеров и др. (2010)]. Рекомендации Базель II нашли свое отражение в таких документах Банка России, как письмо 192-Т от 29 декабря 2012 г. (посвященное первому из трех компонентов Базель II об оценке кредитных рисков) и письмо 96-Т от 29 июня 2011 г. (раскрывающее принципы оценки экономического капитала в рамках второй компоненты Базель II).

● **Базель III (2011–2013)**. В ответ на мировой финансовый кризис 2007–2009 гг. эксперты BCBS подготовили свод предложений по повышению финансовой устойчивости кредитных учреждений. Все рекомендации были разделены на два блока: касающиеся требований к капиталу (соответствующий документ был опубликован в июне 2011 г.) и касающиеся ограничения риска ликвидности (последние обновления были опубликованы в январе 2013 г.). Предложения по структуре капитала включают следующие: отказ от капитала третьего уровня, введенного в Базель II для краткосрочного субординированного долга; выделение в капитале первого уровня базового капитала и переопределение мини-

<sup>1</sup>В англоязычной версии этот показатель называется Value at Risk уровня  $\alpha$  ( $VaR_\alpha$ ).

мальных порогов для уровней капитала (4,5% и вместо 2% и 4% соответственно); введение трех надбавок к минимальному требованию достаточности капитала (8%) для обеспечения рисков системнозначимых финансовых организаций (до 3,5%), для ограничения проциклических эффектов в виде контрциклического буфера (до 2,5%), для создания дополнительного обеспечения в виде консервирующего буфера (до 2,5%). В части требований по ликвидности были предложены общемировые показатели краткосрочной (до одного месяца) и долгосрочной (до одного года) ликвидности — показатели Liquidity Coverage Ratio (LCR) и Net Stable Funding Ratio (NSFR). Дополнительно эксперты BCBS обязали системно значимые банки разработать планы самооздоровления, чтобы с минимальными потерями такие организации могли пройти очередной кризис, и планы ликвидации, чтобы в случае банкротства минимизировать негативные последствия на уровне всей финансовой системы. Рекомендации Базель III уже внедрены Банком России по средствам публикации положения 395-П от 28 декабря 2012 г. о новых требованиях к капиталу, определяющих новые нормативы Н1.1 и Н1.2 в дополнение к существовавшему Н1 (теперь Н1.0) и письма 193-Т от 29 декабря 2012 г.

### 7.1.3. Типы рисков

Риск для организации в общих словах можно определить как любое событие или действие, которое может неблагоприятно повлиять на эту организацию в достижении обязательств и следовании ее стратегии. В финансовом риск-менеджменте мы можем разделить большинство рисков на пять категорий.

- **Рыночный риск.** Рыночный риск — это риск того, что изменения цен и ставок (курсы акций, обменные курсы, процентные ставки, цены на сырьевые товары) на финансовом рынке ослабят позиции банка. Рыночный риск капитала часто измеряется относительно эталонного индекса или портфеля ценных бумаг. В этом случае его называют «риском относительно отслеживания ошибки».

- **Кредитный риск.** Кредитный риск — это риск того, что надежность контрагента отразится на положении банка (кредитный риск контрагента). Способность контрагента отвечать по долговым обязательствам определяет надежность контрагента, которая определяется вероятностью невыполнения обязательств и ожидаемой нормой восстановления. Невыполнение обязательств происходит тогда, когда контрагент не желает или неспособен выполнить свои обязательства по контракту. Это экстремальная ситуация.

Кредитный риск возникает только тогда, когда обязательства контрагента являются активом, т. е. они имеют положительную восстановительную стоимость. Если контрагент отказывается выполнять обязательства, убыток может составить общую рыночную стоимость этих обязательств или некоторый процент от этой величины (называемый убытком из-за невыполнения обязательств). Процент от общей рыночной стоимости, который должен быть возмещен, называется нормой восстановления.

● **Риск потери ликвидности.** Мы различаем два связанных друг с другом типа риска потери ликвидности: *риск финансовой ликвидности* и *риск торговой ликвидности*. Риск финансовой ликвидности связан со способностью финансовых организаций находить необходимые средства в достаточном объеме для рефинансирования долгов, удовлетворения потребности в наличных средствах, в марже, дополнительных требований контрагентов, а также для осуществления выплаты при изъятии капитала. Другими словами, риск потери ликвидности — это риск недостаточности наличных средств для поддержания нормальной хозяйственной деятельности.

Риск торговой ликвидности — риск того, что организация не сможет осуществлять торговые операции на рынке с преобладающей рыночной ценой, потому как отсутствует интерес к заключению сделок с этой организацией со стороны участников рынка (неликвидный рынок).

● **Операционный риск** — риск потерь в результате неадекватной работы внутренних процессов, ошибочных действий персонала и систем или внешнего воздействия. В него входят *человеческие риски*, такие как некомпетентность и мошенничество; *процессные риски*, такие как риск контроля сделок и риск операционного контроля; а также *технологический риск сбоя систем*, ошибок программирования и т.д. Операционный риск может повлечь за собой рыночный и кредитный риски.

● **Юридический риск.** Юридический риск — это риск, являющийся результатом неопределенности из-за судебных исков или неопределенности, связанной с применимостью или трактовкой контрактов, законов и инструкций. Источники юридического риска включают в себя: проблемы кредитоспособности и обеспечения исполнения, так же как проблемы законности финансовых инструментов и их подверженность непредвиденным изменениям законов и инструкций. Юридический риск связан с кредитным риском, поскольку контрагенты могут найти юридические основания для того, чтобы лишить сделку законной силы.

Как мы видим из данных выше определений, описанные категории риска не вписываются в четкие, отделенные друг от друга классы.

Операционный риск может создать рыночный и кредитный риск и на-

оборот. Вот почему важно рассматривать финансовые риски с точки зрения компании в целом. Управление совокупным риском обеспечивает общую и последовательную картину риска в деятельности компании. Для этого требуется измерять риск во всех подразделениях компании и по всем факторам риска, с использованием согласованных методик, систем и данных. Учитывая значимость всего этого для финансовых учреждений, мы сосредоточим внимание на управлении рыночным, кредитным и операционным рисками. Для получения более подробной информации о рисках ликвидности, юридических рисках, а также управлении совокупным риском мы обращаем ваше внимание на работу [Jorion (2007)].

## 7.2. Управление рыночным риском

### 7.2.1. Меры риска: определения и свойства

Мера риска необходима:

- для определения *рискового капитала*, т. е. определения капитала, необходимого финансовому учреждению для покрытия неожиданных убытков;

- как *инструмент управления* — это означает, что мера риска используется менеджментом для того, чтобы оценивать и контролировать уровень риска, свойственный тем или иным подразделением компании.

Задача определения подходящей меры риска  $\Psi$  всегда была особенно важной как с теоретической точки зрения, так и с практической. Существуют подходы к ее определению, предложенные в статье [Artzner, Delbaen, Eber и Heath (1999)] (далее мы будем ссылаться на эту работу, используя сокращение [ADEH (1999)]), которые в настоящее время приняты ученым сообществом, но еще не всеми специалистами в области финансов.

Для простоты и финансовой целесообразности, мы будем иметь дело с изменением цены некоторого финансового актива за один шаг  $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$  (мы предпочитаем использовать  $\Delta P_t$ , а не  $P_t$ , поскольку понятие риска  $\Psi$  интуитивно ассоциируется с доходами и убытками). Мы могли бы использовать нетто-доходности (определяемые как  $\Delta P_t/P_{t-1}$ ), но обычно удобнее использовать меру риска, которая измеряет убытки в денежных единицах. Впрочем, мы также рассмотрим примеры с использованием нетто-доходностей и лог-доходностей.

Сформулируем и обсудим свойства, которыми должны обладать меры риска  $\Psi$  как функции от  $\Delta P_t$ .

Если мы определяем  $\Psi(\Delta P_t)$  как меру риска  $\Delta P_t$ , то в статье ADEH утверждается, что величина  $\Psi(\Delta P_t)$  должна обладать следующими

• **Трансляционная инвариантность.** Пусть даны случайная величина  $\Delta P_t$ , безрисковая процентная ставка  $r$  ( $r \in [0; 1)$ ) и некоторая константа  $\theta_r \in R$ , тогда

$$\Psi(\Delta P_t + \theta_r r) = \Psi(\Delta P_t) - \theta_r. \quad (7.1)$$

• **Субаддитивность.** Пусть даны изменения цен (или доходностей) двух финансовых активов  $\Delta P_{t,1}$ ,  $\Delta P_{t,2}$ , тогда имеет место неравенство

$$\Psi(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) \leq \Psi(\Delta P_{t,1}) + \Psi(\Delta P_{t,2}). \quad (7.2)$$

• **Положительная однородность.** Пусть дана случайная величина  $\Delta P_t$  и неотрицательная константа  $\lambda$ , тогда

$$\Psi(\lambda \Delta P_t) = \lambda \Psi(\Delta P_t). \quad (7.3)$$

• **Монотонность.** Пусть даны изменения цен (или доходностей) двух финансовых активов  $\Delta P_{t,1}$ ,  $\Delta P_{t,2}$ , такие что  $\Delta P_{t,1} \leq \Delta P_{t,2}$ , тогда

$$\Psi(\Delta P_{t,2}) \leq \Psi(\Delta P_{t,1}). \quad (7.4)$$

Первое свойство говорит о том, что, если мы прибавим детерминированную компоненту (безрисковый актив) к случайной величине, то мера риска уменьшится на величину, инвестируемую в безрисковый актив.

Второе свойство требует, чтобы мера риска портфеля, состоящего из двух активов, ( $\Psi(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2})$ ), была не больше, чем сумма мер риска каждого из составляющих портфель активов. Субаддитивность гарантирует, что объединение позиций уменьшит общий риск.

Третье свойство говорит о том, что если мы увеличим сумму, которая инвестирована в актив  $P_t$ , то мера риска также должна увеличиться. В частности, эта гипотеза требует, чтобы риск увеличивался пропорционально увеличению инвестируемой суммы.

Отметим, что если выполнены свойства трансляционной инвариантности и положительной однородности, то для любого действительного  $\theta$  и заданной безрисковой ставке  $r$  имеем:

$$\Psi(-\theta_r r) = \theta_r.$$

Кроме того, если мы воспользуемся свойством положительной однородности, взяв  $\lambda = 2$ , то получим следующее равенство:

$$\Psi(\Delta P_t + \Delta P_t) = \Psi(\Delta P_t) + \Psi(\Delta P_t),$$

которое показывает, что инвестирование равной суммы в другой, пол-  
 Скопировано с сайта <http://учебник.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.рф>  
 ностью коррелированный с первым актив удваивает риск портфеля. Из

последнего равенства следует, что в данном случае свойство субаддитивности выполнено со знаком равенства.

Наконец, последнее свойство выражается в том, что если актив  $A$  дает всегда более высокий доход, чем актив  $B$ , то мера риска должна показать нам, что инвестирование средств в актив  $A$  выгоднее, чем в  $B$ . Другими словами, убытки, которым мы можем подвергнуться, инвестируя средства в актив  $A$ , должны быть меньше, чем убытки, которым мы можем подвергнуться, инвестируя средства в  $B$ . Конечно, если  $A$  всегда выгоднее, чем  $B$ , мы имеем так называемый *арбитраж*, и хорошая мера риска должна указать на это.

Мера, которая удовлетворяет всем четырем перечисленным выше свойствам, называется *согласованной мерой риска* (*a coherent risk measure*). Любую меру, для которой не выполняется хотя бы одно из этих свойств, нельзя рассматривать как согласованную меру риска.

### 1) Ни дисперсия, ни стандартное отклонение не являются согласованными мерами риска

Теперь мы хотим выяснить, является ли дисперсия  $\Psi(\Delta P_t) = \text{Var}(\Delta P_t)$ , а также стандартное отклонение  $\Psi(\Delta P_t) = \sqrt{\text{Var}(\Delta P_t)}$ , согласованными мерами риска. Для этого мы должны проверить, удовлетворяют ли эти функции свойствам (7.3.2.)–(7.10).

• **Трансляционная инвариантность.** Мы должны вычислить

$$\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r r)$$

и

$$\sqrt{\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r r)}.$$

Поскольку величина  $\theta_r r$  детерминированна, немедленно получаем, что справедливы равенства:

$$\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r r) = \text{Var}(\Delta P_t)$$

и

$$\sqrt{\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r r)} = \sqrt{\text{Var}(\Delta P_t)},$$

из которых следует, что свойство трансляционной инвариантности (7.3.2.) для дисперсии и стандартного отклонения не выполняется. Хотя на этом мы могли бы завершить наш анализ, но ради интереса мы проверим оставшиеся три свойства.

• **Субаддитивность.** Дисперсия суммы изменений цен (или доходностей) двух активов может быть представлена как

а ковариация равна

$$Cov(\Delta P_{t,1}, \Delta P_{t,2}) = \sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} \cdot \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})} \cdot \rho,$$

где  $\rho$  — коэффициент корреляции. Так как коэффициент корреляции по модулю меньше или равен единице, то верно неравенство

$$Cov(\Delta P_{t,1}, \Delta P_{t,2}) \leq \sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} \cdot \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})},$$

воспользовавшись которым, получаем

$$\begin{aligned} Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) &\leq Var(\Delta P_{t,1}) + Var(\Delta P_{t,2}) + \\ &+ 2\sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} \cdot \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})} \Rightarrow Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) \leq \\ &\leq (\sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} + \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})})^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2})} \leq \sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} + \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})}.$$

Таким образом, стандартное отклонение — это субаддитивная функция.

Дисперсия, тем не менее, не является субаддитивной функцией, так как для нее свойство субаддитивности выполняется тогда и только тогда, когда  $\rho \leq 0$ , что неверно в общем случае.

• **Положительная однородность.** Доказательство того, что стандартное отклонение удовлетворяет этому свойству, тривиально:

$$\sqrt{Var(\lambda \Delta P_t)} = \sqrt{\lambda^2 Var(\Delta P_t)} = \lambda \sqrt{Var(\Delta P_t)}.$$

Следовательно, стандартное отклонение обладает свойством положительной однородности.

Однако для дисперсии это свойство не выполняется. Докажем это, предположив противное: пусть даны  $\Delta P_t$  и неотрицательная константа  $\lambda$ , тогда в соответствии со свойством (7.3)

$$Var(\lambda \Delta P_t) = \lambda Var(\Delta P_t).$$

Но в силу свойств дисперсии

$$Var(\lambda \Delta P_t) = \lambda^2 Var(\Delta P_t),$$

поэтому

$$Var(\lambda \Delta P_t) = \lambda Var(\Delta P_t) = \lambda^2 Var(\Delta P_t).$$

Откуда следует, что, с учетом  $Var(\Delta P_t) > 0$ , величина  $\lambda$  должна удовлетворять квадратному уравнению





## 2) Теорема о представлении

Так как дисперсия не является согласованной мерой риска, мы можем задаться вопросом: имеют ли согласованные меры некоторую специфическую форму? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (см. [ADEH (1999)]):

**Теорема 7.1.**  $\Psi(\Delta P_t)$  является согласованной мерой риска тогда и только тогда, когда существует семейство вероятностных законов  $\mathbf{P}$ , таких, что<sup>2</sup>

$$\Psi(\Delta P_t) = - \inf \left\{ E^P \left[ \frac{\Delta P_t}{1+r} \right] \mid P \in \mathbf{P} \right\}.$$

Доказательство этой теоремы читатель найдет в [ADEH (1999)].

Отметим некоторые важные аспекты:

- во-первых, усредняется прибыль (или убыток) рискованного актива с учетом безрисковой процентной ставки;

- во-вторых, возможность выбирать вероятностный закон из семейства  $\mathbf{P}$  позволяет создавать бесконечно много согласованных мер риска. Этот результат имеет как положительный аспект, так как можно выбирать наиболее подходящую меру риска, так и отрицательный аспект, поскольку выбор меры риска становится субъективным выбором риск-менеджера;

- в-третьих, результат теоремы получен для случая одного периода. В работе [Riedel (2004)] он обобщен на многопериодный случай с учетом всех возможных потоков наличности  $\delta(s)$ , которые могут возникнуть между моментами времени  $t$  и  $T$ . Рассматривая капитализацию в дискретном времени, он получает следующий, более общий, результат:

$$\Psi_t(\delta) = - \inf \left\{ E^P \left[ \sum_{s=t}^T (1+r)^{t-s} \delta(s) \right] \mid P \in \mathbf{P} \right\},$$

т. е. мы вычисляем ожидаемое значение всех потоков наличности, дисконтированных в соответствии с безрисковой ставкой процента  $r$ .

Отметим очень простое, но весьма любопытное следствие предыдущей теоремы.

**Теорема 7.2.** Любая выпуклая линейная комбинация согласованных мер риска — снова согласованная мера риска.

<sup>2</sup>Под  $E^P \xi$  понимается среднее значение случайной величины  $\xi$ , подчиняющейся закону распределения вероятностей  $P$ .  
 Скопировано с сайта <http://www.yurinform2000.ru> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

Пусть мы имеем  $n$  мер риска  $\Psi_j(\Delta P_t)$  (где  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). Возьмем  $n$  положительных констант  $c_j$ , сумма которых равна единице. Тогда результирующая мера

$$\widehat{\Psi}(\Delta P_t) = \sum_{j=1}^n c_j \Psi_j(\Delta P_t)$$

будет согласованной мерой риска.

### 3) Средние ожидаемые потери уровня $\alpha$ (СОП $_{\alpha}$ ) как согласованная мера риска<sup>3</sup>

Вводимая в данном разделе характеристика — «средние ожидаемые потери уровня  $\alpha$ » (СОП $_{\alpha}$ ) измеряет среднее значение потерь доли  $\alpha$  худших результатов, которые мы можем получить от инвестиций. Очевидно, при  $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$  эта величина должна принимать отрицательные значения. Однако при определении и интерпретации меры риска как монотонно неубывающей функции потерь нам удобнее оперировать с потерями как с положительными величинами. Читатель должен принять во внимание это замечание при усвоении последующего материала. Перед тем как мы дадим формальное определение СОП $_{\alpha}$ , рассмотрим следующие характеристики.

Предположим, что случайная величина  $\Delta \hat{P}_t = \Delta P_t / (1 + r)$  имеет функцию плотности  $f(\Delta \hat{P}_t)$ , которая непрерывна на всей действительной оси. Для простоты и без ограничения общности мы рассмотрим случай, когда  $r = 0$ , так что  $\Delta \hat{P}_t = \Delta P_t$ . Тогда кумулятивная функция распределения случайной величины  $\Delta P_t$  в точке  $x$  имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Заметим, что, в силу существования плотности  $f(\Delta \hat{P}_t)$ , функция распределения  $F(\Delta P_t)$  непрерывна.

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = \alpha,$$

где  $\alpha$  — константа, принадлежащая интервалу  $(0; 1)$ . В силу непрерывности функции  $F$  для любого  $\alpha \in (0; 1)$  будет существовать хотя бы одно решение этого уравнения.

<sup>3</sup> В англоязычной литературе этот показатель называется «The Expected Shortfall»  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru/> Разработка электронных библиотек  
<https://право.информ2000.ru/>

Если функция  $F$  строго возрастает, то она обратима (причем, обратная функция будет также непрерывной), а значит, решение уравнения единственно и дается формулой

$$\gamma = F^{-1}(\alpha).$$

Если же функция  $F$  не является строго возрастающей, мы можем воспользоваться понятием обобщенного обращения (или обобщенного квантиля), в соответствии с которым

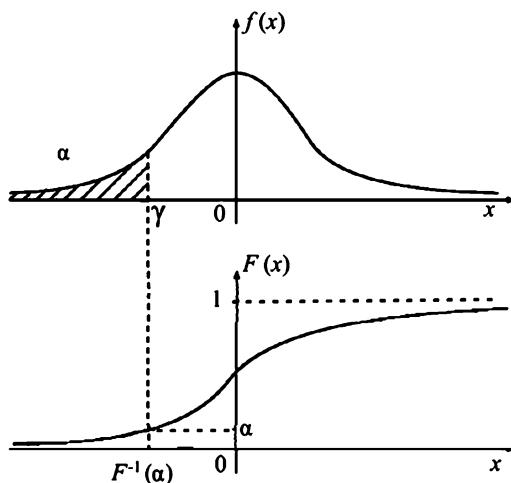
$$F^{-1}(\alpha) = \sup\{x | F(x) \leq \alpha\},$$

так что величина

$$\gamma = \sup\{x | F(x) \leq \alpha\}$$

будет решением уравнения.

На рис. 7.1 изображен пример функции плотности, кумулятивная функция распределения, построенная по этой плотности, и функция, обратная к кумулятивной функции распределения.



**Рис. 7.1.** Функция плотности, кумулятивная функция распределения и обратная функция

Теперь может быть определена величина  $СОП_\alpha$  для  $\alpha \in (0; 1]$ .

**Определение 7.1.** Средние ожидаемые потери уровня  $\alpha$  для случайной величины  $\Delta P_t$  с функцией распределения  $F$  (обозначаются  $СОП_\alpha(\Delta P_t)$ ) — это среднее значение доли  $\alpha$  худших потерь, взятое со знаком минус:

$$СОП_\alpha(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(z) dz. \tag{7.5}$$

Для  $\text{СОП}_\alpha$  выполнены свойства трансляционной инвариантности, положительной однородности и монотонности, что легко следует из свойств квантилей. Выполняется и свойство субаддитивности, однако его доказательство значительно более сложно (см. [Acerbi, Tasche (2002)]). Таким образом,  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  — согласованная мера риска!

Если в выражении (7.5) устремить  $\alpha$  к нулю, то, используя правило Лопиталя, мы получим:

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(z) dz}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha} = \\ &= -\lim_{\alpha \rightarrow 0} F^{-1}(\alpha) = -F^{-1}(0) \equiv \text{СОП}_0(\Delta P_t),\end{aligned}$$

т. е.  $\text{СОП}_0(\Delta P_t)$  — наибольший убыток, который можно получить для случайной величины  $\Delta P_t$ . Если функция плотности  $f$  непрерывна и положительна на всей отрицательной действительной полуоси, как это представлено на рис. 7.1, то  $\text{СОП}_0(\cdot) = +\infty$ . Отметим еще один важный факт, касающийся  $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t)$ :

$$\text{СОП}_1(\Delta P_t) = -\int_0^1 F^{-1}(z) dz = -\mathbf{E}[\Delta P_t].$$

Последнее равенство мы получили, воспользовавшись заменой переменных

$$y = F^{-1}(z) \Rightarrow F(y) = z \Rightarrow f(y)dy = dz,$$

в интеграле

$$\text{СОП}_1(\Delta P_t) = -\int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(1)} y f(y) dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy \equiv -\mathbf{E}[\Delta P_t].$$

В случае, когда  $\alpha \in (0; 1)$ , воспользовавшись этой заменой, получим

$$\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(z) dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(\alpha)} y f(y) dy = -\frac{1}{F(\gamma)} \int_{-\infty}^{\gamma} y f(y) dy.$$

Таким образом, мы определили меру риска  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  для любого  $\alpha \in [0; 1]$ .

**Пример 7.1.**  $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t)$  для случайной величины  $\Delta P_t$ , равномерно распределенной на интервале  $(a; b)$ .

Функция плотности случайной величины  $\Delta P_t$ , распределенной равномерно на интервале  $(a; b)$ , как известно, задается соотношением:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & y \in (a; b); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Соответствующая ей кумулятивная функция распределения равна

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \begin{cases} 1, & x \geq b; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и обратная функция для функции  $F$  равна

$$F^{-1}(\alpha) = a + \alpha(b - a),$$

где  $\alpha \in [0; 1]$ . Тогда для  $\alpha \in (0; 1]$

$$\begin{aligned} \text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(x)dx = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (a + x(b - a))dx = -a - \frac{1}{2}\alpha(b - a). \end{aligned}$$

Если  $\alpha = 0$ , то  $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = -a$  ( $\text{СОП}_0(\Delta P_t)$  положительны, если  $a$  отрицательно). Кроме того,  $\text{СОП}_1(\Delta P_t) = -\frac{a+b}{2}$ , т.е.  $\text{СОП}_1(\Delta P_t)$  равно среднему значению  $\Delta P_t$ , взятому с обратным знаком.

#### 4) Спектральные меры риска

В предыдущем разделе  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  было определено как среднее значение потерь доли  $\alpha$  худших результатов, которые мы можем получить от инвестиций. Однако вместо того, чтобы вычислять среднее значение, мы можем рассмотреть взвешенное среднее значение, тем самым обобщая  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ .

Обозначив весовую функцию через  $\varphi(z)$  (которая определена на отрезке  $[0; 1]$ ), введем понятие спектральной меры.

**Определение 7.2.** Мера риска  $M_\varphi(\Delta P_t)$  называется спектральной, если

$$M_\varphi(\Delta P_t) = - \int_0^1 \varphi(z)F_{\Delta P_t}^{-1} dz,$$

где  $F_{\Delta P_t}^{-1}(z)$ , как и прежде, функция, обратная к функции распределения случайной величины  $\Delta P_t$ .

Величину  $\varphi(z)$  еще называют спектром риска или функцией неприязни к риску ("the risk-aversion function").

Легко видеть, что  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  при  $\alpha \in (0; 1]$  — спектральная мера риска, спектр риска которой  $\varphi(z)$  — разрывная функция, принимающая значение 0 для прибылей или небольших убытков и постоянное неотрицательное значение для больших убытков. Если более формально, то для спектра риска меры  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  мы определяем  $\varphi(z)$  с помощью индикаторной функции множества:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_{\{z < \alpha\}},$$

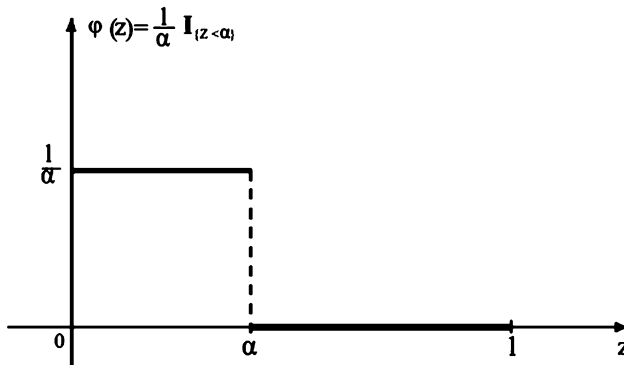
где  $\mathbf{I}_{\{z < \alpha\}} = \begin{cases} 1, & z < \alpha \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Возникает вопрос: всегда ли спектральная мера является согласованной мерой риска? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (см. [Acerbi (2002)]).

**Теорема 7.3.** *Спектральная мера согласованна тогда и только тогда, когда*

- $\varphi(z)$  неотрицательна;
- $\varphi(z)$  невозрастающая;
- $\int_0^1 \varphi(z) dz = 1$ .

Следовательно, если мы хотим доказать, что  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  для  $\alpha \in (0; 1]$  является согласованной мерой риска, то нам необходимо проверить три условия из теоремы 7.3. Вместо того чтобы проверять эти условия алгебраически, мы предпочитаем дать более наглядный ответ, используя графическое представление спектра  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ , приведенного на рис. 7.2:



**Рис. 7.2.** Графическое представление спектра  $\text{СОП}(\cdot)$

Можно заметить, что спектр  $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$  нигде не принимает отрицательных значений, нигде не возрастает и его интеграл по отрезку  $[0; 1]$ , скопировано с сайта [http://uchebniki.info/2000/финансы/финансы\\_04\\_01\\_2000.pdf](http://uchebniki.info/2000/финансы/финансы_04_01_2000.pdf) графически определяемый как площадь под графиком, равен 1. Разработка электронных библиотек <http://www.pravc.info/2000.pdf>

Отметим, что первые два условия из теоремы 7.3 отражают несклонность к риску. В соответствии с этими условиями, весовые коэффициенты, отвечающие большим убыткам, должны быть не меньше, чем весовые коэффициенты, отвечающие меньшим убыткам.

Из рисунка 7.2 видно, что инвестор, использующий  $СОП_\alpha(\cdot)$ , приписывает одинаковые веса всем убыткам, бóльшим, чем определенный порог, в то время как меньшим потерям и прибылям он приписывает нулевые веса. Однако эта мера не является «идеальной» спектральной мерой, потому что она несовместима с теорией неприятия риска. Если мы имеем «идеальную» функцию неприятия риска, то веса, соответствующие этой функции, должны убывать гладко, и скорость этого убывания связана со степенью неприятия риска следующим образом: чем больше инвестор не расположен к риску, тем быстрее будут убывать веса с ростом аргумента  $z$ .

Таким образом, чтобы получить спектральную меру риска, инвестор должен выбрать подходящую для себя функцию неприятия риска. Этот выбор субъективен, но в нем можно руководствоваться исследованиями по теории функций полезности. Обращаем ваше внимание на статью [Aserbi (2004)] и на имеющиеся в ней ссылки для более подробной информации о теории полезности.

### 5) Граница потерь уровня $\alpha$ ( $ГП_\alpha$ )<sup>4</sup>

$ГП_\alpha$  определяется следующим образом:

**Определение 7.3.** *Граница потерь уровня  $\alpha$  ( $ГП_\alpha$ ) — это минимальные потери в доле  $\alpha$  всех худших результатов.*

Пусть  $\Delta P_t$  — случайная величина, описывающая доходы/убытки, с функцией распределения  $F$ . При заданном уровне  $\alpha$  и при условии, что  $F$  строго возрастающая и обратимая функция,  $ГП_\alpha$  — это величина потери  $\gamma$ , равная

$$\gamma = -F^{-1}(\alpha).$$

Другими словами,  $ГП_\alpha$  — это квантиль функции распределения убытков/доходов, взятый со знаком «минус» (объяснение появления знака «минус» в этом определении было дано выше). Если функция  $F$  не является обратимой, то мы воспользуемся понятием обобщенного обращения (или обобщенного квантиля):

$$F^{-1}(x) = \sup\{x | F(x) \leq \alpha\},$$

таким образом,

$$\gamma = -\sup\{x | F(x) \leq \alpha\}.$$

<sup>4</sup>Как уже было отмечено, в англоязычной литературе этот показатель называется «The Value at Risk» и обозначается  $VaR_\alpha$ .  
 Скопировано с сайта: <http://учебник.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>



$\Gamma\Pi_\alpha$  — это не величина убытка, который мы можем получить, а это уровень убытков, который будет превышен с определенной вероятностью, установленной априорно. Подобно  $\text{СОП}_\alpha$ ,  $\Gamma\Pi_\alpha$  — спектральная мера с функцией неприятия риска  $\varphi(z)$ , имеющей вид невырожденной *дельта-функции Дирака*, которая придает убытку  $\gamma$  (см. рис. 7.3) бесконечный вес, а всем другим возможным убыткам/доходам — нулевой вес. Напомним, что дельта-функция Дирака определяется как функция, равная нулю на всей действительной оси, кроме 0, где она равна бесконечности, при этом ее интеграл равен 1.

Если мы положим

$$\varphi(z) = \text{Dirac}(z - \alpha),$$

то получим:

$$\Gamma\Pi_\alpha = - \int_0^1 \text{Dirac}(z - \alpha) F^{-1}(z) dz = -F^{-1}(\alpha). \quad (7.6)$$

В выражении (7.6) мы воспользовались функцией Дирака, которая аккумулирует всю плотность в точке  $\alpha$  (функция не равна нулю только при  $z = \alpha$ ). Спектр  $\Gamma\Pi_\alpha$  представлен на рис. 7.3.

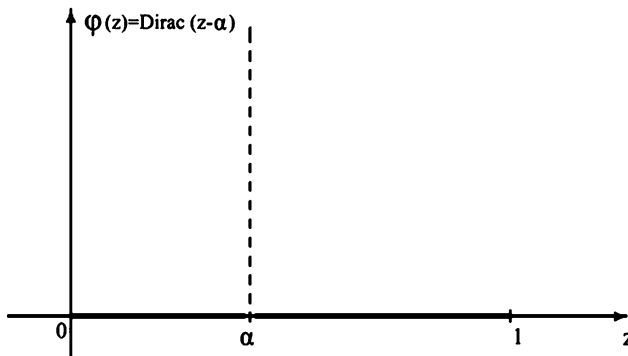


Рис. 7.3. Графическое представление спектра меры  $\Gamma\Pi_\alpha$

Воспользовавшись теоремой 7.3, получаем, что  $\Gamma\Pi_\alpha$  не является *согласованной мерой риска*, так как, хотя спектр меры неотрицателен и его интеграл по отрезку  $[0; 1]$  равен единице (в соответствии с определением функции Дирака), ее спектр не является невозрастающей функцией: формально он сначала возрастает, а затем убывает.

Можно спросить: какое именно условие в определении согласованной меры риска не выполняется? Ответ: для  $\Gamma\Pi_\alpha$  *не выполняется свойство субаддитивности*. Таким образом, можно составить два портфеля так, что

### Пример 7.2. Несубаддитивность $ГП_\alpha$ .

Предположим, имеется объединенный портфель, составленный из портфеля трейдера А и портфеля трейдера Б. Портфель трейдера А состоит из проданного опциона PUT (без денег), а портфель трейдера Б состоит из проданного опциона CALL (без денег), причем до истечения срока их действия остается один день<sup>5</sup>.

Обработка данных предыстории подобных опционов позволила оценить вероятность исполнения «в деньгах» каждого из этих опционов величиной 4%.

Таким образом, каждый из трейдеров А и Б имеет портфель, который имеет 96%-ный шанс вообще не потерять деньги. Например,  $ГП_{0.05} = 0$  для каждого из них. Однако объединенный портфель имеет лишь 92%-ный шанс не потерять деньги, так что для него  $ГП_{0.05} > 0$ .

Подходы к оценке риска с использованием  $ГП_\alpha$  подвергаются серьезной критике на том основании, что эта мера не является согласованной (из-за того, что  $ГП_\alpha$  не обладает свойством субаддитивности, см. [Artzner и др. (1999)], [Acerbi (2004)]).

Если не выполняется свойство субаддитивности, то это может привести к странным и нежелательным последствиям: например, при использовании  $ГП_\alpha$  для установки размера гарантийного депозита на фьючерсных рынках не учитываются возможные убытки, превышающие  $ГП_\alpha$ , что может подвергнуть оценщиков значительному риску очень больших потерь, превышающих  $ГП_\alpha$ . Одно из важных последствий использования такой несубаддитивной меры риска, как  $ГП_\alpha$ , для установки размера гарантийного депозита состоит в том, что инвесторы могут разбить свои счета на несколько так, чтобы уменьшить суммарный размер гарантийного депозита и тем самым подвергнуть организаторов биржи скрытому остаточному риску, против которого они не будут иметь никакого эффективного обеспечения со стороны ее инвесторов. Кроме того, банк, открывающий эти счета, *мог бы оставаться в неведении относительно взятого на себя риска*: подобный метод вкуче с фальшивыми хедж-позициями использовал французский трейдер Жером Кервьель, чтобы скрыть свои огромные позиции на рынке Eurex, что впоследствии вызвало более чем пятимиллиардные убытки в Société Générale.

<sup>5</sup> Опционы PUT и CALL дают право их владельцам соответственно продать и купить определенный товар по определенной цене. Если в опционе PUT оговоренная цена продажи ниже рыночной, то он называется на настоящий момент опционом «без денег». Соответственно, если в опционе CALL оговоренная цена покупки выше рыночной, то он называется на текущий момент опционом «без денег». Владелец опциона реализует свое право покупки (продажи) у продавшего ему опцион трейдера Скопировано с сайта Разработка электронных библиотек  
http://учебники.информ2000.ru/ http://право.информ2000.ru/

Несмотря на вышеизложенные критические замечания, Второе базельское соглашение сосредоточено в значительной степени на использовании  $ГП_\alpha$ . Как так могло получиться? Основное препятствие для перехода к согласованной мере риска (например, к  $СОП_\alpha$ ) — тестирование на исторических данных: тестирование  $ГП_\alpha$  на исторических данных довольно просто, и это мы увидим в следующем разделе, тогда как тестирование  $СОП_\alpha$  (или в общем случае любой спектральной меры риска) на исторических данных — более сложная задача, предлагаемые решения которой оцениваются неоднозначно. Поэтому везде далее мы сосредоточимся главным образом на использовании  $ГП_\alpha$ , даже если использование другой меры риска кажется более целесообразным.

**Пример 7.3.**  $ГП_\alpha$  для случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Пусть случайная величина подчинена  $(\mu, \sigma^2)$ -нормальному распределению (т. е.  $\Delta P_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ ). Тогда

$$\begin{aligned} P(\Delta P_t \leq -\gamma) &= P\left\{\frac{\Delta P_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{-\gamma - \mu}{\sigma}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{-\gamma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \Phi\left(\frac{-\gamma - \mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

где  $\Phi(x)$  — стандартное нормальное распределение, квантиль уровня  $\alpha$  которого обозначим через  $\Phi^{-1}(\alpha)$ . Тогда

$$\frac{-\gamma - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \Rightarrow \gamma = -\mu - \Phi^{-1}(\alpha)\sigma = -\mu + \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma.$$

Последнее равенство справедливо в силу симметричности стандартного нормального распределения относительно нуля.

На рис. 7.4 графически представлен квантиль уровня  $\alpha = 0,05$  стандартного нормального распределения ( $\Phi^{-1}(0,05) = -1,645$ , соответственно  $ГП_{0,05} = 1,645$ ).

**Пример 7.4.** Нефтяные теплоэнергетические фьючерсы на рынке NYMEX.

Ниже изображен график функции плотности распределения стоимости портфеля фьючерсов с трехдневным сроком, построенный по



ления изменений цены за  $l$  шагов,  $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$ , делаются некоторые предположения относительно распределения  $l$ -периодных нетто-или лог-доходностей.

• Вычислим  $\Gamma\Pi_\alpha(t, l)$  для  $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$ , если задано распределение  $l$ -периодной **нетто**-доходности  $r_t(l) = (P_t - P_{t-l})/P_{t-l}$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{P_t - P_{t-l} \leq -\Gamma\Pi_\alpha(t, l)\} = P\left\{\frac{P_t - P_{t-l}}{P_{t-l}} \leq -\frac{\Gamma\Pi_\alpha(t, l)}{P_{t-l}}\right\} = \\ &= P\left\{r_t(l) \leq -\frac{\Gamma\Pi_\alpha(t, l)}{P_{t-l}}\right\} = P\{r_t(l) \leq F_l^{-1}(\alpha)\},\end{aligned}$$

где  $r_t(l)$  —  $l$ -периодная нетто-доходность, а  $F_l^{-1}(\alpha)$  — квантиль (или обобщенная обратная функция) функции распределения  $F_l(x)$  **нетто**-доходности  $r_t(l)$ . Отсюда следует

$$\Gamma\Pi_\alpha(t, l) = -P_{t-l}F_l^{-1}(\alpha). \quad (7.7)$$

• Вычислим  $\Gamma\Pi_\alpha(t, l)$  для  $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$ , если задано распределение  $l$ -периодной **лог**-доходности  $\tilde{r}_t(l) = \ln(P_t/P_{t-l})$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{P_t - P_{t-l} \leq -\Gamma\Pi_\alpha(t, l)\} = P\left\{\frac{P_t}{P_{t-l}} \leq -\frac{\Gamma\Pi_\alpha(t, l) + P_{t-l}}{P_{t-l}}\right\} = \\ &= P\left\{\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-l}}\right) \leq \ln\left(-\frac{\Gamma\Pi_\alpha(t, l) + P_{t-l}}{P_{t-l}}\right)\right\} = \\ &= P\left\{\tilde{r}_t(l) \leq \ln\left(-\frac{\Gamma\Pi_\alpha(t, l) + P_{t-l}}{P_{t-l}}\right)\right\} = P\{\tilde{r}_t(l) \leq \tilde{F}_l^{-1}(\alpha)\},\end{aligned}$$

где  $\tilde{r}_t(l)$  —  $l$ -периодная лог-доходность, а  $\tilde{F}_l^{-1}(\alpha)$  — квантиль (или обобщенная обратная функция) функции распределения  $\tilde{F}_l(x)$  лог-доходности  $\tilde{r}_t(l)$ . Отсюда немедленно получаем, что

$$\Gamma\Pi_\alpha(t, l) = -P_{t-l} \cdot (\exp(\tilde{F}_l^{-1}(\alpha)) - 1). \quad (7.7a)$$

Обычно в литературе по финансам используются лог-доходности. Одно из преимуществ лог-доходностей состоит в том, что можно легко вычислить лог-доходность за  $K$  дней, которая равна сумме ежедневных лог-доходностей за каждый из этих  $K$  дней. Однако в рыночной практике обычно используется формула  $\Gamma\Pi_\alpha$  для нетто-доходностей, в которую вместо нетто-доходностей подставляют лог-доходности: необходимо помнить, что это лишь приближение, справедливое для малых значений лог-доходностей. Для более подробной информации см. [Christopher, 2003], гл. 3 и приложение 3.10].

**Пример 7.5.** Предположим, что ежедневные лог-доходности портфеля имеют нормальное распределение со средним  $\mu_r$  и дисперсией  $\sigma_r^2$ .

• Пусть  $\alpha = 1\%$ ,  $l = 10$  дней,  $P_{t-l} = 10$  млн долл.,  $\mu_r = 0,1\%$  и  $\sigma_r = 1,5\%$ .

Среднее и стандартное отклонение 10-дневной доходности равны

$$\begin{aligned} 10 \cdot \mu_r &= 0,01, \\ \sqrt{10} \cdot \sigma_r &= \sqrt{10} \cdot 0,015 = 0,0474, \end{aligned}$$

соответственно.

1%-ный квантиль стандартного нормального распределения равен

$$\Phi^{-1}(0,01) = -2,3263.$$

Следовательно, граница потерь уровня 1% для 10-дневного периода по лог-доходностям равна

$$\begin{aligned} \text{ГП}_{0,01}(t, 10) &= -P_{t-l} \left( e^{(\Phi^{-1}(0,01)\sqrt{10}\sigma_r + 10\mu_r)} - 1 \right) = \\ &= -10 \text{ млн долл.} \cdot (0,9044 - 1) = 0,956 \text{ млн долл.} \end{aligned}$$

• Пусть  $\alpha = 1\%$ ,  $l = 30$  дней,  $P_{t-l} = 500$  млн долл.,  $\mu_r = 0,05\%$  и  $\sigma_r = 1,3\%$ , тогда

$$\text{ГП}_{0,01}(t, 30) = -500 \left( e^{(-2,3263 \cdot \sqrt{30} \cdot 0,013 + 30 \cdot 0,0005)} - 1 \right) = 69,9220848.$$

Следовательно,  $\text{ГП}_{0,01}(t, 30) = 69,922$  млн долл. или 13,98%.

• Пусть  $\alpha = 1\%$ ,  $l = 30$  дней,  $P_{t-l} = 500$  млн долл.,  $\mu_r = 0,05\%$  и  $\sigma_r = 1,4\%$ , тогда

$$\text{ГП}_{0,01}(t, 30) = -500 \left( e^{(-2,3263 \cdot \sqrt{30} \cdot 0,014 + 30 \cdot 0,0005)} - 1 \right) = 75,3672319.$$

Следовательно,  $\text{ГП}_{0,01}(t, 30) = 75,367$  млн долл. или 15,07%.

Заметим, что, если изменить ежедневную волатильность лишь на 0,1% (это соответствует изменению годовой волатильности на 1,58%, где идет пересчет на год с 250 операционными днями), абсолютная разница между рассчитанными границами потерь уровня 0,01 30-дневного периода в каждом из этих двух случаев составит 5,445 млн долл., а относительная разница 1,09%. Этот пример показывает, что даже небольшие

## 7) Условная граница потерь уровня $\alpha$ (УГП $_{\alpha}$ )<sup>6</sup>

Для того чтобы преодолеть недостатки меры ГП $_{\alpha}$ , была предложена другая мера риска: *условная* ГП $_{\alpha}$ , УГП $_{\alpha}$ . Основная проблема меры ГП $_{\alpha}$  состоит в том, что она не учитывает убытки, большие определенного уровня, поэтому было предложено решать эту проблему, беря среднее значение по всем ГП $_q$  от  $q = 0$  до необходимого уровня (например, до уровня  $\alpha$ ):

$$\text{УГП}_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \text{ГП}_q dq.$$

Пусть случайная величина  $\Delta P_t$  имеет функцию распределения  $F$ , которая непрерывна. Тогда, вспоминая определение ГП $_q(\Delta P_t)$  (7.6), получим:

$$\text{УГП}_{\alpha}(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-1}(q) dq,$$

т. е. УГП $_{\alpha}(\Delta P_t)$  совпадает с СОП $_{\alpha}(\Delta P_t)$ . Если распределение  $F$  не является непрерывным, то УГП $_{\alpha}(\Delta P_t)$  и СОП $_{\alpha}(\Delta P_t)$  уже не совпадают (см. [Rockafellar, Uryasev (2002)]). Перед тем как продолжить описание свойств УГП $_{\alpha}$ , введем некоторые обозначения. Пусть:

- случайный вектор  $y$  описывает неопределенность. Это может быть, например, вектор доходностей или вектор курсов акций (последнее соответствует вектору,  $i$ -я компонента которого  $\Delta P_t^i$ , где  $i = 1, \dots, N$ );

- вектор  $x$  — вектор весов портфеля, независимый от  $y$  (условие независимости весьма важно при описании свойства выпуклости);

- $z = f(x, y)$  — доход/убыток портфеля с вектором весов  $x$ ; далее мы будем рассматривать в качестве «дохода/убытков» разность  $\Delta P_t = P_{t-1} - P_t$ , так что убыточные значения  $z$  будут положительными, а ГП $_{\alpha}$  будет квантилем функции распределения случайной величины  $z$  при значениях  $\alpha$ , близких к единице;

- $\Psi(x, \cdot)$  — функция распределения дохода/убытка  $z$ ;

- $\zeta_{\alpha}(x)$  — ГП $_{\alpha}$  дохода/убытка портфеля с вектором весов  $x$ .

Теперь опишем предложенный в статье [Rockafellar, Uryasev (2002)] подход к определению УГП $_{\alpha}$  в общем случае, когда функция распределения  $F$  произвольна (необязательно непрерывна). Прежде введем четыре определения:

1. Верхняя условная граница потерь уровня  $\alpha$  (обозначается УГП $_{\alpha}^+$ ) — это среднее значение худших потерь строго больших ГП $_{\alpha}$  (в использованных ранее терминах, это СОП $_{\alpha}$ ):

$$\text{УГП}_{\alpha}^+ = \mathbf{E}[f(x, y) | f(x, y) > \zeta_{\alpha}(x)];$$

<sup>6</sup> В англоязычной литературе этот показатель называется «The Conditional Value at Risk» и обозначается CVaR $_{\alpha}$ .  
Скопировано с сайта <http://учебник.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

2. Нижняя условная граница потерь уровня  $\alpha$  (обозначается  $УГП_{\alpha}^{-}$ ) — это среднее значение худших потерь, не меньших  $ГП_{\alpha}$ , т. е. потерь, которые больше или равны  $ГП_{\alpha}$ :

$$УГП_{\alpha}^{-} = \mathbf{E}[f(x, y) | f(x, y) \geq \zeta_{\alpha}(x)];$$

$УГП_{\alpha}^{-}$  также называют «хвостовой границей потерь уровня  $\alpha$ ».

3. « $\alpha$ -хвостовое распределение» (обозначается  $\Psi_{\alpha}(x, \zeta)$ ), соответствующее функции распределения  $\Psi(x, \zeta)$  случайной величины  $z = f(x, y)$ , определяется следующим образом:

$$\Psi_{\alpha}(x, \zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < \zeta_{\alpha}(x); \\ [\Psi(x, \zeta) - \alpha] / [1 - \alpha], & \zeta \geq \zeta_{\alpha}(x). \end{cases}$$

4. Условная граница потерь уровня  $\alpha$  (обозначается  $УГП_{\alpha}$ ), отвечающая случайной величине  $z = f(x, y)$ , — это среднее случайной величины, имеющей  $\alpha$ -«хвостовое» распределение, соответствующее функции распределения  $\Psi(x, \zeta)$  случайной величины  $z = f(x, y)$ .

Согласно следующей теореме  $УГП_{\alpha}$  равна взвешенному среднему  $ГП_{\alpha}$  и  $УГП_{\alpha}^{+}$ .

**Теорема 7.4.** Пусть  $\lambda_{\alpha}(x)$  — значение  $\alpha$ -хвостового распределения в точке  $\zeta_{\alpha}(x)$ , а именно

$$\lambda_{\alpha}(x) = [\Psi(x, \zeta_{\alpha}(x)) - \alpha] / [1 - \alpha], \quad 0 \leq \lambda_{\alpha} \leq 1.$$

Если  $\Psi(x, \zeta_{\alpha}(x)) < 1$  (т. е. существует ненулевая вероятность того, что потери будут не больше  $\zeta_{\alpha}(x)$ ), тогда

$$0 \leq \lambda_{\alpha}(x) < 1$$

и

$$УГП_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(x)\zeta_{\alpha}(x) + [1 - \lambda_{\alpha}(x)]УГП_{\alpha}^{+} = \lambda_{\alpha}(x)ГП_{\alpha} + [1 - \lambda_{\alpha}(x)]УГП_{\alpha}^{+}.$$

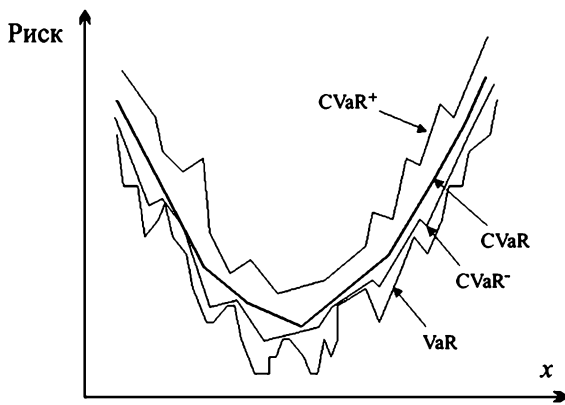
Если же  $\Psi(x, \zeta_{\alpha}(x)) = 1$  (т. е.  $\zeta_{\alpha}(x)$  — это наибольшая возможная потеря), тогда

$$УГП_{\alpha} = \zeta_{\alpha}(x).$$

Результаты теоремы не должны удивлять, поскольку они относятся к произвольным функциям распределения, которые могут быть и дискретными.

Более того, в статье [Rockafellar, Uryasev (2002)] доказывается, что  $УГП_{\alpha}$  является согласованной мерой риска и выпукла. Последнее имеет значение для линейного программирования и оптимизации портфеля





**Рис. 7.6.** УГП<sub>α</sub> выпукла, но ГП<sub>α</sub>, УГП<sub>α</sub><sup>-</sup>, УГП<sub>α</sub><sup>+</sup> могут быть невыпуклыми!

**Пример 7.6.** ГП<sub>α</sub> и УГП<sub>α</sub> для случайной величины, подчиняющейся нормальному распределению.

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение со средним μ и стандартным отклонением σ. Тогда получим:

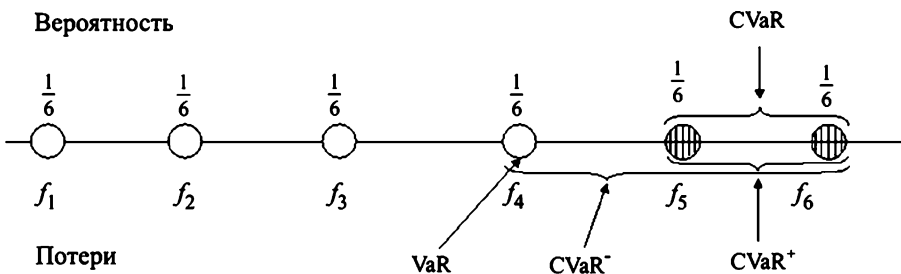
$$\begin{aligned} \text{ГП}_\alpha(\xi) &= \zeta_\alpha(\xi) = \mu + k_1(\alpha)\sigma, & k_1(0,05) &= -1,65 \\ \text{УГП}_\alpha(\xi) &= \mathbf{E}[\xi \mid \xi \geq \zeta_\alpha(\xi)] = \mu + k_2(\alpha)\sigma, & k_2(0,05) &= -2,06. \end{aligned}$$

**Пример 7.7.** ГП<sub>α</sub> и УГП<sub>α</sub> для дискретного распределения (случай 1).

Предположим, что дискретная случайная величина ξ может принимать шесть равновероятных значений:  $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ . Возьмем  $\alpha = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= (\Psi(\zeta_\alpha) - \alpha)/(1 - \alpha) = (4/6 - 4/6)/(1 - 4/12) = 0, \\ \text{УГП}_\alpha &= 0 \cdot \text{ГП}_\alpha + 1 \cdot \text{УГП}_\alpha^+ = \text{УГП}_\alpha^+ = \frac{1}{2}f_5 + \frac{1}{2}f_6. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем:  $\text{ГП}_\alpha \leq \text{УГП}_\alpha^- \leq \text{УГП}_\alpha = \text{УГП}_\alpha^+$  (см. рис. 7.7).



**Рис. 7.7.** ГП<sub>α</sub>, УГП<sub>α</sub><sup>-</sup>, УГП<sub>α</sub><sup>+</sup>, УГП<sub>α</sub> для дискретной случайной величины ξ

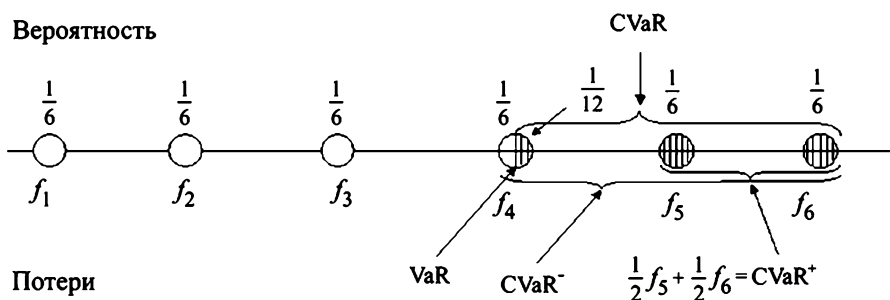
**Пример 7.8.**  $ГП_\alpha$  и  $УГП_\alpha$  для дискретного распределения (случай 2).

Предположим, что дискретная случайная величина  $\xi$  может принимать шесть равновероятных значений:  $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ . Возьмем  $\alpha = \frac{5}{12}$ , тогда:

$$\lambda_\alpha = (\alpha - \Psi(\zeta_\alpha)) / \alpha = (5/12 - 4/12) / (5/12) = 1/5$$

$$УГП_\alpha = 1/5 \cdot ГП_\alpha + 4/5 \cdot УГП_\alpha^+ = \frac{2}{5}f_1 + \frac{3}{5}f_2.$$

Следовательно, мы получаем:  $ГП_\alpha \leq УГП_\alpha^- \leq УГП_\alpha \leq УГП_\alpha^+$  (см. рис. 7.8).



**Рис. 7.8.**  $ГП_\alpha$ ,  $УГП_\alpha^-$ ,  $УГП_\alpha^+$ ,  $УГП_\alpha$  для дискретной случайной величины  $\xi$

### 7.2.2. Обзор стандартных методов управления рыночными рисками

До сих пор мы определили основные понятия и инструменты, используемые в управлении финансовым риском. Далее мы проанализируем стандартные методологии управления рыночными рисками.

Стандартные методики, связанные с управлением рыночными рисками, можно разделить на две группы.

- *Аналитические методы:* текущая стоимость портфеля вычисляется в зависимости от текущих значений факторов риска на основании некоторой параметрической модели, в которой обуславливается воздействие изменений факторов риска на стоимость портфеля.

Стандартная техника этого семейства методов реализована, например, в дисперсионно-ковариационном методе (ДКМ) и в методе дельта-гамма; оба эти метода дают подходы к управлению риском.

- *Имитационные методы:* для каждого сценария из некоторого диапазона сценариев изменений факторов риска оценивается стоимость портфеля. В результате получим ряд из стоимостей портфеля, по которому построим эмпирическую функцию распределения.  $ГП_\alpha$  этого

портфеля будем оценивать соответствующим квантилем построенной эмпирической функции распределения.

В зависимости от условий факторами рыночного риска могут быть курсы акций, индексы, процентные ставки, обменные курсы, цены на драгоценные металлы, цены на сырьевые товары и т.д.

Важные примеры методов этой группы — историческое моделирование (ИМ), моделирование методом Монте-Карло (ММК) и полная оценка (ПО) для управления опционным риском.

Если мы используем аналитические методы, тогда нам необходимо выбрать некоторую функцию распределения, которую мы считаем адекватной нашим данным. После чего оцениваем параметры выбранного распределения, например, в случае нормального распределения мы оцениваем среднюю величину и стандартное отклонение. Однако часто бывает, что, выбирая какую-нибудь хорошо известную функцию распределения, мы неадекватно описываем распределение анализируемых данных. Но мы можем воспользоваться методами имитационного моделирования, с помощью которых иногда можно получить более точное приближение для функции распределения.

### 1) Дисперсионно-ковариационный метод (ДКМ)

Идея, лежащая в основе этого метода, состоит в том, чтобы оценивать распределение доходностей (или изменений цен), линеаризируя доходность портфеля и предполагая, что факторы риска имеют нормальное распределение.

Пусть  $\{r_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$  — совокупность лог-доходностей на день  $t$  (факторы риска). Положим,  $r_{p,t}$  — лог-доходность портфеля на день  $t$  и пусть  $r_{p,t} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t} = \mathbf{w}' \mathbf{r}_t$ . Поскольку  $\mathbf{r}_t \in N(\mu, \Sigma)$ , мы получим, что

$$r_{p,t} \in N(\mathbf{w}' \mu, \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}).$$

Вектор средних  $\mu$  и ковариационная матрица  $\Sigma$  оцениваются по наблюдениям  $r_{t-\tau}, \dots, r_t$ , и в результате функция распределения лог-доходностей портфеля оценивается нормальным распределением со средним  $\hat{\mu}$  и дисперсией  $\mathbf{w}' \hat{\Sigma} \mathbf{w}$ , где  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\Sigma}$  — оценки параметров  $\mu$  и  $\Sigma$  соответственно.

Тогда  $\Gamma\Pi_\alpha$  оценивается величиной

$$\Gamma\Pi_\alpha = \mathbf{w}' \hat{\mu} + \Phi^{-1}(\alpha) \mathbf{w}' \hat{\Sigma} \mathbf{w}.$$

## 2) Дельта-гамма аппроксимации для нелинейных портфелей

Если в наш портфель включены нелинейные инструменты, такие как опционы, то предыдущий метод использовать уже нельзя. Один из первых подходов к решению такой задачи состоял в том, что необходимо измерять влияние локального изменения факторов риска на стоимость портфеля с помощью среднего для производных (стоимости портфеля по факторам риска), т. е. использовать приближения к нелинейным ценам опциона. Если использовать приближение первого порядка, то мы имеем *дельта-подход*, а если использовать приближение второго порядка, тогда мы имеем *гамма-подход*.

Для более детального описания этого подхода рассмотрим совокупность факторов риска  $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$  и предположим, что стоимость нашего портфеля в такт времени  $t$  может быть записана в виде:

$$X_{p,t} = f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}),$$

где  $X_{i,t}$  — значение фактора риска  $x_i$  в такт времени  $t$ , а  $f$  — некоторая функция, отображающая  $R^n$  в  $R$ . Например, это может быть линейный портфель, составленный из акций, для которого  $X_{p,t} = \sum_{i=1}^n w_i X_{i,t}$ ; или опцион  $C$  на базисный актив  $S$  с ценой исполнения  $K$  и сроком обращения  $\tau$ , где  $C = f(S)$ . Функцию  $f$  можно получить, например, из формулы Блэка — Шоулса (см., например, [Ширяев (2004), с. 911–912]).

Предположим, что факторы риска изменяются за один такт времени на  $\Delta_i, i = 1, \dots, n$ , т. е.  $X_{i,t+1} = X_{i,t} + \Delta_i$ . Тогда, если  $f(x_1, \dots, x_n)$  непрерывно дифференцируема по всем  $x_i, i = 1, \dots, n$ , мы можем получить аппроксимацию первого порядка для изменения стоимости портфеля:

$$\begin{aligned} \Delta &= f(X_{1,t} + \Delta_1, \dots, X_{n,t} + \Delta_n) - f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \Delta_i. \end{aligned}$$

Отметим, что если  $x_i$  — это цена, т. е.  $X_i = S_{i,t}$  и  $\Delta_i = S_{i,t+1} - S_{i,t}$ , тогда

$$\Delta_i = S_{i,t} \frac{S_{i,t+1} - S_{i,t}}{S_{i,t}} = S_{i,t} R_{i,t+1}.$$

Значение первой частной производной для  $f(x_1, \dots, x_n)$  по  $x_i$  в точке  $(X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$  обозначим через  $\delta_i$  ( $\delta_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$ ). Из того, что

$$\Delta \approx \sum_{i=1}^n \delta_i \Delta_i,$$

мы получим приближение для условного математического ожидания и условной дисперсии изменения стоимости портфеля в следующий такт времени ( $t + 1$ ), при условии информации на сегодняшний день  $t$ :

$$\mu(\Delta) \approx \sum_{i=1}^n \delta_i \mathbf{E} \Delta_i,$$

$$\sigma^2(\Delta) \approx \sum_{1 \leq i, j \leq n} \delta_i \delta_j \text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)$$

или, если  $X_{i,t} = S_{i,t}$ :

$$\mu(\Delta) \approx \sum_{i=1}^n \delta_i S_{i,t} \mathbf{E} R_{i,t+1},$$

$$\sigma^2(\Delta) \approx \sum_{1 \leq i, j \leq n} \delta_i \delta_j S_{i,t} S_{j,t} \underbrace{\text{Cov}(R_{i,t+1}, R_{j,t+1})}_{=\sigma_{ij,t+1}}.$$

Гауссовское приближение для  $\text{ГП}_\alpha(\Delta)$  дается следующим выражением

$$\text{ГП}_\alpha(\Delta) = \mu(\Delta) + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma(\Delta).$$

Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  дважды непрерывно дифференцируема по всем  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , мы можем получить аппроксимацию *второго* порядка для изменения стоимости портфеля:

$$\Delta = f(X_{1,t} + \Delta_1, \dots, X_{n,t} + \Delta_n) - f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_n) \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_1, \dots, X_n) \Delta_i \Delta_j$$

Следовательно,

$$\Delta \approx \sum_{i=1}^n \delta_i \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Gamma_{ij} \Delta_i \Delta_j,$$

где  $\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$ .

Для вычисления  $\text{ГП}_\alpha$  (или  $\text{УГП}_\alpha$ ) можно воспользоваться так называемым приближением Cornish — Fisher вместе с гамма-аппроксимацией или обратиться к гамма-аппроксимации на основе имитационного моделирования: при наличии предварительно заданной модели, описывающей многомерное распределение доходностей активов (обычно берется многомерное нормальное распределение), вектор доходностей моделируется  $N$  раз из этого распределения. Эти смоделированные значения затем используются для расчета функции распределения изменения стоимости портфеля, после чего мы можем на основании этого распределения вычислять необходимые нам меры риска (для более подробной информации см. [Christoffersen (2003)]).

### 3) Историческое моделирование

Идея, лежащая в основе этого метода, состоит в том, что распределение доходностей (или изменений цены) портфеля необходимо оценивать с помощью эмпирической функции распределения без использования каких-либо параметрических моделей. Если доходности представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины или, в более общем случае, стационарны, то сходимость эмпирической функции распределения к истинному распределению следует из закона больших чисел.

Пусть  $\{r_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$  — это совокупность риск-доходностей на день  $t$  (факторы риска). Обозначим через  $r_{p,t}$  лог-доходность портфеля на день  $t$  и предположим, что  $r_{p,t} = f(r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$ , например,  $r_{p,t} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t}$ , как в случае предположений метода вариации-ковариации. Далее, рассмотрим исторические наблюдения за доходностями портфеля, т. е.

$$r_{p,t-\tau} = f(r_{1,t-\tau}, \dots, r_{n,t-\tau}), \quad \tau = 1, \dots, m$$

Упорядочим  $r_{p,t-\tau}, \tau = 1, \dots, m$  по возрастанию

$$r_{p,t-\tau_1} \leq r_{p,t-\tau_2} \leq \dots \leq r_{p,t-\tau_m}.$$

Тогда оценка границы потерь уровня  $\alpha$  для  $r_{p,t}$  равняется

$$ГП_{\alpha,t}^p = r_{t-\tau_{k^*}},$$

где

$$k^* = \min \left\{ k = 1, \dots, m : \frac{k-1}{m} < \alpha \leq \frac{k}{m} \right\}.$$

### 4) Моделирование методом Монте-Карло

Идея, лежащая в основе моделирования методом Монте-Карло, состоит в том, что распределение доходностей (или изменений цен) портфеля необходимо оценивать по некоторой явной параметрической модели. В отличие от метода вариации-ковариации нам нет необходимости представлять задачу в аналитически удобном виде, например, линеаризуя портфельную доходность  $r_{p,t}$  и делая предположение о том, что вектор, составленный из факторов риска, имеет многомерное нормальное распределение. Вместо этого мы делаем выводы относительно  $r_{p,t}$ , используя Монте-Карло-моделирование.

Пусть  $\{r_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$  — это совокупность риск-доходностей на день  $t$  (факторы риска),  $r_{p,t}$  — это лог-доходность портфеля на тот день  $t$ .

же день. Как и раньше, предположим, что  $r_{p,t} = f(r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$ . Теперь вместо того, чтобы строить модель на основе прошлых наблюдений, примем некоторое допущение относительно закона распределения доходностей (факторов риска). Пусть это будет многомерное  $t$ -распределение<sup>7</sup>, т. е.

$$r_t = Z_t, \text{ где } Z_t \in t(\mathbf{0}, \Sigma, \nu).$$

Здесь  $\mathbf{0}$  определяет вектор нулевых средних,  $\Sigma$  — ковариационную матрицу, а  $\nu$  — число степеней свободы.

Затем в соответствии с этим допущением смоделируем доходности, в результате чего получим прогнозы модели для доходностей на день  $t$ . Например, для того чтобы подсчитать гипотетические доходности (факторы риска) на день  $t$ , смоделируем  $N$  раз случайный вектор  $Z_t$ , подчиняющийся  $t$ -распределению (см. выше):

$$\tilde{r}_t^k = \tilde{z}_t^k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Имея множество смоделированных прогнозов факторов риска  $\{\tilde{r}_t^k, k = 1, \dots, N\}$ , можно получить для каждого такого прогноза доходность портфеля, которая равна

$$\tilde{r}_{p,t}^k = f(r_{1,t}^k, \dots, r_{n,t}^k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Упорядочим их по возрастанию

$$\tilde{r}_{p,t}^{(1)} \leq \dots \leq \tilde{r}_{p,t}^{(N)}.$$

Оценка границы потерь уровня  $\alpha$  для  $r_{p,t}$  равна

$$\Gamma \Pi_{\alpha}^p(1, t) = \tilde{r}_t^{(k^*)},$$

где

$$k^* = \min \left\{ k = 1, \dots, N : \frac{k-1}{N} < \alpha \leq \frac{k}{N} \right\}.$$

## 5) Метод полной оценки

Линейные и квадратичные приближения к нелинейности, возникающей в результате включения в портфель таких инструментов, как опционы, дают в некоторых случаях весьма плохие оценки ГП. Это обычно происходит в случаях, когда портфель содержит опционы с различными ценами исполнения.

<sup>7</sup>Многомерное  $t(a; \Sigma; \nu)$ -распределение является обобщением стандартного одномерного распределения Стьюдента. Оно определяется параметрами трех видов: вектором сдвига (средних значений)  $a$ , ковариационной матрицей  $\Sigma$  и числом степеней свободы  $\nu$ . Подробнее см. в гл. 3 и в приложении к этой главе.

В таких сложных портфелях единственно возможный метод, который мы можем использовать для вычисления необходимой меры риска, — это так называемый метод полной оценки (МПО). Метод полной оценки состоит в том, что много раз моделируется будущая (гипотетическая) цена базового актива и, используя модели ценообразования опционов, для каждой смоделированной цены базового актива рассчитывается цена опционов.

Вновь рассмотрим набор значений факторов риска  $\{X_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$  в день  $t$  и предположим, что стоимость портфеля равна

$$X_{p,t} = f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}),$$

где  $f$  — некоторая функция, переводящая  $R^n$  в  $R$ . В качестве примера можно привести портфель, состоящий из опциона  $C$  на базисный актив  $S$  с ценой исполнения  $K$  и сроком обращения  $\tau$ , где  $C = f(S)$ . Функцию  $f$  можно получить, например, из формулы Блэка — Шоулса.

При использовании метода полной оценки делаются предположения относительно вида функции распределения доходностей базовых активов, т. е. относительно функции распределения факторов риска  $x_i$  и, применяя для моделирования будущих (гипотетических) доходностей базовых активов на  $K$  дней вперед метод Монте-Карло, получим

$$X_{1,t+K}^h, \dots, X_{n,t+K}^h, \quad h = 1, \dots, N.$$

На основании этих смоделированных сценариев для доходностей базовых активов на  $K$  дней вперед мы определяем стоимости нашего нелинейного портфеля для каждого такого сценария, используя, например, формулы Блэка — Шоулса, после чего по ряду стоимостей (для каждого сценария доходностей) нашего портфеля можно вычислять необходимые нам меры риска.

Метод полной оценки имеет преимущество в том, что он концептуально очень прост и не использует аппроксимаций. Однако он требует намного больших вычислительных усилий, поскольку должны быть вычислены будущие (гипотетические) цены каждого опционного контракта для каждого смоделированного сценария будущих цен на базисный актив. Поэтому критерии скорости вычислений могут диктовать выбор между более точным, но медленным методом полной оценки и методами приближений, которые работают намного быстрее.

### 7.2.3. Использование одномерной GARCH-модели в анализе границы потерь

До сих пор мы рассматривали модели, с помощью которых изучали рыночные доходности с точки зрения безусловной перспективы. Сна-



ко хорошо известно, что для финансовых рынков характерны меняющиеся во времени моменты, и, если мы пренебрегаем этим аспектом, мы можем недооценить или переоценить нужную меру риска, например  $\Gamma\Pi_\alpha$ . Кроме того, с помощью условных моделей с меняющимися во времени характеристиками можно проще (чем с помощью безусловных моделей) учитывать безусловную ненормальность данных. Вот почему использование моделей GARCH<sup>8</sup> для управления рыночным риском стало обычной практикой среди специалистов в области финансов.

Предположим, что в момент  $t$  мы инвестировали сумму  $P_t$  в некоторый актив, и нам необходимо вычислить  $\Gamma\Pi_\alpha$  в момент  $(t + 1)$ . Тогда, если мы используем условную ARMA-GARCH-модель для нетто-доходностей или лог-доходностей этого актива, то мы получим:

- для нетто-доходностей  $\Gamma\Pi_\alpha$  на момент времени  $(t + 1)$  равно

$$\Gamma\Pi_\alpha(t, l = 1) = P_t \cdot \left[ \exp \left( \hat{r}_{t+1} + F_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{t+1}^2} \right) - 1 \right],$$

- для лог-доходностей  $\Gamma\Pi_\alpha$  на момент времени  $(t + 1)$  равно

$$\Gamma\Pi_\alpha(t, l = 1) = P_t \cdot \left[ \hat{r}_{t+1} + F_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{t+1}^2} \right],$$

где мы воспользовались соотношением (7.7) для нетто-доходностей и (7.7a) для лог-доходностей. Если же стандартизованные ошибки GARCH-модели  $\eta$  имеют стандартное нормальное распределение, то

$$F_\alpha^{-1} = \Phi^{-1}(\alpha).$$

Если же стандартизованные ошибки GARCH-модели  $\eta$  имеют стандартное  $t$ -распределение, т. е.  $\sqrt{\nu/(\nu - 2)}\eta \sim t_\nu$ , где  $t_\nu$  — это одномерное условное  $t$ , тогда

$$F_\alpha^{-1} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} t_\nu^{-1}(\alpha).$$

**Пример 7.9.** Рассмотрим временной ряд, состоящий из 9190 ежедневных лог-доходностей  $((r_t)_{t=1}^{9190})$ . Для того чтобы рассчитать однодневную ГП в момент времени  $t = 9190$  по длинной позиции в 10 млн долл., воспользуемся AR-GARCH-моделью.

Пусть  $z_t$  имеет стандартное нормальное распределение и подобранная модель для  $(r_t)_{t=1}^{9190}$  такова:

$$\begin{aligned} r_t &= 0,00066 - 0,0247r_{t-2} + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &= z_t \sqrt{\sigma_t^2} \\ \sigma_t^2 &= 0,00000389 + 0,0799\varepsilon_{t-1}^2 + 0,9073\sigma_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $r_{9189} = -0,00201, r_{9190} = -0,0128\sigma_{9190}^2 = 0,00033455$ , то в соответствии с подобранной моделью AR(2)-GARCH(1,1) одношаговый прогноз таков:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{9190}(1) &\equiv \hat{E}[r_{9191}|\Omega_{9190}] = 0,00066 - 0,0247 \cdot (-0,00201) = 0,00071 \\ \hat{\sigma}_{9190}^2(1) &\equiv \hat{V}ar[\varepsilon_{9191}|\Omega_{9190}] = 0,00000389 + \\ &+ 0,0799 \cdot (-0,0128 - 0,00066 + 0,0247 \cdot (-0,00201))^2 + \\ &+ 0,9073 \cdot 0,00033455 = 0,0003211. \end{aligned}$$

Однодневная граница потерь на уровне 5% равна

$$\begin{aligned} \text{ГП}_{0,05}(t, 1) &= -10\,000\,000 \left[ \exp \left( \hat{r}_{9190}(1) - 1,6449 \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{9190}^2(1)} \right) - 1 \right] = \\ &= -10\,000\,000 \left[ \exp \left( 0,00071 - 1,6449 \cdot \sqrt{0,0003211} \right) - 1 \right] = \\ &= 283,556 \text{ долл.} \end{aligned}$$

С вероятностью 95% возможные потери на следующий день по такой позиции составят сумму, не бóльшую, чем 283,556 долл.

Если мы рассчитываем границу потерь на уровне 1%, получим

$$\begin{aligned} \text{ГП}_{0,01}(t, 1) &= -10\,000\,000 \left[ \exp \left( 0,00071 - 2,3262 \cdot \sqrt{0,0003211} \right) - 1 \right] = \\ &= 401,457 \text{ долл.,} \end{aligned}$$

т. е. в этом случае граница потерь позиции равна 401,457 долл.

#### 7.2.4. Методы оценки $\text{ГП}_\alpha$ , использующие MGARCH-модели<sup>9</sup>

Предположим, что портфель составлен из  $N$  активов. Пусть в начальный момент в  $i$ -й актив инвестируется сумма  $W_i = w_i W$ , где  $W$  — общая сумма инвестиций в портфель,  $w_i$  — доля актива  $i$  в портфеле.

Пусть  $\mathbf{w}$  — вектор долей активов в портфеле,  $Y$  — вектор доходностей,  $\mu$  — вектор ожидаемых доходностей и  $\Sigma$  — ковариационная матрица доходностей. Тогда доходности портфеля  $R_p = \mathbf{w}'Y$  будет иметь среднее значение  $\mathbf{E}[R_p] = \mathbf{w}'\mu$  и дисперсию  $\text{Var}[R_p] = \sigma_p^2 = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}$ . Граница потерь уровня  $\alpha$  для портфеля стоимостью  $W$  в начальный момент времени — это минимальная потеря в доле  $\alpha$  всех худших результатов:

$$\text{ГП}_\alpha^{(p)} = W \times q_p(\alpha),$$

где  $q_p(\alpha)$  определяется условием

$$\text{Pr}[R_p < q_p(\alpha)] = \alpha.$$

Например, если  $R_p \in N(\mathbf{w}'\mu, \sigma_p^2)$ ,

$$\text{ГП}_\alpha^{(p)} = (\mathbf{w}'\mu + z_\alpha \sigma_p)W = (\mathbf{w}'\mu + z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}})W,$$

где  $z_\alpha$  — это  $\alpha\%$ -квантиль  $N(0, 1)$  распределения.

Предположение о том, что вектор средних  $\mu$  и ковариационная матрица  $\Sigma$  не меняются со временем, весьма ограничительно. Одна из возможностей обойти это ограничение — оценивать одномерную модель GARCH для  $\sigma_{p,t}^2$ . Но у такого подхода есть недостаток, заключающийся в том, что каждый раз, как мы меняем структуру портфеля  $\mathbf{w}$ , нам необходимо переоценивать модель. Однако если мы подгоняем MGARCH-модель к нашим данным ( $\mu_t$  и  $\Sigma_t$  вместо  $\mu$  и  $\Sigma$ ), тогда многомерное распределение доходностей может быть использовано для расчета функции распределения и границ потерь в момент  $t$  для любого портфеля, и в этом случае нет необходимости каждый раз при изменении структуры портфеля переоценивать модель. Следовательно, мы можем легко определять чувствительность границы потерь (ГП) по отношению к изменениям в структуре портфеля. А значит, можно выбрать вектор весов  $\mathbf{w}$  таким образом, что прогнозируемое значение границы потерь для следующего периода будет равно некоторому предопределенному значению.

Следует отметить важность учета ковариаций для вычисления границы потерь (ГП). Когда корреляция между доходностями отдельных активов меньше, чем 1, тогда очевидно, что ГП портфеля меньше, чем сумма ГП активов, составляющих этот портфель.

**Пример 7.10.** В данном примере для расчета ГП портфеля активов мы используем модель с постоянными условными корреляциями (т. е. ССС-модель) (см. п. 5.2.7). Ковариационная матрица  $\Sigma_t$  может быть записана как

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \\ \mathbf{D}_t &= \text{diag}(\sigma_{11t}^{1/2} \dots \sigma_{NNt}^{1/2}), \\ \mathbf{R}_t &= (\rho_{ijt}), \quad \rho_{iit} = 1.\end{aligned}$$

$R_t$  — это матрица условных корреляций размера  $(N \times N)$ , и  $\sigma_{iit}$  определяется как одномерная GARCH-модель. Следовательно,

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij,t} \sqrt{\sigma_{ii,t} \sigma_{jj,t}} \quad \forall i \neq j.$$

Положительная определенность матрицы  $\Sigma_t$  следует из положительной определенности матрицы  $\mathbf{R}_t$  и положительности всех  $\sigma_{iit}$ . Постоянство корреляций означает, что

т. е. все условные корреляции являются постоянными (не зависят от  $t!$ ).  
 Следовательно,

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii,t} \sigma_{jj,t}} \quad \forall i \neq j.$$

Таким образом, динамика ковариации определяется только динамикой двух условных дисперсий. Общее число параметров в  $\mathbf{R}$  равно  $N(N-1)/2$ .

## 7.2.5. Эмпирические приложения с использованием пакета Eviews

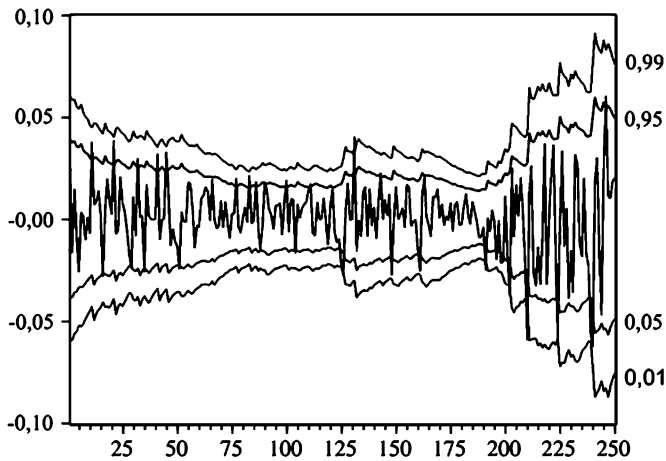
### 1) Одномерная ГП

Предположим, мы имеем массив данных, составленный из 1250 наблюдений за немецким фондовым индексом DAX, и мы хотим использовать первые 1000 наблюдений для построения модели AR(1)-GARCH(1,1) со стандартизованными ошибками, имеющими распределение Стьюдента, тогда как оставшиеся 250 наблюдений использовать для тестирования (backtesting) ГП. В таком случае нам необходимо набрать следующие команды:

```

smpl @all
'series d_dax=dlog(dax) 'IF WE USE LOGRETURNS
series d_dax=@pch(dax) 'IF WE USE NET-RETURNS
matrix(250,5) v_a_risk
for !i=1000 to 1249
smpl 1 !i
equation tarcl.arch(1,1, thrsh=1,tdist,m=100) d_dax c d_dax(-1)
smpl !i+1 !i+1
'FORECAST CONDITIONAL MEAN AND VARIANCE
tgarcl.fit(f=na) yhat y_se y_garch
'COLLECT THE TRUE REALIZED RETURNS
v_a_risk(!i-999,1) = @elem(d_dax,@otod(!i+1))
!gradi = tgarcl.@coefs(6)
'COMPUTE THE VAR AT DIFFERENT PROBABILITY LEVELS
v_a_risk(!i-999,2) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.01, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)))
v_a_risk(!i-999,3) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.05, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)))
v_a_risk(!i-999,4) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.95, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)))
v_a_risk(!i-999,5) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.99, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)))
next
v_a_risk.line
    
```

Результаты представлены на рис. 7.9.



**Рис. 7.9.** ГП на уровне 1%, 5%, 95% и 99% — индекс DAX

## 2) Многомерная ГП для ССС-модели

Рассмотрим равновзвешенный портфель из трех фондовых индексов (японского, европейского и американского), с ежедневными данными. Тогда программа для расчета ГП на один шаг вперед в Eviews будет выглядеть так:

```
'SET THE ESTIMATION SAMPLE
smpl 01/01/1990 05/28/2001
series y1 = rseusa
series y2 = rsejap
series y3 = reuro
'CREATE THE VECTOR OF WEIGHTS
vector(3) omega = 1/3
'ESTIMATE THE THREE UNIVARIATE GARCH(1,1) MODEL
equation eq1.arch(m=100, c=1e-5) y1 c y1(-1)
equation eq2.arch(m=100, c=1e-5) y2 c y2(-1)
equation eq3.arch(m=100, c=1e-5) y3 c y3(-1)
'SET THE FORECASTING SAMPLE
smpl 05/29/2001 05/29/2001
'FORECAST THE UNIVARIATE CONDITIONAL MEANS AND VARIANCES
eq1.forecast y1hat y1se cvar1
eq2.forecast y2hat y2se cvar2
eq3.forecast y3hat y3se cvar3
' INITIALIZE A VECTOR THAT WILL CONTAIN THE FORECASTED MEANS
coef(3) mu
'EXTRACT THE FORECASTED MEANS
mu(1)=y1hat(@dtoo("05/29/2001"))
mu(2)=y2hat(@dtoo("05/29/2001"))
mu(3)=y3hat(@dtoo("05/29/2001"))
```

```
' INITIALIZE A MATRIX THAT WILL CONTAIN THE FORECASTED
STANDARD DEVIATIONS
matrix(3,3) dm=0
'EXTRACT THE FORECASTED VARIANCES
dm(1,1)=@sqrt(cvar1(@dtoo("05/29/2001")))
dm(2,2)=@sqrt(cvar2(@dtoo("05/29/2001")))
dm(3,3)=@sqrt(cvar3(@dtoo("05/29/2001")))
'SET THE ESTIMATION SAMPLE
smpl 01/01/1990 05/28/2001
'COMPUTE THE STANDARDIZED RESIDUALS
eq1.makesresids(s) stdres1
eq2.makesresids(s) stdres2
eq3.makesresids(s) stdres3
'INITIALIZE THE CORRELATION MATRIX
matrix(3,3) rm=1
'INSERT THE ESTIMATED CORRELATIONS AMONG RESIDUALS
IN THE CORRELATION MATRIX
rm(1,2)=@cor(stdres1,stdres2)
rm(1,3)=@cor(stdres1,stdres3)
rm(2,3)=@cor(stdres2,stdres3)
rm(2,1)=rm(1,2)
rm(3,1)=rm(1,3)
rm(3,2)=rm(2,3)
'GENERATE THE CONDITIONAL COVARIANCES
genr ccov12=rm(1,2)*@sqrt(cvar1*cvar2)
genr ccov13=rm(1,3)*@sqrt(cvar1*cvar3)
genr ccov23=rm(2,3)*@sqrt(cvar2*cvar3)
'CREATE THE CONDITIONAL VARIANCE/COVARIANCE MATRIX
matrix hm=dm*rm*dm
'COMPUTE THE CONDITIONAL FORECASTED VARIANCE OF THE
TRIVARIATE 'PORTFOLIO
matrix cvarpf=@transpose(omega)*hm*omega
'COMPUTE THE CONDITIONAL FORECASTED MEAN OF THE
TRIVARIATE PORTFOLIO
matrix cmeanpf=@transpose(omega)*mu
'COMPUTE THE VAR AT THE 5% LEVEL
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.05)*@sqrt(cvarpf)
```

### 3) Многомерная ГП с использованием диагональной ВЕКК-модели

Сейчас мы рассмотрим иной подход к моделированию меняющийся во времени условной ковариационной матрицы  $\Sigma_t$ , а именно рассмотрим *многомерную диагональную ВЕКК-модель*, впервые предложенную в статье [Engle, Kroner (1995)]:

$$Y_t = \mathbf{E}[Y_t|F_{t-1}] + \Sigma_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \in N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$$

где  $E[Y_t|F_{t-1}]$  — спецификация условного среднего для векторной AR(1)-модели,  $\Sigma_t^{1/2}$  — разложение Холецкого для  $\Sigma_t$ , в котором  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — диагональные матрицы: требование того, чтобы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  были диагональными, позволяет снизить число оцениваемых параметров.

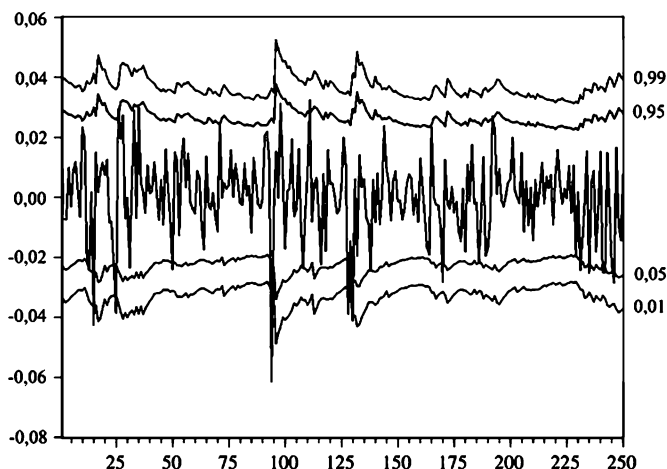
Отметим, что, хотя в Eviews 6 можно оценивать D-ВЕКК-модель, на данный момент в этом пакете не предусмотрена процедура, которая позволила бы рассчитывать прогноз условной ковариационной матрицы  $\Sigma$ . Однако в личной беседе представители группы поддержки Eviews заверили, что в ближайшее время эта процедура будет включена в пакет. Следовательно, для простоты мы будем рассматривать  $\Sigma_t$  как если бы это был прогноз на один шаг вперед к моменту времени  $(t + 1)$ .

Рассмотрим портфель из акций четырех российских эмитентов: Газпрома, Лукойла, РБК, Сбербанк. Процедура расчета ГП портфеля на один шаг вперед в Eviews выглядит следующим образом:

```
!n=4
matrix(!n) omega=1/!n
matrix(250,5) Var_port_final
for !i=751 to 950 'THIS CYCLE WILL BE REPEATED FOR 250 TIMES
'ESTIMATE THE MODEL
smpl 1 !i
system sys01
sys01.append @pch(gazprom)=c(1)+c(10)*@pch(gazprom(-1))
sys01.append @pch(lukoil)=c(2)+c(11)*@pch(lukoil(-1))
sys01.append @pch(rbk)=c(3)+c(12)*@pch(rbk(-1))
sys01.append @pch(sberbank)=c(4)+c(13)*@pch(sberbank(-1))
'sys01.arch @diagvech c(fullrank) arch(1,diag) garch(1,diag)
sys01.arch(m=70) @diagbekk c(indef) arch(1,diag) garch(1,diag)
'DO THE FORECASTING AT TIME T+1 FOR THE VECTOR OF RETURNS
AND SIGMA
smpl !i+1 !i+1
series fore1 = c(1)+c(10)*@pch(gazprom(-1))
series fore2 = c(2)+c(11)*@pch(lukoil(-1))
series fore3 = c(3)+c(12)*@pch(rbk(-1))
series fore4 = c(4)+c(13)*@pch(sberbank(-1))
series true_return= (@pch(gazprom)+@pch(lukoil)+@pch(rbk)+
+@pch(sberbank))/!n
vector4) mu
mu(1)= @elem(fore1, @otod(!i+1))
mu(2)= @elem(fore2, @otod(!i+1))
mu(3)= @elem(fore3, @otod(!i+1))
mu(4)= @elem(fore4, @otod(!i+1))
vector(1) true_ret=true_return
'WE CONSIDER THE LAST CONDITIONAL SIGMA AS THE FORECASTED
ONE AT TIME t+1.
sys01.makegarch(mat, cov, date=!i, name=cov_mat)
matrix cvarpf=@transpose(omega)*cov_mat*omega
matrix cmeanpf=@transpose(omega)*mu
matrix true_ret=TRUE REALIZED RETURN
```

```
matplace(Var_port_final, true_ret, !i-700,1)
'COMPUTE THE LONG-POSITION VALUE AT RISK (1% AND 5 %)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.01)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,2)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.05)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,3)
"COMPUTE THE SHORT-POSITION VALUE AT RISK (95% AND 99 %)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.95)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,4)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.99)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,5)
'SAVE THE WORKFILE
wfsave azioni_russe_sol
next
```

Результаты частично отражены на рис. 7.10.



**Рис. 7.10.** ГП на уровне 1%, 5%, 95% и 99% (нормальная диагональная ВЕКК(1,1,1)-модель, равновзвешенный портфель: Газпром, Лукойл, РБК, Сбербанк)

### 7.2.6. Продвинутое методы управления рыночным риском: Copula-GARCH-модели<sup>10</sup>

Несмотря на то что оценка одномерной ГП достаточно хорошо изучена, многомерным случаем занимались только в небольшом количестве недавних работ о прогнозе корреляций между активами. Эмпирические результаты, посвященные этой проблеме, см., например, в работах [Engle, Sheppard (2001)], [Giot, Laurent (2003)], [Bauwens, Laurent (2005)] и [Rosenberg, Schuermann (2006)]. Когда мы используем параметрические методы, оценивание ГП для портфеля активов может оказаться очень



затрудненным из-за сложности совместного многомерного моделирования.

Кроме того, с ростом количества активов в портфеле возникают вычислительные трудности<sup>11</sup>. По-видимому, вследствие этой сложности на данный момент практики и исследователи уделили большое внимание двум моделям:

- «постоянная условная корреляция» (ПУК-модель), впервые предложенная в [Bollerslev (1990)];
- «динамическая условная корреляция» (ДУК-модель), впервые предложенная в [Engle (2002)]<sup>12</sup>.

Можно показать, что модели ПУК и ДУК могут быть представлены как частные случаи более общей копула-структуры (см., например, [Patton(2006a)], [Patton(2006b)], [Fantazzini(2008)] и [Fantazzini(2009c)]).

В частности, функция правдоподобия многомерного нормального распределения может быть представлена как произведение нормальной копула с корреляционной матрицей  $\Sigma = \mathbf{R}_t$  и маргинальных нормальных распределений:

$$f^{Normal}(x_1, \dots, x_n) = \\ = c^{Normal}(F_1^{Normal}(x_1), \dots, F_n^{Normal}(x_n); \mathbf{R}_t) \times \prod_{i=1}^n f_i^{Normal}(x_i),$$

где  $f_i^{Normal}$  — плотность частного нормального распределения. Если мы рассматриваем общую модель для условных средних значений и дисперсий, две модели могут быть переформулированы следующим образом:

$$X_t = \mathbf{E}[X_t | F_{t-1}] + \mathbf{D}_t \eta_t \\ \eta_t \sim H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Normal}(F_1^{Normal}(\eta_1), \dots, F_n^{Normal}(\eta_n); \mathbf{R}_t),$$

где  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{11,t}^{1/2} \dots h_{nn,t}^{1/2})$ ,  $h_{ii,t}$  определяется как одномерная GARCH-модель.

Кроме того, двухшаговая процедура оценки ДУК-модели, описанная в [Engle, Sheppard (2001)], соответствует методу *Inference for Margins (IFM)*, впервые предложенному в статье [Joe, Xu (1996)] для оценки копула-функции. Согласно методу IFM на первом шаге оцениваются параметры маргинальных (частных) распределений, в то время как на втором шаге оцениваются отдельно параметры копула-функции. Как и

<sup>11</sup> Для более подробной информации смотри обзор многомерных GARCH-моделей, данный в гл. 5.

<sup>12</sup> В англоязычной литературе эти модели называют, соответственно, “CCC-model” (“Constant Conditional Correlation model”) и “DCC-model” (“Dynamic Conditional Correlation model”).  
Скопировано с сайта <http://лучше.информ2000.рф>, см. гл. 5, п. 5.2.7. Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

оценки метода максимального правдоподобия, оценки, полученные по методу IFM, обладают свойствами асимптотической нормальности (см. [Joe, Xu (1996)] и [Joe (1997)]):

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \in N(\mathbf{0}, \mathbf{V}(\theta_0)) \quad (\text{асимптотически}),$$

где  $\theta_0$  — вектор параметров маргинальной функции распределения и копула-функции,  $\mathbf{V}(\theta_0) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{D}^{-1})^T$  — это так называемая информационная матрица Godambe, где  $\mathbf{D} = \mathbf{E}[\partial g(\theta)^T / \partial \theta]$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{E}[g(\theta)g(\theta)^T]$  и  $g(\theta)$  — некоторая так называемая score-функция.

Свойство асимптотической нормальности выполняется и для двухшаговой ДУК-оценки (см. [Engle, Sheppard (2001)]).

Поэтому, если мы рассматриваем модель ПУК, это подразумевает оценку  $n$  одномерных GARCH-моделей любого типа с нормальным распределением на первой стадии. Нормальные функции распределения нормированных остатков  $u_{i,t} = \Phi(\eta_{i,t})$  используются как аргументы нормальной копула-плотности с постоянной матрицей корреляции  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}$ . Однако так как  $\eta_t = (\Phi^{-1}(u_{1,t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{n,t}))'$ , оцениваемая постоянная матрица корреляции равна оцениваемой матрице корреляции стандартизированных остатков в ПУК-модели.

Аналогичным образом, если мы рассмотрим ДУК-модель, нормальная кумулятивная функция распределения и ее обратная функция нейтрализуют друг друга, и логарифмическое правдоподобие копула-плотности максимизируется в предположении, что справедлива следующая динамическая структура для корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_t$ :

$$\mathbf{R}_t = (\text{diag} \mathbf{Q}_t)^{-1/2} \mathbf{Q}_t (\text{diag} \mathbf{Q}_t)^{-1/2},$$

где симметричная положительно определенная матрица  $\mathbf{Q}_t$  размерности  $(n \times n)$  равна:

$$\mathbf{Q}_t = \left( 1 - \sum_{l=1}^L \alpha_l - \sum_{s=1}^S \beta_s \right) \bar{\mathbf{Q}} + \sum_{l=1}^L \alpha_l \eta_{t-l} \eta'_{t-l} + \sum_{s=1}^S \beta_s \mathbf{Q}_{t-s}. \quad (7.8)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{Q}}$  — безусловная ковариационная матрица случайной величины  $\eta_t$ ,  $\alpha_l (\geq 0)$  и  $\beta_s (\geq 0)$  — скалярные параметры удовлетворяющие неравенству  $\sum_{l=1}^L \alpha_l + \sum_{s=1}^S \beta_s < 1$ . Эти условия необходимы для того, чтобы  $\mathbf{Q}_t > 0$  и  $\mathbf{R}_t > 0$ .  $\mathbf{Q}_t$  — ковариационная матрица для  $\eta_t$ , так как по построению  $q_{ii,t}$  не равно 1. Значит, выражением (7.8)  $\mathbf{Q}_t$  преобразуется в корреляционную матрицу. Если  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  и  $\bar{q}_{ii} = 1$ , то получим ПУК-модель. Для более подробной информации об ДУК-моделировании см.

## 1) Некоторые обобщения: маргинальные (частные) функции распределения, имеющие асимметричные $t$ -распределения, и динамические копула-функции

Итак, мы видим, что подход с помощью копула-функций позволяет нам рассмотреть намного более общие случаи, чем нормальные ПУК- и ДУК-модели.

Два хорошо известных отклонения от нормального распределения — «тяжелые хвосты» и асимметрия. Например,  $t$ -распределение Стьюдента имеет эксцесс больший, чем у стандартного нормального распределения, и это распределение было обобщено так, чтобы получившееся обобщенное распределение имело асимметрию, отличную от асимметрии нормального распределения (см. [Hansen (1994)]). Хотя были предложены и другие обобщения, мы выбрали именно это в связи с его простотой и возможностью использовать в моделировании экономических переменных (см. [Jondeau, Rockinger (2003)], [Patton (2004)], [Patton (2006a)] и [Patton (2006b)]).

Следовательно, многомерная модель, позволяющая маргинальным функциям распределения иметь асимметрию и эксцесс, отличные от асимметрии и эксцесса стандартного нормального распределения, а также иметь нормальную зависимость, может быть выражена следующим образом:

$$X_t = \mathbf{E}\{X_t|F_{t-1}\} + \mathbf{D}_t\eta_t$$

$$\eta_t \in H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Normal}(F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); \mathbf{R}_t),$$

где  $F_i^{Skewed-t}$  — функция распределения асимметричного  $t$ -распределения, а матрица  $\mathbf{R}_t$  может быть как константой, так и меняющейся во времени, так же как в ПУК- и ДУК-моделях.

Если финансовые активы демонстрируют симметричную хвостовую зависимость, то мы можем использовать копула-функцию Стьюдента

$$X_t = \mathbf{E}\{X_t|F_{t-1}\} + \mathbf{D}_t\eta_t$$

$$\eta_t \in H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Student's t}(F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); \mathbf{R}_t, \nu),$$

где  $\nu$  — число степеней свободы копула-функции Стьюдента. Если же финансовые активы могут быть распределены по  $m$  различным группам, то мы можем использовать сгруппированную  $t$ -копула-функцию:

$$X_t = \mathbf{E}\{X_t|F_{t-1}\} + \mathbf{D}_t\eta_t,$$

$$\eta_t \in H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Grouped t}(F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots,$$

$$\dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); \mathbf{R}_t, \nu)$$

Наконец, если же финансовые активы демонстрируют только «нижнюю хвостовую зависимость», мы можем использовать копула-функцию Клейтона,

$$X_t = \mathbf{E}\{X_t|F_{t-1}\} + \mathbf{D}_t\eta_t$$

$$\eta_t \in H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Clayton}(F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); \alpha_t),$$

где  $\alpha$  — параметр зависимости Клейтона, который может, вообще говоря, меняться во времени.

Подобные подходы предложены в [Patton (2004)], [Jondeau, Rockinger (2006)] и [Granger и др. (2006)]. Однако в этих работах авторы сосредотачиваются только на двумерных приложениях и не рассчитывают ГП.

## 2) Оценка границы потерь с помощью Copula-GARCH-моделей

Общий алгоритм для оценки границы потерь уровней 0,25%, 0,5%, 1%, 5%, 95%, 99%, 99,5% and 99,75% на один день вперед для портфеля  $P$ , составленного из  $n$  активов с инвестиционными позициями, равными  $M_i, i = 1, \dots, n$ , строится следующим образом.

а) Пусть дано множество значений оцененных параметров для момента времени  $(t - 1)$ , смоделируем  $N = 100\ 000$  сценариев для лог-доходностей каждого актива,  $\{y_{1,t}, \dots, y_{n,t}\}$  за период времени  $[t - 1, t]$ , используя общее метараспределение с помощью следующей процедуры:

а1) сначала сгенерируем наблюдение  $n$ -размерной случайной величины  $(u_{1,t}, \dots, u_{n,t})$  из спрогнозированной в момент времени  $t$  копула-функции  $\hat{C}_t$ , которая может быть нормальной копула-функцией,  $t$ -копула-функцией, копула-функцией Клейтона и др.;

а2) на втором шаге, получим вектор  $\mathbf{Q}_t$  размерности  $(n \times 1)$  стандартизированных лог-доходностей активов  $\eta_{i,t}$ , используя обратные функции спрогнозированных в момент времени  $t$  маргинальных функций распределения, которые могут быть нормальными распределениями, асимметричными  $t$ -распределениями и др.:

$$\mathbf{Q}_t = (\eta_{1,t}, \dots, \eta_{n,t}) = (F_1^{-1}(u_{1,t}; \hat{\alpha}_1), \dots, F_n^{-1}(u_{n,t}; \hat{\alpha}_n));$$

а3) на третьем шаге изменяем масштаб стандартизированных лог-доходностей активов, используя прогнозы для средних и дисперсий, оцененных с помощью AR-GARCH-моделей:

$$\{y_{i,t}\} = \left( \hat{\mu}_{1,t} + \eta_{1,t} \cdot \sqrt{\hat{h}_{1,t}}, \dots, \hat{\mu}_{n,t} + \eta_{n,t} \cdot \sqrt{\hat{h}_{n,t}} \right)$$

а4) наконец, повторяем эту процедуру  $N = 100\ 000$  раз.

б) Используя эти 100 000 сценариев, в момент времени  $t$  портфель  $P$  переоценивают, т. е.:

$$P_t^j = M_{1,t-1} \cdot \exp(y_{1,t}^{(j)}) + \dots + M_{n,t-1} \cdot \exp(y_{n,t}^{(j)}), \quad j = 1 \dots 100\ 000.$$

в) Для каждого сценария  $j$  рассчитывается убыток портфеля:

$$\text{Loss}_j = P_t^j - P_{t-1}, \quad j = 1, \dots, 100\ 000.$$

г) Граница потерь уровня  $\alpha$  — это  $(1 - \alpha) \cdot 100\ 000$  порядковый сценарий, где  $\alpha = \{0,25\%, 0,5\%, 1\%, 95\%, 5\%, 1\%, 0,5\%, 0,25\%\}$ . Например, ГП уровня 0,25% равна 99 750-му порядковому сценарию.

## 7.2.7. Эмпирические приложения с использованием статистического пакета R

### 1) Оценка Copula-GARCH-модели для доходностей

Мы рассмотрим ежедневные показатели доходностей индексов SP500 и DAX за период с 1994 по 2000 г. (данные файла sp\_dax.txt). Процедура оценки Copula-GARCH-модели в статистическом пакете R:

```
# Read the data
dat <- read.table("C:/sp_dax.txt", header = TRUE)
# Generate the returns in %
y1=100*diff(log(dat[,1]))
y2=100*diff(log(dat[,2]))
# Estimate the GARCH models with a Student's t distribution
fit1 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y1)
fit2 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y2)
#Have a look at what there is inside the output of the GARCH estimation
#(which is an S4 object, see p.9 of the manual by Grant Farnsworth
fit1@fit
#Get the standardized residuals
sp_res=fit1@fit$series$z
dax_res=fit2@fit$series$z
#Get the Cumulative Distribution Functions:
#Remember that the standardized residuals are (0,1), while when computing
#the cdf of a central standard Student's t, the variance is nu/(nu-2).
cdf_sp= pt(sqrt(fit1@fit$coef[5]/(fit1@fit$coef[5]-2))*sp_res,fit1@fit$coef[5])
cdf_dax=pt(sqrt(fit2@fit$coef[5]/(fit2@fit$coef[5]-2))*dax_res, fit2@fit$coef[5])
#Estimate a bivariate T copula
ellipticalCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax, type = "t")
#Estimate a bivariate Gumbel
archmCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax,type="4")
```

Для  $t$ -copula функции Стьюдента должно получиться :

```
$objective [1] -0.06653569
```

```
...,
```

а для *copula*-функции Гумбеля — такие результаты:

```
$par [1] 1.200167
```

```
$objective [1] -0.05549976
```

```
...
```

Вы можете попробовать использовать другие двумерные копула-функции, включенные в пакет «*fcopulae*», начиная с эллиптических копула-функций и кончая копула-функциями экстремальных значений.

## 2) Оценка границы потерь с помощью Copula-GARCH-модели

Рассмотрим те же данные, что и в предыдущем пункте, и рассчитаем границу потерь уровня 1% для равновзвешенного портфеля. Для описания совместного распределения доходностей мы воспользуемся *T*-копула-функцией с маргинальными (частными) функциями распределения, имеющими *t*-распределение. Программа в *R* выглядит следующим образом:

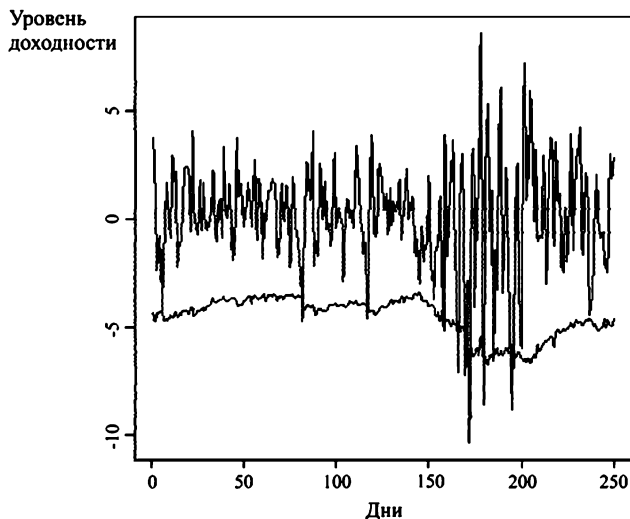
```
#I load the packages needed for my following work
library(fGarch)
library(fCopulae)
#Read the data dat <-
read.table("C:/Lezioni/Moscow_master_2_anno/COPULA/sp_dax.txt",
header = TRUE)
#Generate the returns in % REMARK: If you don't multiply for 100, the resulting
#cdf's are not precisely estimated and the elliptical copula cannot be estimated
y1_all=100*diff(log(dat[,1]))
y2_all=100*diff(log(dat[,2]))
#Initalize the vectors which will contain the realized returns
# and the VaRs estimates
var_final=
true_ret=
for (i in 1000:1249)
y1=y1_all[1:i]
y2=y2_all[1:i]
#Estimate the GARCH models
fit1 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y1, trace=FALSE)
fit2 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y2, trace=FALSE)
#1-step ahead Forecast
fore_1=predict(fit1, n.ahead = 1)
fore_2=predict(fit2, n.ahead = 1)
#Example mean forecast (DAX return)
fore_2[,1]
#Example variance forecast (DAX variance)
```

```

#Have a look at what there is inside the output of the GARCH estimation
#(which is an S4 object , see p. 9 of the manual by Grant Farnsworth fit1@fit
#Get the standardized residuals
sp_res=fit1@fitseriesz
dax_res=fit2@fitseriesz
#Get the Cumulative Distribution Functions:
#Remember that the standardized residuals are (0,1), while when computing the
cdf
#of a central standard Student's t, the variance is nu/(nu-2).
#REMARK: IF you add ARMA terms, then coef[5] is no more correct!
cdf_sp= pt(sqrt(fit1fit$coef[5]/(fit1fit$coef[5]-2))*sp_res, fit1fit$coef[5])
cdf_dax=pt(sqrt(fit2fit$coef[5]/(fit2fit$coef[5]-2))*dax_res, fit2fit$coef[5])
#Estimate a bivariate T copula
t_est=ellipticalCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax, type = "t") t_est
#Estimate a bivariate Gumbel
a_est=archmCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax, type = "4") a_est
#Simulate the estimated elliptical copula
e_sim=ellipticalCopulaSim(10000, rho = t_estpar[1],param = t_estpar[2], type =
c("t"))
#REMARK: we use only 10000 simulations for the elliptical and 1000 for the
archimedean
# since the R procedures are very slow compared to Gauss and Matlab. However,
# remember that to have a good approximation of the quantile you need at 100.000
# MC simulations!
#Simulate the estimated archimedean copula
#a_sim=archmCopulaSim(1000, alpha = a_est$par[1], type = "4")
#Simulate the standardized residuals [F_1-1(u_1),F_2-1(u_2)]
sim_std1=sqrt((fit1fit$coef[5]-2)/fit1fit$coef[5])*qt(e_sim[,1],fit1fit$coef[5])
sim_std2=sqrt((fit2fit$coef[5]-2)/fit2fit$coef[5])*qt(e_sim[,2],fit2fit$coef[5])
#Simulated returns
sim_ret1=fore_1[,1]+sqrt(fore_1[,3])*sim_std1
sim_ret2=fore_2[,1]+sqrt(fore_2[,3])*sim_std2
#Portfolio simulated returns
sim_port=sim_ret1+sim_ret2
#Sort the simulated returns
sort_sim=sort(sim_port)
#Value at Risk at 1% quantile = [0.01*(ROWS OF THE VECTOR)] sorted
#returns
var=sort_sim[0.01*NROW(sort_sim)]
#I save the estimated VaR and the realized return
var_final=rbind(var_final,var)
ret=y1_all[i+1]+y2_all[i+1]
true_ret=rbind(true_ret,ret)
#Create the hit series for the Var at 1% level and compute the sum
#for the basel test
hit01=1*(true_ret<var_final)
basel_test=sum(hit01)
#plot the true returns and the VaR
plot(true_ret,type="l",col=2,xlab="Date",ylab="True realized return and VaR at
1% level" main="VaR at 1% level of a bivariate portfolio - T marg./Norm c.")

```

Результаты отражены на рис. 7.11.



**Рис. 7.11.** ГП на уровне 1% (Copula-GARCH-модель, равновзвешенный портфель: Газпром, Лукойл, РБК, Сбербанк)

### 7.2.8. Тестирование ГП на исторических данных

Определим последовательность «успехов» ( $I_t$ ):

$$I_{t+1} = 1, \quad \text{если } Y_{t+1} < -\Gamma_\alpha(t; 1)$$

$$I_{t+1} = 0, \quad \text{если } Y_{t+1} \geq -\Gamma_\alpha(t; 1).$$

Если мы используем идеальную модель для получения оценки границы потерь ГП, то превышения  $-\Gamma_\alpha(t; 1)$  следует ожидать в доле  $(1 - \alpha)$  случаев ежедневно. При справедливости нулевой гипотезы о правильной спецификации последовательность «успехов» — последовательность независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин с вероятностью «успеха»  $\alpha$ .

$$H_0: I_{t+1} \sim \text{Bernoulli}(\alpha)$$

$$f(I_t, \alpha) = (1 - \alpha)^{1-I_{t+1}} \alpha^{I_{t+1}}.$$

#### 1) Тестирование на безусловный охват

Пусть мы хотим протестировать, отличается ли доля наблюдений  $\pi$ , меньших  $-\Gamma_\alpha$  некоторой модели риска, статистически значимо от  $\alpha$ . Функция правдоподобия для последовательности Бернулли равна:

$$L(\pi) = \prod (1 - \pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = \left( \frac{1 - \pi}{1 - \alpha} \right)^{T_0} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{T_1}$$



где  $T_0$  и  $T_1$  — число нулей и единиц в нашей выборке (а  $T = T_0 + T_1$ ). Тогда оценка максимального правдоподобия для  $\pi$  равна

$$\hat{\pi} = \frac{T_1}{T_0 + T_1}.$$

Интересующая нас гипотеза о том, что истинная доля потерь, больших границы потерь, равна  $\alpha$ , может быть проверена (в предположении независимости  $I_1, I_2, \dots$ ) с помощью статистики отношения правдоподобия

$$\begin{aligned} LR_{uc} &= -2 \ln [L(\alpha) / \ln L(\hat{\pi})] = \\ &= -2 \ln [(1 - \alpha)^{T_0} \alpha^{T_1} / \{(1 - T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1}\}] \sim \chi^2(1). \end{aligned}$$

В соответствии с теорией статистика  $LR_{uc}$  должна подчиняться  $\chi^2(1)$ -распределению при больших выборках. При малых  $T$  распределение критических значений статистики  $LR_{uc}$  могут быть получены с помощью статистического моделирования.

## 2) Тест на независимость

Возможны ситуации, когда модель проходит тест на безусловный охват, но при этом все наблюдения  $t$ , для которых  $I_t = 1$ , сконцентрированы в малой окрестности некоторого момента времени. В этом случае, возможно, нарушена независимость наблюдений, и необходим тест, с помощью которого можно было бы проверить нашу гипотезу и при наличии таких сгущений  $t$ . С этой целью предположим, что последовательность попаданий зависима по времени и что она может быть описана как так называемая марковская последовательность первого порядка с матрицей вероятностей переходов

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01}, \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11}, \pi_{11} \end{pmatrix},$$

где  $\pi_{01}$  — вероятность того, что завтра  $I_{t+1} = 1$ , при условии, что сегодня  $I_t = 0$ . Вероятность  $\{I_t = 0, I_{t+1} = 0\}$  равна  $(1 - \pi_{01})$ , а вероятность события  $\{I_t = 0, I_{t+1} = 1\}$  равна  $(1 - \pi_{11})$ .

Для выборки  $T$  наблюдений из марковского процесса первого порядка функция правдоподобия равна

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}},$$

где  $T_{ij}$  — число наблюдений, для которых  $I_t = i$  и  $I_{t+1} = j$ . Беря первую производную по  $\pi_{01}, \pi_{11}$  и приравнивая эти производные к нулю, получим оценки максимального правдоподобия :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{01} &= \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}, \\ \hat{\pi}_{11} &= \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что вероятности должны давать в сумме единицу, мы получим

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{00} &= 1 - \hat{\pi}_{01}, \\ \hat{\pi}_{10} &= 1 - \hat{\pi}_{11}.\end{aligned}$$

Допущение о зависимости «последовательности попаданий» соответствует допущению, что  $\pi_{01}$  должно отличаться от  $\pi_{11}$ : в нашем случае типичной будет ситуация, при которой  $\pi_{11} > \pi_{01}$ .

Если, с другой стороны, попадания независимы, тогда мы имеем  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$ . При условии независимости оцененная матрица перехода равна

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi}, & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi}, & \hat{\pi} \end{pmatrix}.$$

Мы можем тестировать независимость, используя тест отношения правдоподобия:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[ L(\hat{\pi}) / L(\hat{\Pi}_1) \right] \sim \chi^2(1).$$

В случае, если оказалось, что  $T_{11} = 0$ , функция правдоподобия примет вид

$$L(\hat{\Pi}_1) = (1 - \hat{\pi}_{01})^{T_{00}} \hat{\pi}_{01}^{T_{01}}.$$

### 3) Тестирование на условный охват

Наконец, если нам необходимо протестировать одновременно гипотезу о том, что  $I_1, I_2, \dots$  образует последовательность независимых случайных величин и что доля нулей этой последовательности согласуется с предположением нашей модели (т. е. равна  $1 - \alpha$ ), то мы можем воспользоваться тестом «на условный охват»:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[ L(\alpha) / L(\hat{\Pi}_1) \right] \sim \chi^2(2),$$

который соответствует тестированию гипотезы  $\pi_{01} = \pi_{11} = \alpha$ . Необходимо помнить, что

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}.$$

### 4) Базельский тест для моделей ГП

Этот тест основан на числе потерь, больших, чем оценка однодневной границы потерь 1%-ного уровня. Длина периода тестирования равна 250 дням.

*Масштабный множитель*, на который должна быть умножена оценка  $ГП_{0,01}(t, 1)$  при расчете требуемого банку объема капитала, определяется нормативно в зависимости от результатов теста (см. табл. 7.1).

Отметим, что это односторонний тест, направленный на то, чтобы определять уровни очень малого риска.

**Таблица 7.1.** Определение масштабного множителя

Зоны	Число наблюдений, меньших $ГП_{0,01}(t, 1)$	Масштабный множитель
Зеленая зона	0–4	3
Желтая зона	5	3,4
Желтая зона	6	3,5
Желтая зона	7	3,65
Желтая зона	8	3,75
Желтая зона	9	3,85
Красная зона	$\geq 10$	4

Уровень рыночного рискованного капитала (MRC), который банк должен иметь в момент  $t$ , равен максимуму из  $ГП_{0,01}(t - 1, 1)$  и среднего  $ГП_{0,01}(t, 1)$  за 60 последних периодов, умноженного на так называемый масштабный параметр  $SF$ , а именно:

$$MRC = \text{Max} \left( ГП_{0,01}(1, t - 1), SF \cdot \frac{1}{60} \cdot \sum_{t=1}^{60} ГП_{0,01}(1, t - 1 - i) \right).$$

### 7.3. Управление операционным риском

Количественный анализ операционного риска — это относительно недавняя область изучения, возникшая в рамках количественного управления рисками (см. [King (2001)] и [Cruz (2002)]). Проблема изучения операционного риска возникла в момент, когда было обнаружено, что ни управление рыночным риском, ни управление кредитным риском не позволяет хеджировать все возможные события, влияющие на экономические и финансовые результаты работы финансовых организаций.

Развитие этой области напрямую связано с новой концепцией достаточности капитала, также называемой Базель II-соглашением. В этом разделе будут представлены и рассмотрены основные методологии расчета достаточности капитала, требуемого в рамках управления операционным риском.

Во Втором базельском соглашении операционный риск определяется как «*риск убытков в результате неадекватной или ошибочной работы процессов, персонала, систем или в результате внешних воздействий*». Для того чтобы классифицировать все возможные операционные риски, во Втором базельском соглашении (см. [BCBS(2003)]) выделены семь типов событий (ТС) и восемь бизнес-направлений (БН),

Однако в Базель II-соглашении не представлено четких моделей для анализа и агрегирования рисков по всем ТС и БН. Оно лишь описывает некоторые основные правила, которым должно следовать каждое финансовое учреждение: уровень доверия, временной горизонт и анализ некоторых зависимостей. В частности, в Базель II-соглашении для анализа операционных рисков требуется одногодичный временной горизонт и уровень доверия, равный 99,9%. Что касается анализа зависимостей, он еще не вполне развит, поэтому каждый банк должен следовать более консервативным моделям агрегирования: ТС, как предполагается, должны быть комонотонны<sup>13</sup>, а при агрегировании используется простая сумма «границ потерь» ( $ГП_\alpha$ ) для каждого сочетания ТС и БН.

**Таблица 7.2.** Типы событий и бизнес-направлений, составленные в соответствии со Вторым базельским соглашением

<i>Типы событий (ТС)</i>
Внутренние махинации Внешние махинации Служебная практика и безопасность рабочего места Клиенты, продукты и деловая практика Ущерб, причиненный физическими активами Перерывы в хозяйственной деятельности, отказы системы и исполнение Доставка и система управления процессами
<i>Бизнес-направления (БН)</i>
Корпоративные финансы Торговля и продажи Банковская розница Банковская коммерция Платежи и урегулирование Агентские услуги Управление активами Розничные брокерские услуги

В этом разделе при помощи различных подходов мы вычислим величину достаточного рискового капитала: мы начнем с базовых подходов и завершим недавно предложенными моделями канонической агрегации, основанной на понятии копула-функций (см. [Di Clemente, Romano (2004)], [Fantazzini et al. (2007)] и [Fantazzini et al. (2008b)]), пуассоновской моделью шоков (см. [Embrechts, Puccetti (2007)], [Rachedi, Fantazzini (2008)]), а также байесовскими методами (см. [Dalla Valle, Giudici (2008a)], [Dalla Valle (2008)]).

<sup>13</sup>Случайные величины  $X_1, \dots, X_d$  называются комонотонными, если найдутся такие возрастающие функции  $v_1, \dots, v_d$  и случайная величина  $Z$ , что функция распределения случайного вектора  $(X_1, \dots, X_d)$  совпадает с функцией распределения случайного вектора  $(v_1(Z), \dots, v_d(Z))$ .



лее того, банк должен иметь независимую функцию управления операционными рисками, которая отвечает за разработку и функционирование структуры управления операционными рисками. Внутренняя банковская система управления операционным риском должна быть тесно интегрирована в систему повседневного управления рисками с топ-менеджментом и советом директоров. Банковская система управления операционными рисками должна быть хорошо документирована и должна регулярно проверяться как внутренними, так и внешними аудиторами.

Что касается количественных требований, относящихся к подходу УМИР, Базельский комитет указывает, что *«...учитывая продолжающееся развитие аналитических подходов к анализу операционного риска, комитет не оговаривает какой-либо определенный подход или предположения относительно распределения, которое, в целях регулирования, следует использовать для генерации меры операционного риска. Тем не менее банк должен быть в состоянии показать, что используемый им подход учитывает потенциально возможные события, влекущие за собой большие убытки. Какой бы подход ни использовался, банк должен продемонстрировать, что используемая им мера операционного риска соответствует разумным стандартам, используемым в подходах к построению внутренних рейтингов для кредитного риска (то есть сопоставима с 99,9-процентным доверительным интервалом, рассчитанным для одногодичного периода)... Комитет признает, что УМИР — это достаточно гибкий стандарт, дающий банкам возможность развивать как систему измерения операционного риска, так и систему управления. Вместе с тем в развитии этих систем банки должны придерживаться строгих процедур как при разработке моделей операционного риска, так и при реализации утвержденной модели. Прежде чем начать внедрение того или иного подхода, Комитет предполагает провести обзор передового опыта в данной области относительно достоверности и устойчивости оценок возможных операционных убытков. Комитет также рассмотрит накопленные данные и уровень достаточности капитала, определенного в соответствии с УМИР-подходом измерения, и в случае необходимости может внести некоторые поправки».*

В том же документе Базельский комитет заявляет, что *«...система учета банковских рисков должна ...учитывать все основные факторы операционного риска, влияющие на форму хвоста оценок потерь».* Это означает, что любая модель, предлагаемая в рамках УМИР-подхода должна учитывать возможность экстремальных событий. Кроме того, в этом же документе говорится, что *«...для расчета минимального*

оценки меры операционного риска. Однако банку может быть разрешено использование внутренне определенных корреляций убытков между отдельными оценками операционного риска, если, к удовлетворению национальных надзорных органов, системы, определяющие корреляции, надежны, хорошо интегрированы и учитывают неопределенность каждой из оценок корреляций (особенно в кризисные периоды). Он должен подтвердить свои предположения относительно корреляции с использованием соответствующих количественных и качественных методов». Этот комментарий подчеркивает возможность диверсификации операционных рисков. Тем не менее установлено, что в кризисные периоды, т. е. в периоды, когда почти все функционирует некорректно, это может быть невозможным.

Далее в документе представленном Базельским комитетом, рассматриваются требования к данным, необходимым для системы контроля внутренних рисков. Данные по внутренним убыткам имеют важное значение для надежного моделирования профиля операционного риска организации. Излишне упоминать о том, что создание базы исторических данных об убытках крайне необходимо при переходе к УМИР-подходу для управления операционными рисками. База данных по банковским внутренним потерям должна соответствовать определенным стандартам, установленными Комитетом: «...банковские данные по внутренним убыткам должны быть достаточно подробными, поскольку должны отражать как всю банковскую деятельность, так и воздействие на нее всех соответствующих подсистем и географического местоположения. Банк должен уметь обосновывать, что исключение любой деятельности или воздействия, как отдельно взятой (взятого), так и в сочетании, не будут иметь существенного влияния на оценку совокупного риска. Для собранных данных о внутренних убытках банк должен иметь соответствующий порог минимального валового убытка, например 10 000 евро. Величина этого порога может варьироваться как от банка к банку, так и внутри банка, в зависимости от банковских бизнес-направлений и (или) типов событий. Тем не менее величины отдельных порогов должны быть в целом согласованы с соответствующими порогами, используемыми в равноценных банках».

Понятие порога становится особенно важным, когда данные из различных банков объединяются в единую базу или когда внешние данные объединяются с внутренними данными банка, и это должно быть сделано в строго систематизированной форме для того, чтобы избежать потери информации о существенных операционных убытках.

### 7.3.2. Подход базовых индикаторов (ПБИ)

Банкам, использующим подход базовых индикаторов, необходимо отложить резервный капитал, равный фиксированной доле (обозначенной через  $q$ ) от положительного годового валового дохода (ВД). Если же годовой валовой доход отрицателен или равен нулю, то он должен быть исключен из рассмотрения при вычислении среднего. Таким образом, резервный капитал под операционный риск в год  $t$  дается выражением<sup>14</sup>:

$$RC_{BI}^t = \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^3 q \max(GI^{t-i}, 0),$$

где  $Z_t = \sum_{i=1}^3 I_{\{GI^{t-i} > 0\}}$  и  $GI^{t-i}$  обозначает валовой доход за  $(t - i)$ -й год. Отметим, что резервный капитал под операционный риск рассчитывается ежегодно. БИ-подход дает довольно простую, основанную на размере капитала процедуру расчета резервных средств.

Базельский комитет по-прежнему занимается сбором данных в целях определения фиксированной доли  $q$ , которая вычисляется как среднее из долей операционных резервных капиталов 12% банков, характеризующихся минимальными операционными резервными капиталами. Целевой уровень в 12% соответствует данным, полученным в рамках «Исследования количественного воздействия» (ИКВ), проведенного Базельским комитетом. В этом исследовании рассматривалась выборка из 41 банка. В частности, оказалось, что среднее отношений операционного капитала к экономическому капиталу<sup>15</sup> по каждому из рассматриваемых банков равно 14,9%. Как это описано Базельским комитетом, цифра в 12% была выбрана для того, чтобы *«калибровать капитал при помощи, в некоторой степени, менее жесткого по сравнению с интервальным экономическим капиталом, но разумного стандарта»*. После установления 12%-ного целевого уровня был произведен анализ зависимости между целевым операционным резервным капиталом и валовым доходом на основе выборки, включающей данные по 140 банкам из 24 стран. После проведения этих и иных ИКВ Базельский комитет предложил  $q = 15\%$ .

Схема БИ-подхода иллюстрирует классический подход «сверху-вниз», который калибрует капитал так, чтобы задавать общее требование к резервному капиталу. Этот подход отличается от так называемого подхода «снизу-вверх», в соответствии с которым размер резервного

<sup>14</sup>Предполагается, что описанная процедура приемлема только для тех банков, которые не имели трехлетних периодов функционирования с отрицательным или нулевым ВД.

<sup>15</sup>Экономический капитал — это капитал, необходимый для адекватного покрытия всех рисков, принимаемых конкретным банком.



капитала определяется на основании истории фактических убытков и которому в настоящее время Базельский комитет отдает предпочтение.

### 7.3.3. Стандартизированный подход (СП)

Подход БИ предназначен для реализации в крупных банках. Переход же к стандартизированному подходу требует от банка учета валового дохода по каждому из бизнес-направлений отдельно. Модель разделяет восемь бизнес-направлений: корпоративные финансы, торговля и продажи, банковская розница, банковская коммерция, платежи и урегулирование, агентские и депозитарные услуги, управление активами и брокерские услуги. Для каждого бизнес-направления рассчитывается резервный капитал, величина которого равна валовому доходу по рассматриваемому бизнес-направлению, умноженному на множитель, обозначенный через  $\beta$  (для каждого из бизнес-направлений свой). Суммарный резервный капитал  $RC_{SA}^t$  в  $t$ -й год рассчитывается как трехгодичное среднее неотрицательных валовых доходов, а именно:

$$RC_{SA}^t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \max \left[ \sum_{j=1}^8 \beta_j GI_j^{t-i}, 0 \right]. \quad (7.9)$$

Заметим, что в формуле (7.9) в любой фиксированный год ( $t - i$ ) отрицательное значение резервного капитала по некоторому бизнес-направлению  $j$  (отрицательное значение возникает из-за отрицательности валового дохода по этому направлению) может быть компенсировано за счет положительных резервных капиталов по другим бизнес-направлениям. Взаимозачеты такого рода должны побудить банки к переходу от подхода БИ к СП. В табл. 7.3 представлены бета-множители для каждого из бизнес-направлений. В работе [Moscadelli (2004)] представлен критический анализ этих бета-множителей, основанный на информационной базе по более чем 47 000 операционным убыткам (второе ИКВ лета 2002 г.).

Стандартизированный подход — это обобщение подхода БИ с определенным  $\beta$  для каждого из бизнес-направлений. В рамках этих двух подходов Комитет планирует дальнейшую разработку основополагающих принципов. Кроме того, по усмотрению национальных надзорных органов в вышеизложенные правила могут вноситься незначительные изменения (часто более консервативные).

**Таблица 7.3.** Бета-множители для стандартизированного подхода

Бизнес-направления	Бета-множители, %
Корпоративные финансы	18
Торговля и продажи	18
Банковская розница	12
Банковская коммерция	15
Платежи и урегулирование	18
Агентские и депозитарные услуги	15
Управление активами	12
Брокерские услуги	12

### 7.3.4. Введение в подход, основанный на усовершенствованных моделях измерения риска (УМИР-подход)

Наиболее совершенный из трех подходов регулирующего операционного рискового капитала — это УМИР-подход. Этот подход позволяет банкам использовать собственную внутреннюю систему управления операционным риском для расчета минимального уровня регулирующего капитала с учетом количественных и качественных стандартов, установленных регуляторами. Однако как в случае рыночного и кредитного риска, внедрение УМИР возможно только при условии одобрения и непрерывного контроля качества со стороны национальных надзорных органов. В соответствии с предъявляемыми требованиями банк должен отразить убытки по каждому бизнес-направлению и типу события. В частности, банки, как ожидается, объединяют внутренние регулярные, высокочастотные убытки, так же как и соответствующие внешние нерегулярные низкочастотные убытки. Более того, банки должны дополнить свои отчеты описанием кризисных ситуаций как на уровне серьезности ущерба, так и на уровне зависимости между разными видами убытков. При отсутствии детализированных совместных моделей для различных видов убытков мера риска совокупного убытка должна рассчитываться как сумма соответствующих мер риска убытков по каждой категории.

В Базельском соглашении от 2001 г. в рамках УМИР-подхода Комитет описывает три метода.

- **Подход внутренних изменений (ВИ-подход).** В соответствии с этим методом резервный капитал по операционным рискам зависит от суммы ожидаемых и непредвиденных убытков: ожидаемые убытки рассчитываются с использованием исторических данных банка, а непредвиденные убытки находятся путем умножения ожидаемых убытков на



ков за некоторый промежуток времени, а степень убытка  $k$ -го случая определим как величину соответствующего убытка. Формально для каждого типа риска  $i$  (т. е. типа, отвечающего некоторому пересечению БН/ТС) операционные убытки, накопленные за  $t$ -й период времени, где  $t = 1, \dots, M$ ,  $M$  — число периодов времени, могут быть определены как сумма  $S_{it}$  случайного числа  $n_{it}$  убытков  $(X_{ij}(t))$ ,  $j = 1, \dots, n_{it}$ :

$$S_{it} = X_{i1}(t) + X_{i2}(t) + \dots + X_{in_{it}}(t).$$

Отметим, что для каждого пересечения БН/ТС суммарный убыток, накопленный за  $t$ -й период, может быть представлен в следующем виде:

$$S_{it} = s_{it} \cdot n_{it},$$

где  $n_{it}$  — частота операционных убытков, а  $s_{it}$  — средний убыток  $i$ -го пересечения за  $t$ -й период времени.

РУ-подход предполагает, что для каждого  $t$ -го периода времени:

- индивидуальные убытки  $\{X_{ij}(t)\}$ , где  $t = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, n_{it}$ , — независимые и одинаково распределенные случайные величины;
- случайная величина  $n_{it}$  не зависит от случайных величин  $X_{ij}$ , где  $t = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, n_{it}$ ;
- $s_{it}$ , где  $t = 1, \dots, M$ , — независимые и одинаково распределенные случайные величины.

Для заданного ( $i$ -го) пересечения БН/ТС мы строим дискретную функцию распределения числа убытков  $n_{it}$  за  $t$ -й период и  $\hat{n}_{it}$  штук непрерывных вероятностных плотностей величин убытков  $X_{ij}(t)$  (где  $\hat{n}_{it}$  — наблюдаемое значение частоты убытков  $i$ -го пересечения за  $t$ -й период; обозначим через  $\hat{x}_{ij}(t)$  наблюдаемый  $j$ -й убыток  $i$ -го пересечения за  $t$ -й период). Для каждого пересечения  $i$  функция правдоподобия наблюдений  $\hat{\mathbf{n}}_i = (\hat{n}_{i1}, \dots, \hat{n}_{iM})$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{i1}(1), \hat{x}_{i2}(1), \dots, \hat{x}_{i\hat{n}_{i1}}(1), \hat{x}_{i1}(M), \hat{x}_{i2}(M), \dots, \hat{x}_{i\hat{n}_{i2}}(M), \dots, \hat{x}_{i1}(M), \hat{x}_{i2}(M), \dots, \hat{x}_{i\hat{n}_{iM}}(M))$  имеет вид:

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i | \theta_i, \eta_i) = \prod_{t=1}^M \left[ \prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} f(\hat{x}_{ij}t) | \eta_i \right] p(\hat{n}_{it} | \theta_i), \quad (7.10)$$

где  $p(\hat{n}_{it} | \theta_i)$  — вероятность возникновения  $\hat{n}_{it}$  убытков для  $i$ -го пересечения в  $t$ -й период времени, а через  $\theta_i$  обозначен вектор-параметр этой вероятности;  $f(\hat{x}_{ij}(t) | \eta_i)$  — плотность величины убытка  $i$ -го пересечения в точке  $\hat{x}_{ij}(t)$ , а  $\eta_i$  обозначает вектор-параметр этой плотности.

В РУ-подходе частота возникновения убытков за некоторый временной период может быть смоделирована при помощи пуассоновского или отрицательного биномиального распределения. Отрицательное биномиальное распределение может быть получено из пуассоновского

распределения, если предположить, что параметр последнего не детерминированная величина, а случайная, имеющая гамма-распределение. Другими словами, отрицательное биномиальное распределение может быть представлено как смесь пуассоновского и гамма-распределений. Для моделирования величины убытка можно использовать экспоненциальное распределение, Парето-распределение, гамма-распределение или обобщенное Парето-распределение (ОПР) (см. ниже). Функция распределения  $F_{it}$  суммарных операционных убытков  $S_{it}$  для  $i$ -го пересечения между бизнес-направлениями и типами событий за  $t$ -й период может быть получена сверткой распределения частоты и распределений величин убытка. Однако следует отметить, что представление в аналитическом виде этого распределения — весьма сложная задача. По этой причине стало обычной практикой аппроксимировать это распределение методом Монте-Карло, а именно: из некоторых теоретических распределений много раз (например,  $10^6$  раз) генерируется число убытков и соответствующие величины убытков; после чего в каждом из смоделированных случаев рассчитывается суммарный убыток и по совокупности смоделированных суммарных убытков строится эмпирическая функция распределения, которая и аппроксимирует функцию распределения суммарных операционных убытков  $i$ -го пересечения за  $t$ -й период.

Если у нас есть функция распределения суммарного операционного убытка для  $i$ -го пересечения, по ней можно оценить такие меры риска, как *граница потерь (ГП)*, *среднее ожидаемых потерь (СОП)*, и на основании этих оценок определить величину резервного капитала для  $i$ -го пересечения на следующий период. После того как оценены ГП для каждого пересечения БН/ТС, рассчитывается граница потерь для всей совокупности операционных рисков (совокупная граница потерь), которая обычно вычисляется как сумма ГП всех пересечений БН/ТС, а тем самым предполагается, что суммарные убытки  $S_{it}$  комонотонны. Излишне говорить о том, что такое предположение нереалистично. Из теоремы Шкляра (см. [Sklar (1959)]) в силу комонотонности суммарных убытков следует, что:

$$H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) = \min(F_{S_{1t}}(x_1), \dots, F_{S_{Rt}}(x_R)),$$

где  $H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(\cdot)$  — совместное распределение вектора суммарных убытков  $S_{it}$ ,  $i = 1, \dots, R$ , а  $F_{S_{it}}(\cdot)$  — кумулятивная функция распределения суммарного убытка  $S_{it}$ .

### 1) Модель для частоты возникновения убытков

Анализ убытков по операционным рискам подразделяется на построение модели частоты возникновения убытков и построение модели

величины среднего убытка. Учитывая тот факт, что убытки возникают в нерегулярные моменты времени, мы будем использовать дискретные распределения для описания частоты возникновения убытков. В стандартном РУ-подходе в качестве моделей для частоты возникновения убытков используется либо однородное пуассоновское распределение, либо отрицательное биномиальное распределение.

**Пуассоновское** распределение дает вероятность реализации определенного числа событий за фиксированный интервал времени при условии, что эти события происходят с известной интенсивностью и вероятность реализации следующего события не зависит от времени, прошедшего с момента реализации предыдущего.

Если ожидаемое число реализованных событий за определенный период времени равно  $\lambda$ , тогда вероятность того, что число реализованных событий  $n_{it}$  в точности равно  $k$  ( $k$  — некоторое неотрицательное целое,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) задается формулой

$$P \{n_{it} = k | \lambda\} = p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Обозначим пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$  через *Poisson* ( $\lambda$ ). Для этого распределения  $E(n_{it}) = D(n_{it}) = \lambda$ . Таким образом, число реализованных событий флуктуирует около своего среднего  $\lambda$  со стандартным отклонением  $\sigma_{n_{it}} = \sqrt{\lambda}$ . Эти флуктуации обычно называют пуассоновским шумом.

Альтернативным распределением для моделирования частоты  $n_{it}$  является **отрицательное биномиальное распределение**. Это распределение имеет два действительных параметра  $p$  и  $r$ , где  $0 < p < 1$  и  $r > 0$ . Обозначим отрицательное биномиальное распределение с параметрами  $p$  и  $r$  через *negBin*( $r, p$ ). Распределение вероятностей для *negBin*( $r, p$ ) имеет следующий вид:

$$P \{n_{it} = k | \lambda\} = p(k; r, p) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots,$$

где  $\binom{k+r-1}{k}$  — число сочетаний из  $(k+r-1)$  элементов по  $k$ , т. е.

$$\binom{k+r-1}{k} = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r)},$$

где  $\Gamma(k) = (k-1)!$ .

Следует отметить, что отрицательное биномиальное распределение с параметрами  $r$  и  $r/(\lambda+r)$  при  $r \rightarrow \infty$  сходится к пуассоновскому

распределению с параметром  $\lambda$ :

$$Poisson(\lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} negBin(r, r/(\lambda + r)).$$

При такой параметризации  $r$  отвечает за отклонение от пуассоновского распределения. Поэтому отрицательное биномиальное распределение — весьма приемлемая и содержательная альтернатива пуассоновскому распределению. Это распределение сходится к пуассоновскому распределению при бесконечно больших  $r$ , но при малых  $r$  имеет большую дисперсию, чем пуассоновское распределение.

Параметры этих распределений могут быть оценены по эмпирическим данным при помощи *метода моментов* или *метода максимального правдоподобия*. Что касается оценки параметра пуассоновского распределения для  $i$ -го пересечения, если мы воспользуемся методом моментов, то получим следующую оценку этого параметра:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}.$$

Если же пользуемся методом максимального правдоподобия, то нам необходима функция правдоподобия, которая принимает следующий вид:

$$L(\hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i) = \frac{e^{-M\lambda_i} \lambda_i^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}}{\prod_{t=1}^M \hat{n}_{it}!}.$$

Логарифмическая функции правдоподобия дается выражением

$$\ln L(\hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i) = -M\lambda_i + \left( \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} \right) \ln \lambda_i - \ln \prod_{t=1}^M \hat{n}_{it}!,$$

а производная по  $\lambda$  логарифмической функции правдоподобия равна

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = -M + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}.$$

Приравнивая эту производную к нулю

$$-M + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} = 0$$

и решая это уравнение относительно  $\lambda_i$ , получим оценку максимального правдоподобия, которая равна

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}.$$

Таким образом, в этом случае, используя оба метода, мы получим одинаковые результаты.

Что касается отрицательного биномиального распределения, в условиях относительно малых выборок метод моментов обычно предпочтительнее метода максимума правдоподобия в силу проблемы сходимости. Учитывая, что

$$E(n_{it}) = r_i \frac{1 - p_i}{p_i}, \quad D(n_{it}) = r_i \frac{1 - p_i}{p_i} \left( 1 + \frac{1 - p_i}{p_i} \right),$$

мы имеем

$$\mu_1 = r_i \frac{1 - p_i}{p_i}, \quad \mu_2 = r_i \frac{1 - p_i}{p_i} \left( 1 + \frac{1 - p_i}{p_i} \right) + \left( r_i \frac{1 - p_i}{p_i} \right)^2,$$

где  $\mu_1$  — первый момент, а  $\mu_2$  — второй момент. Применяя метод моментов, мы получим следующие оценки параметров  $r_i$  и  $p_i$ :

$$\hat{r}_i = \frac{\hat{\mu}_1^2}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 - \hat{\mu}_1}, \quad \hat{p}_i = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2},$$

где оценки для  $\hat{\mu}_1$  и  $\hat{\mu}_2$  вычисляются следующим образом:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} \quad \text{и} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}^2.$$

Вместе с тем мы подчеркиваем, что методы стохастического моделирования (см. [Fantazzini et al. (2008в)]) показывают, что пуассоновское распределение дает устойчивые оценки даже в условиях малых выборок, в то время как результаты, показываемые отрицательным биномиальным распределением, значительно отличаются. При  $M = 72$  симуляциях отрицательное биномиальное распределение дает некорректные оценки в 40% случаев, а средний квадрат ошибки и коэффициент вариации имеют большие значения. Более того, даже при  $M = 2000$  смоделированных наблюдениях оценки для  $r_i$  неустойчивы, а коэффициент вариации по-прежнему много больше 0,1. Не публикуемые здесь результаты моделирования показывают, что оценки стабилизируются вокруг действительных значений только при более чем 5000 смоделированных



## 2) Моделирование величины убытка

Закон распределения величины  $X_{ij}(t)$   $j$ -го убытка ( $j = 1, 2, \dots, n_{it}$ ), наблюдаемого в период  $t$  в условиях  $i$ -го пересечения БН/ТС, может быть описан при помощи широкого спектра непрерывных распределений, начиная от экспоненциального распределения и кончая обобщенным Парето-распределением (ОПР).

Обозначим через  $\hat{x}_{ij}(t)$  наблюдаемый  $j$ -й убыток  $i$ -го пересечения за  $t$ -й период, где  $t = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, n_{it}$ .

Одной из возможных моделей, с помощью которых можно попытаться описать распределение случайной величины  $X_{ij}(t)$ , является *двухпараметрическое гамма-распределение*, функция плотности которого имеет вид:

$$\varphi(x|\alpha_i, \vartheta_i) = \frac{\left(\frac{1}{\vartheta_i}\right)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i-1} e^{-x/\vartheta_i} \quad (x > 0),$$

где параметры  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  удовлетворяют условиям  $\alpha_i > 1$ ,  $\beta_i > 0$ , а  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера, т. е.

$$\Gamma(\alpha_i) = \int_0^{\infty} z^{\alpha_i-1} e^{-z} dz.$$

Взяв эту функцию плотности и применив метод моментов, получим следующие оценки ее параметров

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\left( \frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right)^2}{\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^2(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} - \left( \frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right)^2},$$

$$\hat{\vartheta}_i = \frac{\left( \frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^2(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right) - \left( \frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right)^2}{\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}}.$$

Другим приемлемым распределением для моделирования величины убытка  $i$ -го пересечения за период  $t$  является *экспоненциальное* распределение. Плотность этого распределения может быть получена из плотности гамма-распределения, если в последнем взять  $\alpha_i = 1$ ,  $\theta_i = \lambda_i$ , т. е. плотность экспоненциального распределения равна

$$\varphi(x|\lambda_i) = \frac{1}{\lambda_i} e^{-\frac{1}{\lambda_i}x}, \quad \lambda_i > 0.$$

Оценка методом моментов параметра  $\lambda_i$  равна:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}.$$

Кроме того, величину убытка  $X_{ij}(t)$  можно моделировать при помощи *Парето-распределения*, плотность которого равна:

$$\varphi(x|\alpha_i, \vartheta_i) = \frac{\alpha_i}{\vartheta_i} \left(\frac{\vartheta_i}{x}\right)^{\alpha_i+1}, \quad x > \vartheta_i, \quad \alpha_i > 2, \quad \vartheta_i > 0.$$

Заметив, что

$$\mathbf{E}(X_{ij}(t)) = \frac{\alpha_i}{(\alpha_i - 1)} \theta_i \quad \text{и} \quad \mathbf{D}(X_{ij}(t)) = \frac{\alpha_i \vartheta_i^2}{(\alpha_i - 1)^2 (\alpha_i - 2)},$$

и применив метод моментов, мы получим следующие оценки параметров:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\left(\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}\right)^2}{\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^2(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} - \left(\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}\right)^2} + 2 \quad \text{и} \quad \hat{\vartheta}_i = \frac{(\hat{\alpha}_i - 1)^2}{\hat{\alpha}_i} \left(\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}\right)^2.$$

Учитывая экстремальный характер операционных убытков, хвост распределения величины убытка может быть смоделирован при помощи распределений, рассматриваемых в *теории экстремальных значений* (ТЭЗ). В ТЭЗ анализируются редкие события. В финансы и страхование эта теория пришла из гидрологии как для прогнозирования редких событий, так и для построения более устойчивых моделей непредвиденных экстремальных событий.

ТЭЗ позволяет нам отказаться от парадигмы гауссовского распределения для операционного риска, сосредоточив особое внимание на хвосте этого распределения. Это становится особенно важным, когда рассчитываются такие меры риска, как ГП или СОП при больших доверительных уровнях, например в случае операционных рисков при 99,9%-ном доверительном уровне.

ТЭЗ утверждает, что распределение убытков, превышающих некоторый высокий порог  $u$ , асимптотически (по  $u$ ) стремящихся к максимально допустимым значениям, которые, в частности, могут быть и  $+\infty$ , сходится к обобщенному распределению Парето, кумулятивная функция распределения которого обычно выражается в следующем виде:

$$GPD_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0; \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

В нашем случае мы полагаем  $y = x - u$ , при этом  $y \geq 0$ , если  $\xi \geq 0$ , и  $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ , если  $\xi \leq 0$ ;  $y$  называют остатком, а  $x$  называют *превышением*. Условную функцию распределения остатка от аргумента  $y$  можно определить как функцию от  $x$ :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Параметр  $\xi$  в обобщенном Парето-распределении играет определяющую роль:

- при  $\xi = 0$  ОПР совпадает с экспоненциальным распределением;
- при  $\xi < 0$  ОПР совпадает с распределением Парето II типа;
- при  $\xi > 0$  ОПР совпадает с распределением Парето I типа.

Более того, этот параметр напрямую связан с существованием конечных моментов распределений убытков. При этом

$$E(x^k) = \infty, \quad \text{если } k \geq 1/\xi.$$

Следовательно, в случае, если ОПР совпадает с распределением Парето I типа и  $\xi \geq 1$ , мы имеем бесконечное среднее (см. [Neslehova, Embrechts et al. (2006)]).

Следуя работам [Di Clemente, Romano (2004)] и [Fantazzini et al. (2008в)], мы предлагаем моделировать величину  $j$ -го убытка  $i$ -го пересечения за период  $t$ , обозначенную через  $X_{ij}(t)$ , на правом хвосте при помощи ОПР, а для остальных значений — при помощи логнормального

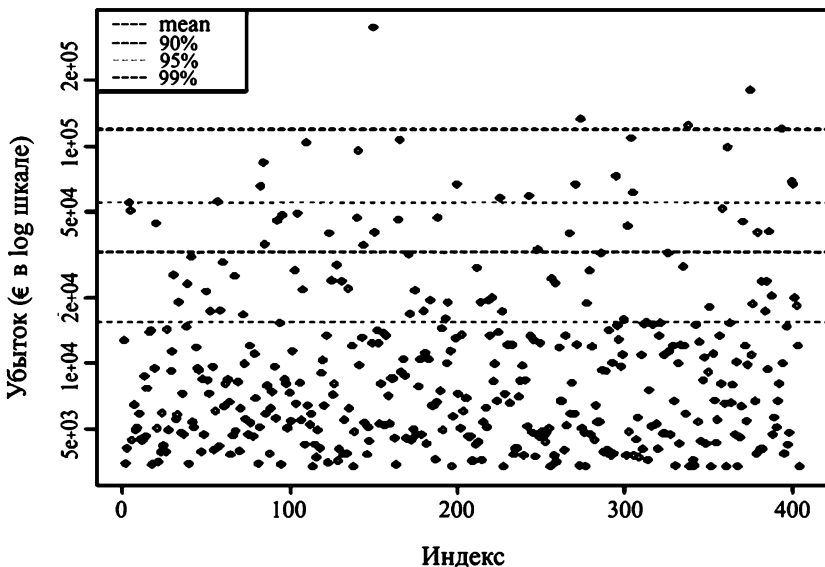
распределения. А именно, при помощи следующего распределения:

$$F_i(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_i}{\sigma_i}\right), & 0 < x < u_i; \\ 1 - \frac{N_{u,i}}{N_i} \left(1 + \frac{\xi_i}{\beta_i}(x - u_i)\right)^{-1/\xi_i}, & u_i \leq x, \end{cases}$$

где  $\Phi$  — функция стандартного нормального распределения,  $N_{u,i}$  — число убытков, превышающих уровень  $u_i$ ,  $N_i$  — число наблюдаемых убытков  $i$ -го типа, а  $\beta_i$  и  $\xi_i$  — параметры ОНР.

Например, графический анализ третьего ТС (см. табл. 7.2), представленный на рисунках 7.12 и 7.13 (из работы [Rachedi, Fantazzini (2008)]), явно свидетельствует о том, что операционные убытки характеризуются высокой частотой малых убытков и низкой частотой больших убытков. Следовательно, операционные убытки имеют двойственный характер: один процесс лежит в основе малых и частых убытков, а другой — в основе больших и редких убытков. Разделение модели на две части позволяет нам разумным образом оценивать влияние экстремальных убытков.

Важный вопрос, который следует рассмотреть, это оценка параметров предложенной выше функции распределения  $F_i(x)$ . В то время как для случая логнормального распределения оценка при помощи метода максимального правдоподобия достаточно проста, для случая ОНР крайне важно поразмыслить над тем, какой из методов (например, метод максимального правдоподобия или метод взвешенных моментов) лучше улавливает динамику изучаемых величин убытков.



**Рис. 7.12.** Диаграмма рассеяния убытков третьего ТС

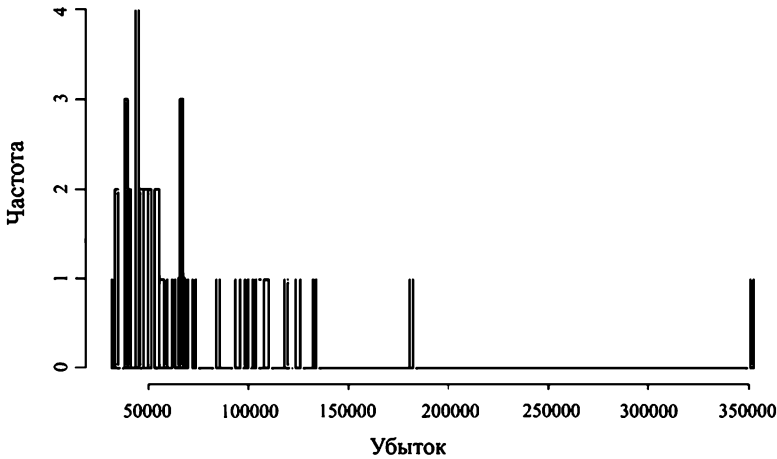


Рис. 7.13. Гистограмма убытков третьего ТС

Рассмотрим метод максимального правдоподобия для ОНР. Логарифмическая функция правдоподобия наблюдений  $\hat{x}_{ij}(t)$ , которые превышают соответствующий уровень  $u_i$ , равна

$$\ln L(i; \xi_i, \beta_i) = \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \left[ -\ln \beta_i - \left( \frac{1}{\xi_i} + 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \ln \left( 1 + \frac{\xi_i}{\beta_i} (\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \right) \right] \mathbf{I}_{\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}},$$

где  $\mathbf{I}_{\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}}$  — индикаторная функция события  $\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}$ .

Обозначим через  $\hat{\xi}_i, \hat{\beta}_i$ , оценки параметров  $\xi_i, \beta_i$ , даваемые методом максимального правдоподобия.

Этот метод хорошо работает, если  $\xi_i > -1/2$ . В этом случае можно показать, что

$$n^{1/2} \left( \hat{\xi}_i - \xi_i, \frac{\hat{\beta}_i}{\beta_i} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, V^{-1}), \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$V^{-1} = (1 + \xi_i) \begin{pmatrix} 1 + \xi_i & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим *метод взвешенных по вероятности моментов (ВВМ)*. В отличие от стандартного метода моментов, в котором приравниваются эмпирические и соответствующие теоретические моменты анализируемой случайной величины, в ВВМ приравниваются моменты некоторым специальным образом взвешенной (преобразованной) анализиру-

емой случайной величины. При этом взвешивание подбирается прежде всего из соображений обеспечения существования используемых моментных тождеств. Метод ВВМ зачастую дает лучшие оценки, чем стандартный метод моментов (ММ).

Предположим, что случайная величина  $(X_{ij}(t) - u_i)\mathbf{I}_{\{X_{ij}(t) > u_i\}}$  имеет распределение  $\text{GPD}_{\xi_i, \beta_i}(x)$ . Тогда соотношения, на которых основан метод ВВМ, имеют вид:

$$w_r = \mathbf{E} \left[ (X_{ij}(t) - u_i) \mathbf{I}_{\{X_{ij}(t) > u_i\}} \times \left( \overline{\text{GPD}}_{\xi_i, \beta_i} \left( (X_{ij}(t) - u_i) \mathbf{I}_{\{X_{ij}(t) > u_i\}} \right) \right)^r \right] = \frac{\beta_i}{(r+1)(r+1-\xi_i)},$$

где  $r = 0, 1, \dots$ ;  $\overline{\text{GPD}}_{\xi_i, \beta_i}(x) = 1 - \text{GPD}_{\xi_i, \beta_i}(x)$ . Из выражений для теоретических взвешенных по вероятности моментов нулевого и первого порядков ( $w_0$  и  $w_1$  соответственно) мы можем выразить  $\beta_i$  и  $\xi_i$ :

$$\beta_i = \frac{2w_0w_1}{w_0 - 2w_1} \quad \text{и} \quad \xi_i = 2 - \frac{w_0}{w_0 - 2w_1}.$$

Если в этих выражениях мы заменим теоретические взвешенные по вероятности моменты соответствующими эмпирическими моментами:

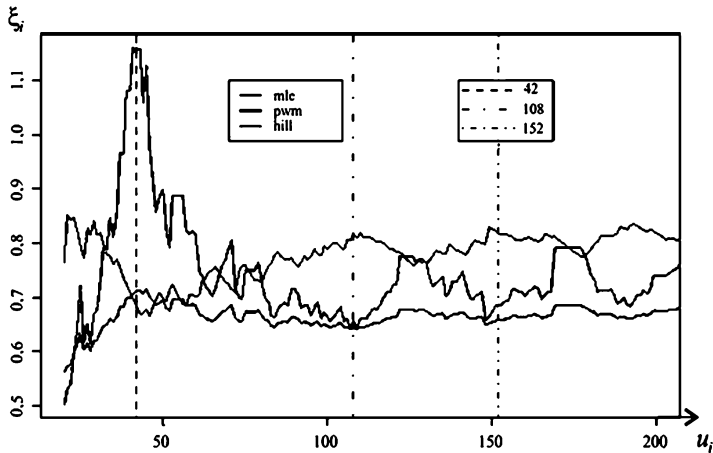
$$\hat{w}_r(\beta_i, \xi_i) = \frac{1}{N_{u_i, i}} \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} (\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \mathbf{I}_{\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}} H^r((\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \mathbf{I}_{\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}}),$$

$$r = 0, 1,$$

где  $N_{u_i, i} = \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \mathbf{I}_{\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}}$ , а  $H(x)$  — эмпирическая функция распределения ненулевых превышений  $(\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \mathbf{I}_{\{\hat{x}_{ij}(t) > u_i\}}$  ( $t = 1, \dots, M; j = 1, \dots, \hat{n}_{it}$ ), получим ВВМ-оценки для параметров  $\beta_i$  и  $\xi_i$ .

В статье [Hosking, Wallis (1987)] показано, что при  $\xi \geq 0$  ВВМ-оценка является ни в чем не уступающей оценке, полученной методом максимального правдоподобия.

В статье [Rachedi, Fantazzini (2008)] параметр ОПР  $\xi$  наряду с уже упомянутыми подходами оценивается также при помощи оценки Хилла (более детальную информацию об этой непараметрической оценке см. [Cruz (2002)]). Чтобы выделить наилучшую процедуру оценивания параметра  $\xi$ , гарантирующую устойчивость оценок этого параметра, мы вычислили оценки  $\xi$  для разных пороговых уровней. Как видно из рис. 7.14, эмпирический анализ для оценки  $\xi$  указывает на преимущество ВВМ-метода над методом максимального правдоподобия и оценкой Хилла. Отметим устойчивость ВВМ-оценки для различных поро-



**Рис. 7.14.** Сравнительный анализ оценок, полученных методом максимального правдоподобия, ВВМ-методом и методом Хилла

### 3) Смешивание при помощи метода Монте-Карло

После того как построена модель частоты возникновения убытков и модель величины среднего убытка, необходимо их эмпирически смешать при помощи метода Монте-Карло для того, чтобы смоделировать новую серию агрегированных убытков. А при большом количестве данных мы сможем вычислить такие меры риска, как ГП и СОП.

Разумно предположить, что случайные величины  $X_{i1}(t), \dots, X_{in}(t)$  ( $X_{ij}(t)$  –  $j$ -й убыток  $i$ -го пересечения в период  $t$ ) одинаково распределены. Обозначим  $F_{X,t}(x) = \Pr(X_{ij}(t) \leq x)$ .

Функция распределения случайной суммы  $S_{it} = X_{i1}(t) + X_{i2}(t) + \dots + X_{in_{it}}(t)$  равна:

$$F_{S_{it}}(x) = P(S_{it} \leq x) = \sum_{n_{it}=0}^{\infty} p_{n_{it}} P(S_{it} \leq x | n_{it}) = \sum_{n_{it}=0}^{\infty} p_{n_{it}} F_{X,t}^{*n_{it}}(x),$$

где  $F_X^{*n_{it}}(\cdot)$  – свертка функций распределений случайных величин  $X_{i1}(t), \dots, X_{in_{it}}(t)$ , а  $p_{n_{it}}$  – вероятность того, что число убытков  $i$ -го пересечения в течение периода  $t$  окажется равным  $n_{it}$ .

Следовательно, функция распределения смеси частот и величин убытков равна сумме сверток функций распределений величин убытков. Отсюда получаем, что плотность с.в.  $S_{it}$  равна:

$$f_{S_{it}}(x) = \sum_{n_{it}=0}^{\infty} p_{n_{it}} f_{X,t}^{*n_{it}}(x)$$

Однако получение аналитического представления для распределения  $F_{S_{it}}$  — вычислительно весьма сложная (иногда неразрешимая) задача. В силу этого приближают это распределение при помощи метода Монте-Карло.

В предположении независимости операционных убытков приведем описание процедуры моделирования ГП и СОП суммарных операционных убытков с использованием метода Монте-Карло.

1. Оценим частную функцию распределения убытка  $F_{S_{it}}(x)$  для каждого типа рискового события  $i$ ,  $i = 1, \dots, R$ , следующим образом:

(а) в соответствии с функцией распределения частоты убытков  $i$ -го типа риска (пуассоновское или отрицательное биномиальное распределение) сгенерируем случайную величину  $n_{it}$  (обозначим сгенерированное значение через  $\hat{n}_{it}$ );

(б) из функции распределения среднего убытка  $i$ -го типа риска (экспоненциальное распределение, Парето-распределение, гамма-распределение, ОРП-распределение) сгенерируем случайную величину  $s_{it}$  (обозначим сгенерированное значение через  $\hat{s}_{it}$ );

(с) умножив  $\hat{s}_{it}$  на  $\hat{n}_{it}$ , получим смоделированный суммарный убыток типа  $i$ ;

(д) повторим шаги (а)–(с)  $N = 100\,000$  раз;

(е) сортируя по возрастанию  $100\,000$  значений суммарных убытков, полученных на предыдущем шаге, генерируем функцию распределения суммарного убытка  $i$ -го типа  $F_{S_{it}}(x)$ .

2. Для каждого типа рискового события  $i$ , используя сгенерированную функцию распределения суммарного убытка  $i$ -го рискового события  $F_{S_{it}}(x)$ , вычисляем ГП и СОП необходимого доверительного уровня.

3. Наконец, вычисляем совокупную ГП (СОП) как сумму всех ГП (СОП) для каждого типа рискового события  $i$ .

### 7.3.6. Каноническая агрегация при помощи копула-функций

Для финансовых организаций, не способных оценить зависимости между ТС (или БН), Базель II требует реализацию весьма консервативного подхода. Вместе с тем связь между суммарными операционными убытками различных БН отнюдь не описывается комонотонной зависимостью. Это обстоятельство предоставляет нам широкие возможности диверсификации и получения меньшего по величине и более эффективного резервного капитала.

В этом разделе мы рассмотрим, как может быть использована копула-функция для описания структуры зависимости между суммарными



убытками  $(S_{it})_{i=1}^R$ . Отметим, что ее использование приводит к уменьшению величины полной ГП (см. [Di Clemente, Romano (2004)], [Fantazzini et al. (2007)], [Fantazzini (2008a)]).

Теорема Шкляра [Sklar (1959)] утверждает, что совместное распределение  $H$  вектора суммарных убытков  $S_{it}$ ,  $i = 1 \dots R$ ,  $t = 1, \dots, M$ , может быть представлена как копула-функция от маргинальных (частных) функций распределения компонент вектора:

$$P(S_{1t} \leq x_1, \dots, S_{Rt} \leq x_R) = H(x_1, \dots, x_S) = C(F_{S_{1t}}(x_1), \dots, F_{S_{Rt}}(x_R)),$$

где  $F_{S_{it}}(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $S_{it}$ ,  $C(\cdot)$  — копула-функция.

Каноническая агрегация при помощи копула-функций предполагает агрегацию убытков за какой-то временной период, после чего оценивается зависимость этих суммарных убытков  $S_{it}$ ,  $i = 1, \dots, R$ , при помощи копула-функции. Таким образом, мы можем изучать недельные, месячные или годовые суммарные убытки в зависимости от информации, представленной в базе данных по операционным убыткам, и поставленным задач.

Для описания зависимости суммарных убытков обычно используют либо нормальную копула-функцию, либо Т копула-функцию, плотности которых представлены ниже. Так, для нормальной копула-функции

$$c^{Normal}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta'(\Sigma^{-1} - I)\zeta\right),$$

где  $\zeta = (x_1, \dots, x_n)'$ ;  $u_i = \Phi(x_i)$ ,  $\Phi(\cdot)$  — гауссовская функция распределения,  $\Phi^{-1}(\cdot)$  — обобщенное обращение<sup>16</sup> гауссовского распределения,  $\Sigma$  — корреляционная матрица;  $I$  — единичная матрица размера  $n$ .

Для Т копула-функции мы имеем:

$$c^{Student't}(u_1, \dots, u_n) = |\Sigma|^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \right]^n \frac{\left(1 + \frac{\zeta'\Sigma^{-1}\zeta}{v}\right)^{-\frac{v+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}},$$

где  $\zeta = (x_1, \dots, x_n)'$ ;  $u_i \in t_v(x_i)$ ,  $t_v(\cdot)$  —  $t$ -распределение с  $v$  степенями свободы,  $t_v^{-1}(\cdot)$  — обобщенное обращение  $t$  распределения с  $v$  степенями свободы, а  $\Sigma$  — корреляционная матрица.

Обе эти копула-функции принадлежат классу эллиптических копула-функций (см. п. 6.2 книги). Альтернативным классу эллиптических копула-функций является класс архимедовых копула-функций.

<sup>16</sup>Если нам дана некоторая функция  $F(\cdot)$ , то ее обобщенным обращением будет функция  $F^{-1}(u) = \inf\{y : F(y) \geq u\}$ . Далее везде через  $F^{-1}(\cdot)$  будем обозначать обобщенное обращение функции  $F(\cdot)$ .

Однако использование представителей этого класса имеет существенное ограничение, состоящее в том, что такие копула-функции моделируют только положительную зависимость (или только частную отрицательную зависимость), в то время как их многомерные обобщения имеют ограничения на параметры двумерной зависимости. Вот почему архимедовы копула-функции не используются при описании операционного риска.

Аналитическое представление многомерной функции всех суммарных убытков  $S_{it}$  с помощью копула-функции невозможно, поэтому необходимо приближенное решение, которое можно получить, например, методом Монте-Карло.

После того как оценены параметры копула-функции  $C$  и маргинальных функций распределения  $F_{S_{it}}$ ,  $i = 1, \dots, R$ , мы моделируем многомерный случайный вектор длиной  $R$ , имеющий функцию распределения, представимую как копула-функция  $C$  от равномерных на отрезке  $[0; 1]$  распределений. Далее, значение  $i$ -й компоненты,  $i = 1 \dots R$ , полученного вектора заменяем значением функции, обратной к маргинальной функции распределения  $F_{S_{it}}$ , от этой компоненты. Если маргинальная функция распределения  $F_{S_{it}}$ ,  $i = 1, \dots, R$ , оценена при помощи метода Монте-Карло, то эта функция-оценка разрывна (имеет скачки), и мы должны использовать понятие обобщенного обращения функции. После чего просуммируем все компоненты преобразованного вектора и получим смоделированный суммарный по всем БН и ТС убыток. Наконец, повторим последние три шага большое количество раз и вычислим значения требуемых мер риска (например, ГП, СОП).

Опишем более подробно **процедуру расчета резервного капитала**.

1. Оценим маргинальную (частную) функцию распределения  $F_{S_{it}}$  суммарных убытков  $i$ -го типа за период  $t$  для каждого  $i = 1, \dots, R$  следующим образом:

(а) подберем функцию распределения частоты убытков (пуассоновское или отрицательное биномиальное распределение) и функцию распределения среднего убытка (экспоненциальное распределение, Парето-распределение, гамма-распределение, ОПР-распределение);

(б) в соответствии с функцией распределения частоты убытков  $i$ -го типа сгенерируем случайную величину  $n_{it}$  (обозначим сгенерированное значение через  $\hat{n}_{it}$ );

(с) из функции распределения среднего убытка  $i$ -го типа сгенерируем случайную величину  $s_{it}$  (обозначим сгенерированное значение через  $\hat{s}_{it}$ );

(д) умножив  $\hat{s}_{it}$  на  $\hat{n}_{it}$ , получим смоделированный суммарный убыток  $i$ -го типа.



$i = 1, \dots, R$ , обозначает частоту убытков  $i$ -го типа на промежутке времени  $(0, t]$ .

Для  $r$ -й реализации события типа  $e$  определим бернуллиевскую случайную величину  $I_{i,r}^e$ , которая равна единице, если мы наблюдаем убыток типа  $i$ , и ноль — в противном случае. Векторы

$$\mathbf{I}_r^e = (I_{1,r}^e, \dots, I_{R,r}^e)', \quad r = 1, \dots, n_t^e,$$

предполагаются независимыми и одинаково распределенными, имеющими многомерное распределение Бернулли<sup>17</sup>. Другими словами, каждое новое событие представляет новую независимую возможность возникновения убытков, но фиксированному событию отвечают бернуллиевские случайные величины, характеризующие реализацию убытков того или иного типа, которые могут быть зависимыми. Форма зависимости определяется спецификацией многомерного распределения Бернулли, а независимость этих случайных величин — частный случай этой спецификации.

В соответствии с пуассоновской моделью шоков частота убытков  $i$ -го типа  $n_{it}$ ,  $i = 1, \dots, R$ , имеет пуассоновское распределение, поскольку она образуется в результате суперпозиции  $m$  независимых пуассоновских процессов, порожденных  $m$  типами определяющих событий. Распределение вектора  $(n_{1t}, \dots, n_{Rt})$  будем называть многомерным пуассоновским распределением. Тем не менее суммарное число убытков не является пуассоновским процессом, но является сложным пуассоновским процессом:

$$n_t = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{n_t^e} \sum_{i=1}^R I_{i,r}^e$$

В каждом пересечении ТС/БН  $i$ ,  $i = 1, \dots, R$ , шоки вызывают определенное число убытков величиной  $(X_{ir}^e)$ ,  $r = 1, \dots, n_t^e$ , где  $(X_{ir}^e)$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения  $F_{it}$  и независимые от  $n_t^e$ .

Как можно понять из предыдущих рассуждений, ключевым моментом этого подхода является идентификация  $m$  определяющих пуассоновских процессов (к сожалению, это весьма недавно возникшая область исследования, и она требует более детального изучения). Простым подходом к идентификации  $m$  определяющих процессов с  $R$  типами рисков (ТС/БН пересечения) является подход, аналогичный стандартному РУ-подходу. Хотя положительная/отрицательная зависи-

<sup>17</sup> Распределение случайного вектора  $(I_1, \dots, I_N)$ ,  $i$ -я компонента которого — это случайная величина, принимающая либо значение 0, либо 1,  $i = 1, \dots, N$ , будем называть многомерным распределением Бернулли.

мость<sup>18</sup> как между шоками ( $n_{it}$ ), так и между величинами суммарных убытков ( $S_{it}$ ) допускается, число шоков и величины убытков предполагаются независимыми:

$$\begin{aligned} H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^f(F_{n_{1t}}(x_1), \dots, F_{n_{Rt}}(x_R)), \\ H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^S(F_{S_{1t}}(x_1), \dots, F_{S_{Rt}}(x_R)), \\ H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}} &\perp H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}, \end{aligned}$$

где  $H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(\cdot)$  — функция распределения случайного вектора  $(n_{1t}, \dots, n_{Rt})$ ,  $F_{n_{it}}(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $n_{it}$ , а  $C^f(\cdot)$  — копула-функция многомерной функции распределения  $H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(\cdot)$ ;  $H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(\cdot)$  — функция распределения случайного вектора  $(S_{1t}, \dots, S_{Rt})$ ,  $F_{S_{it}}(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $S_{it}$ , а  $C^S(\cdot)$  — копула-функция многомерной функции распределения  $H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(\cdot)$ .

Если же вместо суммарного убытка за период мы используем средний убыток за период (т. е. вместо  $S_{it}$  используем  $s_{it}$ ), тогда:

$$\begin{aligned} H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^f(F_{n_{1t}}(x_1), \dots, F_{n_{Rt}}(x_R)), \\ H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^s(F_{s_{1t}}(x_1), \dots, F_{s_{Rt}}(x_R)), \\ H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}} &\perp H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}, \end{aligned}$$

где  $H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(\cdot)$  — функция распределения случайного вектора  $(s_{1t}, \dots, s_{Rt})$ ,  $F_{s_{it}}(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $s_{it}$ , а  $C^s(\cdot)$  — копула-функция многомерной функции распределения  $H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(\cdot)$ .

### Приведем процедуру реализации этого подхода

1. Для каждого пересечения БН/ТС подберем функцию распределения частоты убытков, функцию распределения среднего убытка, как это делалось в стандартном РУ-подходе.

2. Подберем для функции распределения вектора частот убытков  $(n_{1t}, \dots, n_{Rt})$  копула-функцию  $C^f$  (см. ниже «Дополнение» к этому разделу).

3. Оценим маргинальные функции распределения  $F_{S_{it}}$  суммарных убытков  $i$ -го типа за период  $t$ ,  $i = 1, \dots, R$ , следующим образом:

(а) сгенерируем случайный вектор  $u^f = (u_{1t}^f, \dots, u_{Rt}^f)$ , функция распределения которого представима в виде копула-функции  $C^f$  от равномерных на отрезке  $[0; 1]$  распределений;

<sup>18</sup>Случайные величины  $X_1, X_2$  называются положительно зависимыми, если

$$P[X_1 > x_1, X_2 > x_2] \geq P[X_1 > x_1]P[X_2 > x_2].$$

Соответственно отрицательно зависимыми, если

$$P[X_1 > x_1, X_2 > x_2] < P[X_1 > x_1]P[X_2 > x_2].$$

(b) взяв  $F_{n_{it}}^{-1}(u_{it}^f)$ , получим сгенерированный вектор частот убытков  $(n_{1t}, \dots, n_{Rt})$ , описывающий число наблюдаемых убытков каждого из  $R$  типов риска (обозначим этот вектор через  $(\hat{n}_{1t}, \dots, \hat{n}_{Rt})$ );

(c) для каждого типа риска  $i, i = 1, \dots, R$ , из функции распределения среднего убытка сгенерируем случайную величину  $s_{it}$  (обозначим сгенерированное значение через  $\hat{s}_{it}$ );

(d) умножив  $\hat{s}_{it}$  на  $\hat{n}_{it}$ , получим смоделированный суммарный убыток типа  $i$ ;

(e) повторим шаги (a)–(d)  $N = 100\,000$  раз;

(f) для каждого типа риска  $i, i = 1, \dots, R$ , сортируя по возрастанию  $100\,000$  значений суммарных убытков, полученных на предыдущем шаге, генерируем функцию распределения суммарного убытка  $F_{S_{it}}(x)$ .

4. Подберем для функций распределения вектора суммарных убытков  $(S_{1j}, \dots, S_{Rj})$  копула-функцию  $C^S$ .

5. Сгенерируем случайный вектор  $u^S = (u_1^S, \dots, u_R^S)$ , функция распределения которого представима в виде копула-функции  $C^S$  от равномерных на отрезке  $[0; 1]$  распределений.

6. Взяв вектор  $(F_{S_{1t}}^{-1}(u_1^S), \dots, F_{S_{Rt}}^{-1}(u_R^S))$ , получим сгенерированный вектор суммарных убытков.

7. Повторим предыдущие шаги  $N = 100\,000$  раз.

Таким образом можно смоделировать новые вектора суммарных убытков, которые затем могут быть использованы для вычисления мер риска совокупного убытка (например, ГП и СОП).

### **Дополнение: оценка копула-функций многомерных функций распределения с дискретными маргинальными функциями распределения**

Согласно результатам, представленным в работе [Sklar (1959)], в случае, если некоторые маргинальные функции многомерной функции распределения дискретны (как в нашем случае, см. выше), то копула-функция для такого распределения определена не единственным образом. Для преодоления этой проблемы было предложено два метода. Первый метод был предложен в работе [Cameron, Trivedi et al. (2004)] и был основан на конечно-разностной аппроксимации производных копула-функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Delta_n \dots \Delta_1 C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)),$$

где  $F_{X_i}(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $X_i, i = 1, \dots, n$ ,  $C$  — копула-функция;  $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ , обозначает  $k$ -ю компоненту

разностного оператора первого порядка, которая определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_k C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k), \dots, F_{X_n}(x_n)] &= \\ &= C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k), \dots, F_{X_n}(x_n)] - \\ &- C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k - 1), \dots, F_{X_n}(x_n)]. \end{aligned}$$

Второй метод — это метод «онепрерывнивания», предложенный в работах [Stevens (1950)], [Denuit, Lambert (2005)]. Этот метод основан на генерации искусственных случайных величин  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , получающихся путем прибавления независимых случайных величин  $u_1, \dots, u_n$  (каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке  $[0,1]$ ) к дискретным случайным величинам  $X_1, \dots, X_n$ . Отметим, что такой метод не меняет значение меры согласованности между переменными<sup>19</sup>.

Эмпирические исследования показывают, что максимизация функции правдоподобия с маргинальными дискретными распределениями часто приводит к вычислительным трудностям, являющимся в этом случае следствием отсутствия сходимости алгоритма максимизации. В таких случаях может оказаться полезным описанный выше прием перехода к величинам  $X_1^*, \dots, X_n^*$ , а затем использовать модель, основанную на копулах для непрерывных случайных величин. Вот почему мы рекомендуем полагаться на второй метод.

### 7.3.8. Байесовские подходы: байесовские маргинальные функции и копула-функции в задачах управления операционным риском

Существенным ограничением усовершенствованных моделей измерения риска (УМИР-подход) является наличие неточных данных или (и) их малое количество. Это в основном можно объяснить относительно недавним возникновением понятия операционного риска и понятия управления операционным риском. Поскольку финансовые учреждения приступили к сбору данных по операционным убыткам всего лишь несколько лет назад, это делает задачу исследования операционных рисков еще более сложной. В этом контексте использование байесовских методов и методов стохастического моделирования является вполне естественным решением указанной проблемы. В самом деле, эти методы позволяют нам сочетать количественную информацию (данные по

<sup>19</sup>Мерой согласованности случайных величин  $X_1, X_2$ , имеющих функции распределения  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, называют величину  $P((X_1 - \tilde{X}_1)((X_2 - \tilde{X}_2)) > 0) - P((X_1 - \tilde{X}_1)((X_2 - \tilde{X}_2)) < 0)$ , где  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$  — независимые случайные величины с функциями распределения  $F_1$  и  $F_2$  соответственно.  
Скопировано с сайта <http://лучше.информ2000.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

операционным убыткам, накопленные банком) и качественные данные (мнения экспертов), учитывая форму априорной информации. Кроме того, методы стохастического моделирования являются широко используемым статистическим инструментом, который позволяет преодолеть некоторые вычислительные проблемы. Сочетание описанных методологий приводит к использованию Монте-Карло моделирования для цепей Маркова, которое позволяет синтезировать основные преимущества как байесовских методов, так и методов стохастического моделирования.

В следующих разделах мы рассмотрим байесовский подход для маргинальных функций распределения убытка, предложенный в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)], и байесовские копула-функции, предложенные в работе [Dalla Valle (2008)]. В конечном итоге для того, чтобы представить подход полного байесовского мета-распределения для управления операционным риском, мы объединим эти две методологии.

### 1) Байесовские маргинальные функции

Идея, лежащая в основе подхода, предложенного в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)], состоит в том, чтобы оценивать параметры маргинальных распределений убытков не только при помощи классического подхода, но и при помощи байесовского подхода с использованием метода Монте-Карло для цепей Маркова. Как и ранее, конечной целью является получение при помощи моделирования функции распределения совокупного убытка, что в конечном счете позволяет вычислить меру риска совокупного убытка.

Мы рассмотрим подробно байсовский подход на двух примерах. В первом примере частота убытков моделируется при помощи пуассоновского распределения, величины убытков моделируются при помощи экспоненциального распределения; во втором примере частота убытков моделируется пуассоновским распределением, а величины убытков моделируется гамма-распределением.

Пусть для  $i$ -го пересечения БН/ТС частота убытков имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda_i$ , величины убытков имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda_i^{(s)}$ . Тогда функция правдоподобия  $L$  (см. (7.11)) примет вид:

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i^{(s)}, \lambda_i) = \prod_{t=1}^M \left[ \prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \frac{1}{\lambda_i^{(s)}} e^{-\frac{1}{\lambda_i^{(s)}} \hat{x}_{ij}(t)} \right] \frac{\lambda_i^{\hat{n}_{it}} e^{-\lambda_i}}{\hat{n}_{it}!}. \quad (7.11)$$

Если мы обозначим через  $\theta_i = 1/\lambda_i^{(s)}$ , то получим такое же выражение для функции правдоподобия, как в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)].



(2008)]. Мы предположим, что параметры,  $\lambda_i$  и  $\theta_i$ —случайные величины. Выберем для каждой из них *сопряженную* априорную функцию распределения, т. е. функцию распределения, апостериорная функция которой принадлежит тому же классу, что и априорная функция распределения. В частности, мы можем выбрать двухпараметрическое гамма-распределение (см. выше, п. 7.3.5, 2)):

$$\begin{aligned}\lambda_i &\in \Gamma(a, b), \\ \theta_i &\in \Gamma(c, d),\end{aligned}$$

где знак  $\in$  определяет, что соответствующая случайная величина подчиняется указанному справа закону распределения вероятностей, а  $a, b, c, d$  — параметры априорного распределения.

Если у нас нет априорной информации относительно некоторого параметра модели, то это может быть отражено в априорной функции распределения, предполагая его дисперсию достаточно большой. В этом случае можно, например, предложить использование *плоских априорных распределений*, которые придают равные вероятности всем возможным значениям параметра. Однако этот подход имеет ряд недостатков. Например, для плоских априорных распределений в некоторых случаях, не выполняется условие нормировки<sup>20</sup>, и они инвариантны относительно репараметризации модели (см. [Brooks (1997)]). Если условие нормировки для априорных распределений не выполнено, то это может привести к тому, что апостериорные распределения не будут иметь среднего (см. [Gamerman (1997)]). Одним из решений этой проблемы является использование *слабых априорных распределений*: для них выполняется условие нормировки, но они имеют достаточно большую дисперсию.

Следуя этому подходу, мы можем вычислить так называемые гипероценки параметра априорного распределения, приравняв математическое ожидание параметра, имеющего заданное априорное распределение, к его оценке, полученной методом максимума правдоподобия (при использовании которого параметры предполагаются константами), и положив дисперсию этого параметра равной очень большому числу (например, полагаем равной 1000). Вычислим, например, гипероценки параметров  $a$  и  $b$  функции априорного распределения параметра

<sup>20</sup>Под условием нормировки для дискретной случайной величины подразумевается предписываемое теорией вероятностей условие, когда сумма вероятностей всевозможных исходов этой случайной величины равна единице; под условием нормировки для непрерывной случайной величины, функция распределения которой имеет плотность, подразумевается равенство единице интеграла по множеству всевозможных исходов этой случайной величины от ее плотности. Более подробная информация о байесовском подходе и априорных распределениях, отражающих «скудность априорных знаний» содержится в гл. 3.

$\lambda_i$ , рассматривая данные по операционным убыткам 1-го пересечения, представленные в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)]. Оценка максимума правдоподобия для параметра  $\lambda_i$  равна 1,4028. Приравнивая это значение к математическому ожиданию этого параметра, в предположении, что он имеет априорное распределение  $\Gamma(a, b)$ , а дисперсию этого параметра к 1000 ( $E(\lambda_i) = 1,4028, V(\lambda_i) = 1000$ ), получаем следующие оценки параметров  $a$  и  $b$ :  $\hat{a} = 0,0019, \hat{b} = 0,0014$ .

В дальнейшем при анализе равенств, справедливых с точностью до нормирующей константы, мы будем использовать знак « $\sim$ ».

В соответствии с теоремой Байеса условное апостериорное распределение параметра  $\lambda_i$  с точностью до нормирующей константы равно априорному распределению, умноженному на функцию правдоподобия. Откуда получаем, что апостериорное распределение снова равно гамма-распределению, но уже с функцией плотности

$$\pi_{\lambda_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i, \theta_i) \sim \Gamma\left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + a; M + b\right),$$

а апостериорное распределение для параметра  $\theta$  снова совпадает с гамма-распределением, но с плотностью

$$\pi_{\theta_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i, \lambda_i) \sim \Gamma\left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + c; \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{jt}(t) + d\right).$$

Пусть для  $i$ -го пересечения БН/ТС частота убытков имеет, как и ранее, пуассоновское распределение с параметром  $\lambda_i$ , но величины убытков теперь имеют гамма-распределение с параметрами  $\alpha_i, \vartheta_i \times (\Gamma(\alpha_i, \vartheta_i))$ . Тогда функция правдоподобия (7.10) примет вид:

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i | \alpha_i, \vartheta_i, \lambda_i) = \prod_{t=1}^M \left[ \prod_{i=1}^{\hat{n}_{it}} \frac{\left(\frac{1}{\vartheta_i}\right)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \hat{x}_{ij}^{\alpha-1}(t) e^{-\hat{x}_{jt}(t)/\vartheta_i} \right] \frac{\lambda_i^{\hat{n}_{it}} e^{-\lambda_i}}{\hat{n}_{it}!}.$$

Обозначая через  $\beta_i = 1/\vartheta_i$ , мы выберем независимые сопряженные априорные функции для параметров  $\lambda_i$  и  $\beta_i$ . Возьмем

$$\begin{aligned} \lambda_i &\in \Gamma(a, b), \\ \beta_i &\in \Gamma(c, d). \end{aligned}$$

Аналогично случаю, рассмотренному ранее (случай, когда частота имеет пуассоновское распределение, а величины убытков — экспоненциальное распределение), мы можем снова выбрать *слабые априорные распределения*, для которых выполняется условие нормировки и которые имеют достаточно большую дисперсию. Следуя этому подходу, вычислим гипероценки параметров априорного распределения, приравняв

математическое ожидание параметра, в предположении, что он имеет заданное априорное распределение, к его оценке, полученной методом максимума правдоподобия (при использовании которого параметры предполагаются константами), и положив дисперсию этого параметра, равной очень большому числу (например, полагаем равной 1000).

Воспользовавшись теоремой Байеса, вычислим апостериорную плотность параметра  $\lambda$ . Она будет равна:

$$\pi_{\lambda_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \alpha_i, \beta_i) \sim \Gamma\left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + a; M + b\right).$$

Аналогично вычислим апостериорную плотность параметра  $\beta$ . Она имеет вид:

$$\pi_{\beta_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \alpha_i, \lambda_i) \sim \Gamma\left(\alpha_i \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + c; \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t) + d\right).$$

Если в качестве априорного распределения параметра  $\alpha_i$  взять гамма-распределение

$$\alpha_i \in \Gamma(e, f)$$

с параметрами  $e, f$ , то апостериорная плотность параметра  $\alpha$  будет равна:

$$\pi_{\alpha}(y | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i) \sim y^{e-1} \exp(-fy) \frac{\beta_i^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}}{\Gamma(y)^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}} \prod_{t=1}^M \prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^{y-1}(t).$$

Заметим, что в отличие от апостериорных плотностей параметров  $\beta_i, \lambda_i$  апостериорная плотность параметра  $\alpha_i$  не принимает ни одну из стандартных форм. По этой причине для моделирования функции распределения с плотностью  $\pi_{\alpha_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i)$  воспользуемся одним из алгоритмов типа Монте-Карло моделирования цепей Маркова, а именно алгоритмом Метрополиса — Хестинга.

Обозначим через  $q(\cdot | z)$  плотность равномерного распределения на отрезке  $[z - 0.25; z + 0.25]$ .

Опишем **алгоритм Метрополиса — Хестинга** для нашего случая.

1. Возьмем некоторое начальное значение  $\theta^0$  из области определения  $\pi_{\alpha}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i)$ .

2. Смоделируем случайную величину, равномерно распределенную на отрезке  $[\theta^0 - 0.25; \theta^0 + 0.25]$  (обозначим ее через  $\theta$ ).

### 3. Вычислим величину

$$\begin{aligned} \alpha(\theta^0, \hat{\varphi}) &= \min \left( 1, \frac{\pi_{\alpha}(\hat{\varphi} | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i) q(\theta^0 | \hat{\varphi})}{\pi_{\alpha}(\theta^0 | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i) q(\hat{\varphi} | \theta_0)} \right) = \\ &= \min \left( 1, \prod_{t=1}^M \prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} (\hat{x}_{ij}(t))^{\hat{\varphi}} - \theta^0 \left[ \frac{\beta_i^{\hat{\varphi}} - \theta^0}{\Gamma(\hat{\varphi}) \Gamma(\theta_0)^{-1}} \right]^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{\hat{\varphi}}{\theta_0} \right]^{e-1} \exp[-f(\hat{\varphi} - \theta^0)] \right). \end{aligned}$$

(a) Если  $\alpha(\theta^0, \hat{\varphi}) \geq 1$ , тогда полагаем  $\theta^1 = \hat{\varphi}$ .

(b) Если  $\alpha(\theta^0, \hat{\varphi}) < 1$ , тогда с вероятностью  $\alpha(\theta^0, \hat{\varphi})$  полагаем  $\theta^1 = \hat{\varphi}$ , а с вероятностью  $1 - \alpha(\theta^0, \hat{\varphi})$  полагаем  $\theta^1 = \theta^0$ .

4. Повторим  $N$  раз шаги 1–3, беря вместо  $\theta^0$  смоделированные  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N$ .

При некоторых условиях регулярности эмпирическая функция распределения последовательности  $\{\theta_t\}$  будет сходиться по вероятности к функции распределения, имеющей плотность  $\pi_{\alpha_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i)$  (см. [Gelman (2003).]).

Реализация этого алгоритма требует вычисления значения функции  $(\alpha(\theta, \varphi))$  в точках  $\varphi$  и  $\theta^t$  и моделирования случайных величин с равномерным распределением.

Нормирующая константа для апостериорной плотности не требуется, так как в алгоритме используются только отношения значений плотности в соответствующих точках.

Мы не будем здесь рассматривать случай, когда частоты имеют отрицательное биномиальное распределение, а величины убытков имеют Парето-распределение, поскольку, как показано в работе [Fantazzini et al. (2008в)], в ситуации, когда выборка достаточно мала, мы сталкиваемся с проблемой точности оценок. Кроме того, использование байесовского подхода для этих распределений может привести к нереалистичным значениям оценок мер ГП/СОП, а также к численным ошибкам (см. таблицы 12–14 в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)], из которых видно, что оценки для СОП больше  $e^{+27}$ ).

## 2) Байесовские копула-функции

В работе [Dalla Valle (2008)] представлен РУ-подход с использованием байесовских копул. В байесовском подходе нам необходимо вычислять апостериорное распределение, которое равно, с точностью до нормирующего множителя, произведению априорной функции распределения на функцию правдоподобия.

Используя плотность *нормальной копула-функции*, мы можем вычислить функцию правдоподобия, которая имеет следующий вид:

$$f(\hat{\mathbf{S}}|\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{M}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{S}}'_t (\Sigma^{-1} - I_R) \hat{\mathbf{S}}_t \right\},$$

где  $\hat{\mathbf{S}}_t = (\hat{S}_{1t}, \dots, \hat{S}_{Rt})$ , а  $S_{it}$  — суммарный убыток  $i$ -го типа за период  $t$ ,  $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{\mathbf{S}}_1, \dots, \hat{\mathbf{S}}_M)$ .

Здесь нам необходимо оценить корреляционную матрицу  $\Sigma$  и в работе [Dalla Valle (2008)] для этого в качестве априорного сопряженного распределения этого параметра выбрано **обратное распределение Уишарта**:

$$\Sigma \sim \text{InverseWishart}(\alpha, \mathbf{B}).$$

Распределение Уишарта является обобщением одномерного  $\chi^2$ -распределения на случай большей размерности. Как правило, оно используется для описания функции распределения симметричных положительно-полуопределенных матриц (обычно, ковариационных матриц, диагональные элементы которых — случайные величины, имеющие  $\chi^2$ -распределение, см. [Ripley (1987)]). Если случайная матрица имеет распределение Уишарта с параметрами  $\mathbf{B}^{-1}$  и  $\alpha$ , то обратная к ней случайная матрица имеет обратное распределение Уишарта с параметрами  $\mathbf{B}$  и  $\alpha$  (см. [Kotz, Balakrishnan et al. (2000)]).

Если априорной информации у нас нет, то рекомендуется использовать *слабые априорные распределения*.

В работе [Dalla Valle (2008)] степени свободы  $\alpha$  взяты равными  $R+1$ , т. е. числу типов риска (число пересечений БН/ТС) плюс один. Более того, в этой работе в качестве матрицы точности  $\mathbf{B}$  взята диагональная матрица, для которой:

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\gamma_i), \quad \gamma_i \in \Gamma(0.001; 0.001), \quad i = 1, \dots, R.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины  $\gamma_i$  равно 1, а дисперсия очень велика по сравнению с математическим ожиданием и равна 1000. Для  $\gamma_i$  мы имеем слабое распределение. Апостериорное распределение случайной величины  $\Sigma$  вычисляется согласно теореме Байеса:

$$\begin{aligned} \pi_{\Sigma}(\mathbf{S}|\hat{\mathbf{S}}) &\sim |\mathbf{S}|^{-\frac{M}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{S}}'_t (\mathbf{S}^{-1} - I_R) \hat{\mathbf{S}}_t \right\} |\mathbf{S}|^{-\alpha + \frac{R+1}{2}} \times \\ &\times \exp \{ -tr(\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}) \} \sim |\mathbf{S}|^{-\left(\frac{M}{2} + \alpha\right) + \frac{R+1}{2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -tr \left[ \left( \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{X}}_t \hat{\mathbf{X}}'_t + \mathbf{B} \right) \mathbf{S}^{-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, апостериорное распределение случайной матрицы  $\Sigma$  — это снова обратное распределение Уишарта:

$$\pi_{\Sigma}(\cdot | \hat{S}) \sim InverseWishart \left( \frac{M}{2} + \alpha; B + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{X}_t \hat{S}'_t \right).$$

Для моделирования функции апостериорного распределения параметра  $\Sigma$  мы можем воспользоваться алгоритмом Метрополиса — Хестинга для многомерных величин, взяв в качестве начального значения в этом алгоритме оценку максимума правдоподобия корреляционной матрицы (как это делалось в работе [Brooks (1997)]). С моделировав 100 000 (или больше) матриц из этого апостериорного распределения, мы их используем для вычисления мер риска ГП/СОП.

Мы не будем здесь рассматривать байесовскую T копула-функцию, поскольку при больших значениях степеней свободы (часто возникающих для данных по операционным убыткам) она дает нереалистичные оценки мер риска. Для более подробной информации об этих проблемах см. табл. 12 в работе [Dalla Valle (2008)].

### 3) Подход полного байесовского метараспределения

Изложенные ранее подходы могут быть объединены для получения полного байесовского подхода. Подробное описание этой **процедуры вычисления величины резервного капитала** выглядит следующим образом.

1. Для каждого пересечения БН/ТС подберем функцию распределения частоты убытков (пуассоновское или отрицательное биномиальное распределение), функцию распределения среднего убытка, как это делалось в стандартном РУ-подходе, и оценим маргинальные функции распределения  $F_{S_{it}}(x)$  суммарных убытков  $i$ -го типа за период  $t$ ,  $i = 1, \dots, R$ . Для функций распределения вектора суммарных убытков  $(S_{1j}, \dots, S_{Rj})$  с маргинальными функциями  $F_{S_{it}}(x)$  подберем копула-функцию  $C^S$ . Оценки параметров маргинальных функций распределения и копула-функции методом максимума правдоподобия далее будут использованы как отправные точки цепей, строящихся на следующих шагах.

2. Для каждого типа риска из апостериорного распределения параметров функции распределения *частоты* смоделируем  $N_1 = 100\,000$  значений.

3. Для каждого типа риска из апостериорного распределения параметров функции распределения *среднего убытка* смоделируем  $N_1 =$

4. Смоделируем  $N_1 = 100\ 000$  значений параметров копула-функции, имеющих заданные апостериорные распределения.

5. Генерируем апостериорное распределение  $H_B$  совокупного убытка по всем типам риска  $i$ ,  $i = 1, \dots, R$ . Для этого:

(а) для каждого типа риска  $i$ ,  $i = 1, \dots, R$ , смоделируем апостериорные распределения  $F_{S_{it}}^B$  суммарных убытков:

i) сгенерируем значение  $\hat{s}_{it}$  из функции распределения частоты убытков  $i$ -го типа (с параметрами, рассчитанными на шаге 2);

ii) из апостериорного распределения, описывающего величину убытка (с параметрами, рассчитанными на шаге 3), сгенерируем  $\hat{n}_{sit}$  значений;

iii) просуммировав  $\hat{n}_{sit}$ , смоделированных на предыдущем шаге значений, вычислим смоделированный суммарный убыток типа  $i$ ;

iv) повторим шаги (i)–(iii)  $N_2 = 100\ 000$  раз (для тех же параметров маргинальных распределений);

v) отсортировав  $N_2 = 100\ 000$  сгенерированных суммарных убытков по возрастанию, сгенерируем апостериорные распределения  $F_{S_{it}}^B$ ;

(б) сгенерируем случайный вектор  $u_1, \dots, u_R$ , функция распределения которого представима в виде копула-функции  $C$  (параметры которой сгенерированы на шаге 4) с равномерными на отрезке  $[0; 1]$  распределениями;

(с) взяв вектор  $((F_{S_{1t}}^B)^{-1}(u_1^S), \dots, (F_{S_{Rt}}^B)^{-1}(u_R^S))$ , получим сгенерированный вектор суммарных убытков;

(д) сложив смоделированные суммарные убытки  $S_{it}$  по всем пересечениям  $i$ ,  $i = 1, \dots, R$ , получим сгенерированный совокупный по всем БН и ТС убыток;

(е) повторим шаги (а)–(д)  $N_1 = 100\ 000$  раз;

(ф) отсортировав по возрастанию  $N_1 = 100\ 000$  значений совокупного убытка, генерируем апостериорную функцию распределения  $H_B$ .

6. Как это делалось ранее, вычислим ГП и (или) СОП.

Излишне говорить о том, что точность оценки апостериорного распределения совокупного убытка  $H_B$  увеличивается с ростом числа генераций  $N_1$  и  $N_2$ . Однако требуемая для этого вычислительная мощность может расти экспоненциально, что может привести к проблеме переполнения.

Если априорная информация отсутствует и мы пользуемся слабыми априорными распределениями, то используется несколько измененный алгоритм. Он дает менее точные оценки ГП и (или) СОП, чем первый алгоритм, но в нем моделируется только  $N_1$  случайных величин, вместо  $N_1 \times R$ , что позволяет значительно сократить время работы. Разработка электронных библиотек

### 7.3.9. Эмпирические приложения в пакете Gauss: случай комонотонных убытков и канонической агрегации с помощью копула-функций

Чтобы продемонстрировать некоторые из изложенных выше подходов, мы вычислим ГП и СОП для разных уровней доверия, используя смоделированные данные, подобные тем, что используются в работе [Fantazzini et al. (2008в)]. Исходная база данных представляет собой информацию по операционным убыткам некоторого банка (название которого не раскрывается) с января 1999 по декабрь 2004 г., составленная из более чем 72 наблюдений. Общее число убытков за рассматриваемый период составляет 407. Рассматриваемые операционные убытки берутся из двух бизнес-направлений и четырех типов событий. Таким образом, мы имеем восемь возможных типов рисков (или пересечений). В целях соблюдения конфиденциальных сведений банк присвоил случайный индекс каждому из рассматриваемых бизнес-направлений и типов событий; однако связь между этими присвоенными индексами и реальными была сохранена.

Для описания каждого типа риска мы используем пуассоновское и гамма-распределения, параметры которых представлены в табл. 7–8 из [Fantazzini et al. (2008в)].

Мы получим маргинальные распределения суммарных убытков  $S_{it}$  для каждого пересечения БН/ТС с помощью свертки распределений частот убытков и величин убытков, которую будем аппроксимировать при помощи метода Монте-Карло. Затем мы вычислим ГП и СОП для 95% и 99% доверительных уровней, а их сумма по всем пересечениям  $i$  даст нам совокупную ГП и СОП для случая комонотонных убытков. Кроме того, мы вычислим совокупную ГП при помощи нормальной копула-функции, которая более реалистично моделирует зависимость между маргинальными суммарными убытками  $S_{it}$ , чем предположение о комонотонности убытков.

```
new;cls;
//Загрузка данных по операционным убыткам (8 пересечений БН/ТС)
perdite=0.00000000 123287.00 ...
// В целях экономии места полная таблица имеющихся данных здесь не представ-
лена, но их можно получить по запросу у авторов
...
9876.000 1957.0000 0.00000000 ;
//Число сценариев
scenarios=100000;
//Загрузка параметров пуассоновского и гамма распределений
parameters=1.4027778 0.15180904 64847.807,
2.1944444 0.19869481 109320.57,
0.0833333 0.21170152 759717.47,
0.0000000 0.0000000 0.0000000 ;

```



```

0.45833333 0.11280330 1827627.2,
0.097222222 0.19542678 495700.99,
0.62500000 0.38494011 19734.007,
0.68055556 0.059798776 211098.10,
0.11111111 0.26302912 135643.25;
//Инициализация матрицы, в которой будут представлены значения ГП, СОП, а
также совокупный убыток.
var95= zeros(rows(parameters),1);
var99= zeros(rows(parameters),1);
es95= zeros(rows(parameters),1);
es99= zeros(rows(parameters),1);
losstot= zeros(scenarios,rows(parameters));
//Оценка маргинальных распределений суммарных убытков  $F_{S_{it}}$  для каждого типа
риска  $i, i = 1, \dots, R$ ;
for j(1,rows(parameters),1);
frequency1=zeros(scenarios,1);
loss1=zeros(scenarios,1);
for i(1,scenarios,1);
//Моделируем пуассоновскую случайную величину
frequency1[i,1]=rndp(1,1,parameters[j,1]);
aa=frequency1[i,1];
if aa == 0;
loss1[i,1]=0;
else;
//Моделируем случайную величину из гамма-распределения
severity=rndgam(aa,1,parameters[j,2])*parameters[j,3];
loss1[i,1]=sumc(severity);
endif;
endfor;
//Сортируя по возрастанию 100000 сгенерированных суммарных убытков, генери-
руем распределение  $F_{S_{it}}$ 
rankindex = rankindx(Loss1,1);
matrixrank=Loss1 rankindex;
finalsort1 = sortc(matrixrank,2);
losstot[. ,j]=finalsort1[. ,1];
var95[j,1]=finalsort1[0.95*scenarios,1];
es95[j,1]=meanc(finalsort1[0.95*scenarios:rows(finalsort1),1]);
var99[j,1]=finalsort1[0.99*scenarios,1];
es99[j,1]=meanc(finalsort1[0.99*scenarios:rows(finalsort1),1]);
endfor;
//Вывод таблицы для значений мер риска по каждому типу риска  $i$  (пересечения
БН/ТС)
print " VaR 95 % VaR 99 % ES 95 % ES 99 % для каждого типа риска i ";
var95:var99:es95:es99;
//Вычисление мер риска в предположении комонотонности суммарных убытков:
простая сумма ГП по всем типам риска  $i$ 
var95_dip_perf=sumc(var95);
var99_dip_perf=sumc(var99);
es95_dip_perf=sumc(es95);
es99_dip_perf=sumc(es99);
print " VaR 95 % VaR 99 % ES 95 % ES 99 % (Perfect Dependence)";

```

```

var95_dip_perf:var99_dip_perf:es95_dip_perf:es99_dip_perf;
//Генерация функции распределения суммарного убытка по каждому типа риска i
cdf= zeros(rows(perdite),cols(perdite));
for j(1,cols(perdite),1);
for i(1,rows(perdite),1);
n=1; do while perdite[i,j] .> losstot[n,j];
if n<scenarios;
cdf[i,j]= n/scenarios;
else;
cdf[i,j]=1;
break;
endif;
n = n+1; endo;
endfor;
endfor;
//Оценка корреляционной матрицы нормальной копула-функции при помощи ме-
тода максимума правдоподобия
invcdf=cdfni(cdf);
corr_matrix=corr(x(invcdff));
//Моделирование 100000 случайных векторов из нормальной копула-функции
matrixR =corr_matrix;
randomunif=rndn(rows(parameters),scenarios);
xx = chol(matrixR)*randomunif;
uu = cdfn(xx);
//Обращая при помощи функции  $F_{S_{it}}^{-1}(\cdot)$  вектор  $(u_1, \dots, u_R)$ , составленный из смоделированных случайных величин, имеющих равномерное распределение, и зависимость которых описывается нормальной копула-функцией, моделируем суммарные убытки i-го типа;
invtot= zeros(scenarios,rows(parameters));
for j(1,rows(parameters),1);
for i(1,scenarios,1);
aa= uu[i,j]*scenarios;
aa=ceil(aa);
invtot[i,j] = losstot[aa,j];
endfor;
endfor;
//Суммируя  $S_{it}$  по всем типам риска i, моделируем совокупный убыток;
portsim=sumc(invtot');
//Сортируя по возрастанию 100000 смоделированных совокупных убытков, генерируем функцию распределения совокупного убытка;
rankindex = rankindx(portsim,1);
matrixrank=portsim rankindex;
portcop = sortc(matrixrank,2);
//Вычисляем ГП и СОП
var95=portcop[0.95*scenarios,1];
es95=meanc(portcop[0.95*scenarios:rows(portcop),1]);
var99=portcop[0.99*scenarios,1];
es99=meanc(portcop[0.99*scenarios:rows(portcop),1]);
print " VaR 95 % VaR 99 % ES 95 % ES 99 % (Нормальная копула-функция)";

```

В табл. 7.4 представлены значения ГП и СОП, полученные с помощью описанного выше моделирования данных.

**Таблица 7.4.** Результаты оценок ГП и СОП

Тип риска $i$	VaR 95 %	VaR 99 %	ES 95 %	ES 99 %
1	74528.044	158972.50	127410.69	215643.86
2	209042.19	372002.60	311679.27	480297.24
3	3938.9093	375488.17	247692.28	867696.32
4	522287.94	2147631.5	1564485.9	3539469.7
5	7973.9140	303487.86	191622.96	625686.14
6	26839.249	55567.369	44637.456	73431.526
7	42613.419	208104.22	148306.02	360775.84
8	9223.3096	112151.18	74077.702	206885.85
Совокупный риск в случае комонотонности	896446.98	3733405.4	2709912.3	6369886.5
Совокупный риск в случае использования нормальной копула-функции	812585.45	2388738.8	1809044.9	3713432.1

Во-первых, следует заметить, что гипотеза о комонотонности убытков нереалистична, поскольку все корреляции близки к нулю. Во-вторых, следует отметить, что использование копула-функций позволяет значительно сократить количество средств, выделяемых в качестве резервного капитала под операционные риски. Если мы сравним величину резервного капитала, полученную в предположении комонотонности убытков, и величину резервного капитала, полученную с использованием копула-функций, мы увидим, что в последнем случае резервный капитал всегда меньше где-то на 10–50% по сравнению с первым случаем.

## 7.4. Управление кредитным риском

### 7.4.1. Введение в управление кредитным риском

Что представляет собой кредитный риск, т. е. риск нарушения обязательств по платежам? В [Crosbie, Bohn (2001)] этому понятию дается следующее определение: **Риск нарушения обязательств по платежам** — это неопределенность, связанная со способностью компании обслуживать свои долги и отвечать по взятым на себя финансовым обязательствам. При этом заранее невозможно идентифицировать те компании, которые выполняют свои финансовые обязательства, и те, которые не выполняют. В лучшем случае мы лишь сможем дать вероятностную оценку кредитного риска. Как результат, компании, подверженные кредитному риску, обычно платят за пользование заемными средствами по процентной ставке, равной безрисковой ставке.

центной ставке, умноженной на коэффициент, пропорциональный вероятности нарушения обязательств по платежам, с помощью которого регулируется размер возмещения кредиторам за неопределенность, связанную с этими кредитными обязательствами.

Если компания (заемщик) не в состоянии выполнить свои обязательства перед кредитором или один из контрагентов не в состоянии следовать условиям финансового соглашения, тогда мы говорим, что компания или контрагент находится в состоянии дефолта. Кредитный риск также включает риск, связанный с событиями, отличными от дефолта, а именно с движением кредитного рейтинга вверх или вниз.

Кредитный риск возникает в результате неопределенности, связанной со способностью контрагента или с его желанием выполнять свои контрактные обязательства. Этот риск характерен для банковской коммерции. Отсутствие диверсификации кредитного риска в банках (в результате концентрации в географических и индустриальных секторах) в ряде случаев приводило к банкротству. Кроме того, с введением в использование свопов и фьючерсных контрактов, а также в результате стремительного роста объемов внебиржевых рынков кредитный риск стал иметь ключевое значение при управлении инвестициями.

Компоненты кредитного риска определяются следующим образом.

• **Вероятность дефолта (ВД)**, которая может быть рассмотрена:

— как с позиции двух простых событий: (1) платежеспособность и (2) неплатежеспособность заемщика; вероятность дефолта в этом случае иногда называют *чистым риском дефолта*;

— так и с позиции ухудшения кредитного рейтинга, которое указывает на увеличение вероятности дефолта; вероятность дефолта в этом случае иногда называют *риском миграции*, а риск дефолта является последним «поглощающим» состоянием.

• **Доля невозвращенных при дефолте по кредиту средств (ДНС(Д))**

В случае возникновения дефолта, при условии наличия залогового обеспечения или каких-либо гарантий, теряется не вся сумма кредита. Таким образом, мы приходим к понятию так называемой *нормы восстановления (НВ)* заемщика, которая определяется как доля всех кредитных обязательств заемщика, которая может быть покрыта в случае дефолта. При этом:

$$\text{ДНС(Д)} = 1 - \text{НВ}.$$

• **Величина номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д))**

Эта величина представляет собой сумму всех кредитных обязательств заемщика в случае его банкротства в результате реализации некоторого кредитного события (дефолта или миграции). Очевидно,

что, если мы хотим определить ВВП(Д), мы должны рассмотреть все позиции, подверженные кредитному риску:

- *кредиты*: обеспеченные кредиты (например, ипотека) и необеспеченные кредиты (например, кредитные карты, беззалоговое кредитование домохозяйств, потребительское кредитование, коммерческое кредитование);

- *облигации*: долговые ценные бумаги, выпускаемые компанией или государством на фиксированный период обращения и дающие инвестору право на возврат номинала таких ценных бумаг, а также на получение дополнительного процента от номинала (выплаты по этому проценту от номинала называют купонами);

- *гарантии, выпущенные для клиентов*;

- *внебиржевые производные ценные бумаги*; эти внебиржевые производные ценные бумаги (например, свопы) несут в себе риск того, что с контрагентом может произойти дефолт, и он не сможет осуществить выплату по контракту;

- *кредитные деривативы*; внебиржевые производные ценные бумаги были введены специально для того, чтобы перераспределять кредитный риск от одного контрагента к другому; кредитные деривативы могут принимать разнообразные формы.

#### • Дефолтная зависимость и (или) миграционная зависимость

Измерение такой зависимости является весьма сложной задачей: исторических данных немного, но даже, если нам было бы доступно большее количество данных, одновременные дефолты в нескольких компаниях были бы редки. В связи с этим эта область все еще требует тщательного изучения.

Среди всех *кредитных деривативов* дефолтный своп (ДС) является наиболее известным и наиболее торгуемым: покупатель дефолтного свопа периодически платит комиссию (купон) в обмен на обязательство продавца кредитного дериватива произвести оговоренные выплаты по определенному активу в случае реализации кредитного события для этого актива. Таким образом, покупатель дефолтного свопа может управлять/хеджировать кредитным риском своего актива, не продавая его; в свою очередь, продавец дефолтного свопа берет на себя забалансовый кредитный риск в спекулятивных целях.

Что касается *корзины/портфеля кредитных деривативов*, то существуют долговые ценные бумаги, покрывающие потенциальный риск дефолта нескольких заемщиков: портфель из  $k$  дефолтных свопов, обеспеченные кредитные облигации (ОКО) и др. Для ОКО активы с кредитным риском (обычно это облигации или кредиты) объединяются в пул обеспечения, после чего риск пула обеспечения делится между

траншами выпускаемых облигаций с разными степенями риска. В этом случае инвесторы несут кредитный риск залоговых активов. ОКО используются для осуществления регулируемых арбитражных операций, поскольку они позволяют с помощью специального целевого механизма (СЦМ)<sup>21</sup>, перепаковывающего риск, удалять из баланса активы. ОКО часто используются хедж-фондами в спекулятивных целях.

С лета 2007 г. финансовые рынки и мировая экономика находились в условиях резкого ограничения размеров кредитования, которое объясняется кризисом в США, связанным с *субстандартными ипотечными кредитами*. Субстандартными ипотечными кредитами называют кредиты, предоставленные заемщикам с более низким кредитным рейтингом, чем у первоклассных заемщиков. Многие из заемщиков субстандартных ипотечных кредитов с увеличением учетной ставки потерпели дефолт по своим выплатам, в то же время упали цены на жилье, что также сыграло на снижение стоимости залога. Во многих случаях субстандартные кредитные портфели были перепакованы в кредитные деривативы (например, в ОКО) и проданы инвесторам, таким как хедж-фонды, стремящиеся получить большую доходность на капитал. Эти хедж-фонды в результате дефолта многочисленных субстандартных ипотечных кредитов оказались в весьма сложном положении. Вследствие наличия в обороте банков безнадежных кредитов они стали неохотно выдавать кредиты. Рынок межбанковских кредитов, который является ключевым элементом финансовой системы, иссяк и заимствования на нем в этой ситуации весьма дороги. Это вызвало проблемы с ликвидностью в таких крупных банках, как Citigroup, Credit Suisse, JP-Morgan, Northern Rock (этот банк разорился), UBS и др.

Задача банка состоит в том, чтобы *управлять рисками своих кредитных портфелей*. Управление включает в себя серию мероприятий, в том числе удержание определенной величины резервного капитала на случай кризисных ситуаций, диктуемой надзорными за банковской деятельностью органами (для более подробной информации см. [BCBS (2005)]). Существуют следующие **основные виды деятельности, направленные на управление рисками:**

- оценка риска кредитного портфеля;
- расчет величины регулирующего капитала и его удержание;
- определение экономического капитала для внутренних целей;
- обеспечение диверсификации портфеля и выявления очагов или концентраций рисков;

<sup>21</sup> СЦМ также называют специальным целевым объектом (СЦО). СЦМ — это компания или юридическое лицо, созданное для достижения некоторых узкоопределенных целей.  
 Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru/> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.ru>

- уменьшение концентраций риска путем использования хеджирования кредитными деривативами;
- решение о приобретении новых кредитных рисков или «разгрузка» старых;
- сопоставление скорректированных риском эффективностей различных секторов портфеля;
- уменьшение величины резервного капитала путем перемещения определенных кредитных рисков вне баланса банка с помощью структурированных финансовых продуктов, таких как ОКО.

#### 7.4.2. Оценка кредитного риска: ожидаемые, неожиданные убытки и экономический капитал

В процессе оценки кредитного риска важно различать *ожидаемые* и *неожиданные* убытки.

• **Ожидаемые убытки (ОУ):** убытки такого рода не представляют никаких проблем для банка, поскольку если фактические убытки  $L$  в точности равнялись бы ожидаемым убыткам ОУ, то для этого банка не было бы никаких негативных последствий. Если бы банк отложил резервный капитал, размер которого равен этой величине, то каких-либо неожиданных изменений величины прибыли в этом случае не произошло бы. Кроме того, банк эффективно покрывает ожидаемые убытки, взимая их со своих заемщиков в форме премии за риск. Это явным образом происходит, например, при ценообразовании кредитов, когда заемщик платит премии, зависящие от его уровня кредитоспособности. В случае облигаций купонные платежи являются неявными рисковыми премиями.

• **Неожиданные убытки (НУ):** риск-менеджеры в большей степени беспокоятся об убытках  $L$ , которые превышают ОУ, т. е. о неожиданных убытках

$$НУ = I_{\{L-ОУ>0\}} \times (L - ОУ).$$

Фактические убытки  $L$  являются *случайной величиной*, в то время как ОУ оцениваются обычно ее средним значением  $EL$ . Соответственно НУ измеряются с помощью  $\alpha$ -квантиля функции распределения  $F_L(x)$  случайной величины  $L$  (при некотором заданном, достаточно малом положительном значении  $\alpha$ ), т. е. с помощью границы потерь уровня  $\alpha$  ( $ГП_\alpha$ ). Следовательно, для того чтобы измерить полный потенциал возможных убытков, нам необходимо рассмотреть распределение убытков  $L$  и на основании него вычислить все требуемые меры риска. Проанализируем это распределение для случая простой модели, в которой рассматриваются только убытки, возникающие в результате дефолта

С этой целью рассмотрим фиксированный период времени  $[0, T]$  и обозначим через  $\tau_i$  случайную величину, отвечающую моменту дефолта  $i$ -го заемщика. Индикатор возникновения дефолта  $Y_i$  — это бернуллиевская случайная величина, определенная как

$$Y_i = \mathbf{I}_{\{\tau_i \leq T\}} = \begin{cases} 1 & \text{если } \tau_i \leq T, \\ 0, & \text{если } \tau_i > T, \end{cases}$$

и для нее справедливы следующие соотношения:

$$P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = P(\tau_i \leq T) = F_{\tau_i}(T) \equiv \text{ВД}_i,$$

где  $F_{\tau_i}(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $\tau_i$ .

Соответственно имеем

$$\text{Убыток в портфеле} = L = \sum_{i=1}^m \text{ДНС}(\text{Д})_i \cdot Y_i \cdot \text{ВНП}(\text{Д})_i.$$

Предполагая все  $\text{ДНС}(\text{Д})_i$  и  $\text{ВНП}(\text{Д})_i$  детерминированными и усредняя правую часть этого выражения, мы получим

$$\mathbf{E}(L) = \sum_{i=1}^m \text{ДНС}(\text{Д}) \cdot \text{ВД}_i \cdot \text{ВНП}(\text{Д})_i.$$

Тогда для функции  $P(L \leq x) = F_L(x)$  граница потерь уровня  $\alpha$  определится как

$$\Gamma\text{П}_\alpha = q_\alpha(F_L) = F_L^{-1}(\alpha),$$

где мы используем обозначение  $q_\alpha(F_L)$  или  $q_\alpha(L)$  для квантилей уровня  $\alpha$  функции распределения убытка  $L$ , а  $F_L^{-1}(\cdot)$  определяет обобщенное обращение  $F_L(\cdot)$ .

Перед тем как перейти к нормативным и эконометрическим аспектам управления кредитным риском, следует ввести понятие *экономического капитала*. **Экономический капитал** — это капитал, требуемый банку для того, чтобы снизить вероятность банкротства до данного доверительного уровня на заданный промежуток времени. Несмотря на то что расчет величины регулирующего капитала основан главным образом на внешних правилах (правила, устанавливаемые надзорными в банковской сфере органами), которые направлены на обеспечение некоторого уровня «игрового поля», экономический капитал используется в задаче оценки риска с точки зрения экономических реалий. Модели экономического капитала оказываются более реалистичными, чем модели регулирующего капитала. Во многих крупных банках имеются проекты



разработки таких моделей. В целом экономический капитал предлагает расширенный язык для обсуждения ценовой оценки риска, а также оценки доходности на рисковый капитал. Банк, имеющий хорошую модель экономического капитала, может более эффективно использовать свой капитал.

Следующая мера риска наиболее часто используется в моделях экономического капитала для кредитного риска:

$$\text{ЭК}_\alpha = \text{ГП}_\alpha - \mathbf{E}(L).$$

Иногда сама эта мера называется экономическим капиталом. Это обосновано следующими соображениями: поскольку ожидаемые потери уже включены в цену кредита, эта мера дает хороший показатель величины рискового капитала, необходимого для обеспечения платежеспособности банка с данной вероятностью в течение заданного периода времени. Например, для компании, желающей придерживаться Moody's Aa стандарта в течение одного года, установлен уровень вероятности 99,97%, поскольку компании с рейтингом Aa Moody's имеют вероятность дефолта в течение одного года, равную 0,03%.

Подводя итог, можно сказать, что хотя при управлении кредитным риском возникают задачи, аналогичные тем, что возникают при управлении рыночным риском, существует ряд специфических для управления кредитным риском задач, в частности:

- *данные*: недостаток публичной информации, касающейся кредитного качества заемщиков; рейтинговые агентства играют важную роль, но не все кредитные риски рейтингуются;
- *более длинный временной горизонт* (обычно не менее одного года);
- *функции распределения убытков обычно сильно скошенны*, имеют «длинный правый хвост», что указывает на частые малые убытки и редкие большие убытки;
- *моделирование зависимости в кредитном портфеле более важно, чем при управлении рыночным риском*, поскольку на хвост функции распределения убытка сильно влияет спецификация зависимости между дефолтами.

### 7.4.3. Регулирование кредитных рисков: исторический процесс и соглашение Базель II

В соглашении Базель I предприняты первые шаги к созданию международных стандартов расчета минимального регулирующего капитала. Однако подход, предложенный в нем, был достаточно грубым и недостаточно дифференцированным: основное внимание в этом подходе уделялось различению кредитного риска государственных, банковских и

ипотечных облигаций (имеющих низкий риск) небанковского частного сектора или коммерческих кредитных обязательств (имеющих высокий риск). В этом соглашении очень мало или вообще ничего не говорилось относительно дифференциации кредитного риска в рамках классификации коммерческих кредитов. Для всех коммерческих кредитов неявно требовался 8%-ный совокупный резервный капитал вне зависимости от кредитоспособности заемщиков, их внешнего кредитного рейтинга, предложенных гарантий уплаты займа, срока кредита и др. Поскольку для высокорискованных кредитов был установлен слишком низкий уровень резервного капитала, а для низкорискованных кредитов — слишком высокий, эта ошибочная оценка уровня резервного капитала создала у банков стимул к переходу к портфелям, составленным из кредитов с недооцененным уровнем регулирующего рискового капитала, т. е. к портфелям с повышенным риском. Кроме того, в этом соглашении ничего не сказано о политике снижения рисков.

Цель соглашения Базель II заключалась в том, чтобы скорректировать процедуру оценки уровня резервного капитала, принятую в соглашении Базель I, и сделать ее более гибкой и чувствительной к риску. Для оценки кредитных рисков банки могут использовать *стандартизированный подход*, введенный в соглашении Базель I, а в крупных банках оставлялась возможность выбора в пользу использования *подхода внутренних рейтингов* (ПВР).

### 1) Стандартизированный подход

При использовании этого подхода риск актива вычисляется путем умножения величины номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д)) на соответствующий вес риска. Веса риска определяются внешними рейтингами заемщиков (табл. 7.5).

**Таблица 7.5.** Вес риска (в %) при различных кредитных рейтингах

Активы	От	От	От	От	Ниже	Без
	AAA	A+	BВВ+	BВ+		
	до	до	до	до	BВ-	рей-
	AA-	A-	BВВ-	BВ-		тин-
						га
Государство	0	20	50	100	150	100
Банк Вариант 1	20	50	100	100	150	100
Банк Вариант 2	20	50	50	100	150	100
Корпорации	20	50	100		150	100
Розничный портфель	75					
Кредиты с залогом	35					
Коммерческие кредиты	100					
Просроченные ссуды с залогом	100					
Просроченные ссуды	100					

Например, корпоративные облигации с рейтингами от AAA до AA— имеют вес 20%, а корпоративные облигации с рейтингами от BB+ до BB— имеют вес 100%. Розничные продукты (овердрафты и кредитные карты) имеют вес 75%, а кредиты с залоговой собственностью — 35%.

После того как риск каждого из составляющих портфель активов вычислен, можно вычислить риск всего кредитного портфеля, который равен сумме рисков активов, его составляющих. Регулирующий капитал тогда определяется путем умножения риска портфеля на величину, известную как *норма покрытия Куки*, или *норма покрытия МакДонафа*, которая приблизительно равна 0,08.

## 2) Подход внутренних рейтингов (ПВР)

Существует две разновидности этого подхода (*базовый ПВР* и *усовершенствованный ПВР*), но в разных странах они реализуются по разным схемам.

Основная идея этого подхода заключается в том, что банки самостоятельно оценивают вероятность дефолта (ВД) заемщиков. Также в некоторых случаях (например, в случае усовершенствованного ПВР) банки могут самостоятельно оценивать долю невозвращенных при дефолте по кредиту средств (ДНС(Д)). Эти оценки должны быть основаны на количественных моделях, которые с точки зрения регулятора являются приемлемыми.

В соглашении Базель II величина капитала на покрытие кредитных рисков определяется формулами, в которых в качестве исходных данных используются оцененные ВД, DNS(Д) и ВВП(Д) (для более подробной информации см. [BCBS (2005)]).

Вкратце, в любом ПВР существует пять основных элементов:

- а) внутренняя рейтинговая модель;
- б) компоненты риска;
- в) весовая функция рисков;
- г) перечень минимальных требований для применения ПВР;
- д) обзор случаев соблюдения минимальных требований, предоставленный надзорными органами.

Среди **рисковых компонентов ПВР** выделим следующие.

- *Вероятность дефолта (ВД)*: она может быть рассчитана на основании исторического опыта или на основании скоринговых моделей оценки кредитоспособности.

- *Величина номинальных потерь при дефолте (ВВП(Д))* для балансовых сделок равна номинальной сумме (балансовой стоимости) невыплаченной задолженности. Следуя принципам базового ПВР (см. Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru/> в [BCBS (2005)] ), в качестве Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.ru/>

последствия невыплат кредитов и корректирующих величину ВВП(Д) (рекомендации относительно величины корректировки см. разделе Pillar II из [BCBS (2005)]), следует выделить залоги, кредитные деривативы или гарантии, балансовые взаимозачеты. ВВП(Д) для забалансовой деятельности рассчитывается на основании подхода Банка международных расчетов (BIS-I) к переводу результатов внебалансовой деятельности в эквивалент результатов балансовой деятельности с использованием соответствующих коэффициентов перехода (для более подробной информации см. гл. 20 из [Saunders (1997)]).

• *Доля невозвращенных при дефолте по кредиту средств (ДНС(Д)) при использовании базового ПВР* для необеспеченных преимущественных требований устанавливается равной 45%, а для субординированных требований — равной 75%. При расчете ДНС(Д) для обеспеченных требований следует использовать комплексный подход в рамках стандартизированной модели, а именно:

$$\text{ДНС(Д)}^* = \text{ДНС(Д)} \times (\text{ВВП(Д)}^* / \text{ВВП(Д)}),$$

где ДНС(Д) — доля невозвращенных при дефолте средств для необеспеченных преимущественных требований (45%); ВВП(Д) — текущее значение величины номинальных потерь при дефолте; ВВП(Д)\* — значение величины номинальных потерь при дефолте после снижения риска (для более подробной информации см. [BCBS (2005)]).

• *ДНС(Д) при использовании усовершенствованного ПВР* равна оценке фактического ДНС(Д), полученной банком.

• *Эффективный срок долгового обязательства (ЭСДО)*: для базового ПВР эффективный срок долгового обязательства равен 2,5 годам; для усовершенствованного ПВР эффективный срок долгового обязательства равен максимуму из одного года и величины, полученной с помощью весовой функции, определяемой денежными потоками:

$$\sum_t t \cdot \text{ДП}_t / \sum_t \text{ДП}_t,$$

где ДП<sub>t</sub> — денежный поток, поступающий по договору в момент времени *t*. Во всех случаях, ЭСДО будет не более пяти лет.

Веса рисков корпоративных, государственных и банковских обязательств зависят от оценок ВД, ВВП(Д), ДНС(Д), а в некоторых случаях и от ЭСДО. Описание весов риска активов выходит за рамки этой книги, и для получения более полной информации мы рекомендуем использовать материалы [BCBS (2005)].

#### 7.4.4. Обзор одномерных моделей кредитного риска

Перечислим задачи, о которых будет рассказано в этом пункте.

- Как вычислять вероятность дефолта?
- Как вычислять долю невозвращенных при дефолте по кредиту средств (или норму восстановления)?
- Как вычислять величину номинальных потерь при дефолте?

Далее представлены основные подходы и модели, используемые при решении этих задач.

##### • Экспертный подход

Решение о том, выдавать или не выдавать кредит, выносится локальным или отраслевым инспектором по кредитам, локальным или отраслевым менеджером по связям с клиентами. Он может учитывать разные факторы риска, но обычно концентрирует внимание на следующих пяти.

— *Характер*. Рассматривается мера репутации компании, ее готовности возратить долг и истории погашения обязательств. Как правило, большой срок существования компании является составляющей репутации надежного заемщика.

— *Капитал*. Капиталовложения владельцев и отношение этих капиталовложений к величине кредита (плечо). Эти показатели являются хорошими предикторами вероятности банкротства.

— *Способность погашать задолженность* отражает неустойчивость доходов заемщика. Если погашение задолженности по контракту представляет собой постоянный во времени поток, а доходы неустойчивы (имеют большое стандартное отклонение), то могут возникать периоды, когда способность компании погашать задолженность будет ограничена.

— *Обеспечение*. В случае дефолта по кредиту, финансовые организации (кредиторы) требуют от заемщика предоставленное им залоговое имущество. Больше преимущество требований и большая рыночная стоимость залогового имущества по кредиту влекут его меньшую рискованность.

— *Экономические условия (циклы)*. Состояние бизнес-цикла — важный элемент при определении кредитного риска, в особенности для циклично функционирующих отраслей.

Рассмотренный (экспертный) подход относится к достаточно старым, мало востребованным в современной практике. Поэтому мы не будем его рассматривать в деталях (для получения более подробной информации об этом подходе см. работы [Libby (1975)], [Libby, Trotman et al. (1987)], [Treacy, Carey (2000)]).



беспокоят экономистов. Тем не менее эти модели по-прежнему широко используются в финансовом секторе, см. [Altman, Sabato (2007)] и ссылки в этой работе. Более подробно различные модели, используемые при решении вышеупомянутых «дефолтных» задач, в том числе модели кредитного скоринга, будут рассмотрены ниже (см. пп. 7.4.6–7.4.8).

#### • Модели панельных данных

Панельные данные сочетают в себе данные как пространственного типа, так и данные типа временных рядов. Исследования по использованию моделей панельных данных в финансах имеют непродолжительную историю. В работах, представленных в рамках этих исследований, для оценки вероятности дефолта по кредитам, выданным малым и средним предприятиям, предлагаются как модели панельных данных со случайным эффектом, так и модели с фиксированным эффектом. Учет наличия таких качественных особенностей, как, например, характеристики бизнес-сектора, качество управления, позволяет объяснить, почему среди компаний *A* и *B*, имеющих одинаковое финансовое положение и структуру долга, одна оказывается в состоянии дефолта, а другая продолжает выполнять свои долговые обязательства. Вопрос, способствует ли учет неоднородности компаний или бизнес-секторов построению моделей с более качественными оценками вероятности дефолта, весьма актуален для финансовых организаций и рейтинговых агентств, большинство из которых главным образом заинтересованы в ответе на вопрос «*когда возникнет дефолт?*» нежели «*почему возникнет дефолт?*». Более того, использование байесовского подхода для этих моделей позволяет учитывать априорные знания (например, рекомендации аналитиков). Этим моделям посвящен п. 7.4.6.

#### • Внешние и внутренние рейтинговые системы

Построение кредитных рейтингов является традиционным подходом к оценке кредитного риска. Системы построения кредитных рейтингов основаны, как правило, на качественных и количественных оценках. Вычисление итогового рейтинга основано не на каких-либо математических моделях, а зависит от общих соображений и опыта. Рейтинг представляет собой категорию, которая описывает правдоподобность дефолта, но при его использовании всегда надо иметь в виду, что может быть выбран другой критерий присвоения того или иного рейтинга. Рейтинговые системы нельзя рассматривать как системы точной оценки кредитного качества; кроме того, кредитный рейтинг во многом зависит от мнения специалиста по оценке рейтинга.

В целом кредитные рейтинги основываются в большей или меньшей степени на оценке следующих элементов:

- а) возможность выплаты — способность и готовность заемщика выплатить свои обязательства в соответствии с тем, что указано в

кредитном договоре;

б) характер и обеспечение кредитного обязательства;

и) защита, предусмотренная обязательствами в случае банкротства, реорганизации или в других случаях, упомянутых в законе о банкротстве и других законах, касающихся прав кредиторов.

Рейтинг выражается в терминах риска дефолта. Как правило, рейтинруются преимущественные облигации. Однако в некоторых случаях рейтинг присваивается и облигациям более низкого уровня (непреимущественным облигациям), которые в основном имеют рейтинг меньший, чем рейтинг преимущественных облигаций, что отражает более низкий приоритет исполнения обязательств в случае банкротства. Соответственно в случае низкого приоритета исполнения обязательств присваиваемый этим обязательствам рейтинг может не соответствовать формальному определению категории этого рейтинга.

В качестве примера системы категорий рейтинга коротко опишем систему кредитных рейтингов, используемую агентством “Standard and Poor’s”.

**AAA.** Это самый высокий рейтинг, присваиваемый агентством S&P. Заемщик обладает исключительно высокой способностью своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства.

**AA.** Этот рейтинг лишь в небольшой степени отличается от самого высокого рейтинга, присваиваемого агентством S&P. Заемщик обладает очень высокой способностью своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства.

**A.** Обязательства, которым присваивается рейтинг «A», более чувствительны к воздействию неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях, чем обязательства, имеющий более высокий рейтинг. Заемщик имеет умеренно высокую способность своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства.

**BBB.** Заемщик с таким рейтингом имеет достаточную способность своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства. Однако такой заемщик имеет более высокую чувствительность к воздействию неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях, чем более высокие рейтинги «AAA», «AA» и «A».

**BB.** По сравнению с другими спекулятивными обязательствами<sup>22</sup>, имеющими более низкие рейтинги (чем «AAA», «AA», «A» и «BBB»), обязательства с этим рейтингом наименее подвержены неплатежам. Однако заемщик с таким рейтингом имеет более высокую чувствительность к воздействию неблагоприятных перемен в коммерческих, фи-

<sup>22</sup>К классу спекулятивных относят обязательства, которым присваиваются рейтинги «BB», «B», «CCC», «CC» и «C».



нансовых и экономических условиях, которые могут отрицательно повлиять на способность заемщика своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства, чем заемщик, имеющий более высокий рейтинг.

**В.** Обязательства с рейтингом «В» в большей степени подвержены неплатежам, чем обязательства с рейтингом «ВВ», но в текущий момент заемщик с рейтингом «В» способен исполнить свои обязательства в срок и в полном объеме. Однако у таких обязательств имеется более высокая уязвимость при наличии неблагоприятных коммерческих, финансовых и экономических условий, чем у обязательств с более высоким рейтингом.

**ССС.** На данный момент существует потенциальная возможность невыполнения эмитентом своих долговых обязательств; своевременное выполнение долговых обязательств в значительной степени зависит от благоприятных коммерческих, финансовых и экономических условий. В случае неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях весьма маловероятно, что заемщик сможет выполнить свои обязательства в срок и в полном объеме.

**СС.** Заемщик с таким рейтингом в настоящее время имеет высокую вероятность невыполнения своих долговых обязательств.

**С.** Для субординированного кредита или иных обязательств с рейтингом «С» существует очень большая вероятность их неисполнения. Рейтинг «С» может быть присвоен заемщику, в отношении которого возбуждена процедура банкротства или предпринято аналогичное банкротству действие, но платежи или выполнение долговых обязательств продолжаются. Рейтинг «С» может быть также присвоен выпускам привилегированных акций в случае возникновения в будущем долгов по выплате дивидендов или недостатка средств для исполнения иных обязательств, предусмотренных привилегированными акциями, хотя в текущий момент заемщик выполняет все свои обязательства в срок и в полном объеме.

**Д.** Дефолт по долговым обязательствам. Рейтинг «D» присваивается заемщику в том случае, если выплаты по обязательствам не производятся, и аналитики агентства S&P полагают, что такие выплаты не будут сделаны даже в льготный период. Рейтинг «D» присваивается:

- а) заемщику, на которого подана петиция о банкротстве;
- б) заемщику, который признан банкротом или в отношении которого предприняты действия, аналогичные банкротству, в случае, если он отказывается от выплат по своим обязательствам.

Далее мы не будем рассматривать рейтинговые системы, поскольку их детальный анализ выходит за рамки нашей книги. Однако для получения более полной информации относительно рейтинговых систем

мы рекомендуем обратиться к работам [Treasy, Carey (2000)], [BCBS (2000)], [Grier, De Stefano (2001)], а также к технической документации рейтинговых агентств “Standard and Poor’s”, “Moody’s” и “Fitch”, которую легко можно найти в Интернете.

### • Структурные модели

Иногда ценные бумаги, выпущенные той или иной компанией, оцениваются с помощью моделей мертоновского типа (или структурных моделей), основанных на структурных переменных компании (т. е. на значениях, отражающих состояние активов и пассивов компании). Первые работы, в которых впервые были изложены модели этого типа, появились в начале 1970-х гг. (см. [Merton (1970)], [Merton (1977)], [Bielecki, Rutkowski (2002)] и [Bharath, Shumway (2006)]). Как в работе [Black, Scholes (1973)], так и в работе [Merton (1974)] отмечается, что корпоративные облигации могут быть оценены так же, как простые ванильные опционы. Излишне говорить, что использование формулы Блэка—Шоулса для ценообразования ванильных опционов требует некоторых основополагающих предположений относительно поведения базового актива, безарбитражности и возможности хеджирования в любой момент времени. Кроме того, недавние разбирательства по дефолтам таких транснациональных корпораций, как «Энрон», «Пармалат» и «Вордлком», четко показали, насколько бухгалтерские данные могут быть искажены и далеки от подлинного финансового положения компании. Когда имеют место финансовые мошенничества, модели, которые используют бухгалтерские данные для прогнозирования вероятности дефолта (например, модели мертоновского типа), не могут быть применены, поскольку их прогнозы абсолютно ненадежны. Во избежание подобных проблем был предложен иной подход, в котором используются только курсовые стоимости акций, а также возникает возможность при моделировании динамики курсовой стоимости акций использовать не только нормальное распределение. Более подробно эти модели представлены в пп. 7.4.7. и 7.4.8.

## 7.4.5. Оценка качества моделей: оперативная кривая, площадь под ней и функции потерь

Для того чтобы сравнить различные модели, в эмпирической литературе, как правило, используются критерии, основанные на статистических тестах (см. [Burnham, Anderson (1998)]), на функциях информационного типа (см. [Akaike, (1974)], [Schwarz, (1978)], [Bernardo, Smith (1994)] и [Varnik (1998)]), на функциях потерь (см., например, [Kohavi, Provost (1998)]), а также на вычислительных критериях (см., например, [Efron (1979)], [Nasir, Tibshirani et al. (2001)]). Обзор подходов к сравнению

ному анализу моделей смотри, например, в [Giudici (2003)]<sup>23</sup>.

Повсеместное распространение вычислительных методов привело к интенсификации развития критериев выбора модели. Эти критерии обычно основаны на разбиении имеющейся выборки на две подвыборки: «обучающую» и «экзаменующую». По первой выборке оцениваются параметры, а вторая используется для оценки ее дееспособности. При этом возможно сравнение моделей разной структуры.

Сосредоточимся на результатах, полученных из таблицы классификации подходов к прогнозированию, которую назовем таблицей «факт–прогноз» (см. [Kohavi, Provost (1998)]). Как правило, эта таблица обладает тем преимуществом, что с ее помощью можно легко сравнивать различные модели, но, с другой стороны, для такого сравнения необходима аккуратная формализация и математическая строгость.

Таблица содержит информацию о фактических и прогнозируемых классах, полученных в результате классификации. Эффективность модели обычно оценивается на основании данных, представленных в таблице. В табл. 7.6 представлена схема «факт–прогноз» для двух классов<sup>24</sup>.

**Таблица 7.6.** Теоретическая схема «факт–прогноз»

Факт	Прогноз	
	Неплатежеспособные компании	Платежеспособные компании
Неплатежеспособные компании	<i>a</i>	<i>b</i>
Платежеспособные компании	<i>c</i>	<i>d</i>

В контексте предмета нашего исследования, элементы таблицы имеют следующий смысл:

*a* — количество правильных прогнозов того, что компания неплатежеспособна;

*b* — количество неправильных прогнозов, утверждающих, что компания платежеспособна;

*c* — количество неправильных прогнозов, утверждающих, что компания неплатежеспособна;

*d* — количество правильных прогнозов того, что компания платежеспособна.

<sup>23</sup>Некоторым аспектам этой темы посвящена также гл. 1 данной книги.

<sup>24</sup>Рассуждения проводятся в контексте схемы проверки двух простых гипотез:  $H_0$  — компания в состоянии дефолта (основная гипотеза) и  $H_1$  — компания платежеспособна (конкурирующая гипотеза). Поэтому понятия «позитив» и «негатив» означают соответственно принятие или отклонение основной гипотезы.

Важным инструментом оценки эффективности модели прогнозирования вероятностей является **кривая соотношений правильной и ложной классификации объектов**, так называемая **оперативная кривая**)<sup>25</sup> (ОК), рассмотренная, в частности, в работах [Metz, Kronman (1980)], [Goin (1982)] и [Hanley, McNeil (1982)]. При условии, что нам задана таблица «факт–прогноз» и пороговое значение (для отнесения к тому или иному классу), оперативная кривая строится на основе совместных частот правильных прогнозов и фактических событий, совместных частот неправильных прогнозов и фактических событий. Более точно эта кривая строится на основании следующих условных вероятностей:

- *чувствительность*:  $a/(a + b)$  — доля случаев, в которых спрогнозирована неплатежеспособность компании, при условии, что в действительности компания была неплатежеспособной;
- *специфичность*:  $d/(d + c)$  — доля случаев, в которых спрогнозирована платежеспособность компании, при условии, что в действительности она и была платежеспособной;
- *ложная позитивность* (или 1-специфичность):  $c/(c + d)$  — доля случаев, в которых спрогнозирована неплатежеспособность компании, при условии, что компания была платежеспособной (ошибка II рода);
- *ложная негативность* (или 1-чувствительность):  $b/(a + b)$  — доля случаев, в которых спрогнозирована платежеспособность компании, при условии, что компания была неплатежеспособной (ошибка I рода).

Оперативная кривая строится следующим образом: для каждого фиксированного порогового значения ставится в соответствие точка на декартовой плоскости, на которой ось  $x$  отвечает значениям ложной позитивности (или 1-специфичности), также называемая нормой ложной тревоги, а ось  $y$  отвечает значениям чувствительности, также называемая нормой попадания (рис. 7.15). Следовательно, каждая точка на этой кривой будет отвечать некоторому фиксированному пороговому значению. А значит, ОК может быть использована для выбора порогового значения, балансирующего чувствительность и специфичность. В терминах сравнения моделей наилучшей из двух кривых признаем ту, которая расположена левее (в идеальном случае эта кривая совпадает с осью  $y$ ).

Одна из особенностей хорошей модели состоит в том, что она имеет:

- *большую (насколько это возможно) норму попадания (правильная классификация заемщика в качестве потенциального банкрота);*

<sup>25</sup> В англоязычной литературе кривая соотношений правильной и ложной классификации объектов называется “Receiver Operating Characteristic curve” или “ROC Curve”.  
 Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.рф>

• малую (насколько это возможно) норму ложной тревоги (неправильная классификация кредитоспособного заемщика как потенциального банкрота).

Для того чтобы проанализировать мощность дискриминации рейтинговой системы независимо от выбранного порогового значения, норма ложной тревоги и норма попадания рассчитываются для всех возможных пороговых значений. Точки, определенные таким образом, образуют ОК.

Чем круче изменяется кривая, тем более точна рейтинговая система. ОК идеальной рейтинговой системы будет расположена на траектории, соединяющей точки (0; 0), (0; 100) и (100; 100). А в случае чисто случайной рейтинговой системы, ОК будет расположена вдоль прямой, соединяющей точки (0; 0) и (100; 100).

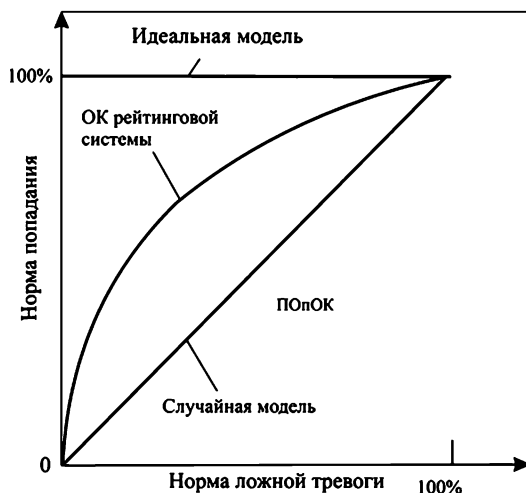


Рис. 7.15. Оперативная кривая (ОК) и площадь области под ней (ПОпОК)

Однако несмотря на то что ОК не зависит от типа распределения по классам или потерь, связанных с ошибочной классификацией (см. [Provost, Fawcett et al. (1998)]), они зависят от пороговых значений, отделяющих платежеспособные компании от неплатежеспособных. Опубликованы работы (см., например, [Buckland et al. (1997)]), в которых предлагается определять область под ОК как меру эффективности прогнозирования с помощью бутстреп-доверительных интервалов. Область под ОК всегда заключена в квадрате с вершинами (0; 0), (0; 100), (100; 0) и (100; 100). Площадь области под ОК всегда заключена между нулем и  $10^4$ . Чем ближе значение этой площади к  $10^4$ , тем более точна рейтинговая система.

Было показано, что площадь под эмпирической ОК, рассчитанная методом трапеций, совпадает с U-статистикой Манна — Уитни, используемой для сравнения распределений двух выборок (см. [Vapnet, 1975]).

В работе [Hanley, McNeil (1983)] используются некоторые свойства этой непараметрической статистики для сравнения двух мер области под ОК, соответствующих двум разным методам, примененным к одной и той же совокупности данных. Аналогичный подход предложен в работе [DeLong, Clarke-Pearson et al. (1988)].

Кроме того, в работе [Fielding, Bell (1997)] представлены разнообразные **критерии эффективности, зависящие от порогов**. Следуя этим критериям, оптимальное значение порога определяется на основании:

- максимизации каппа (*P*-каппа), более подробную информацию см. в [Fielding, Bell (1997)];
- минимизации разности между чувствительностью и специфичностью (в работе [Schröder, Richter (1999)] эта разность называется *P-fair*);
- максимизации нормы правильной классификации или, *P-opt*, которая вычисляется на основании оперативной кривой (см. [Zweig, Campbell (1993)]) и учитывает значения как ложно позитивных прогнозов, так и ложно негативных прогнозов;
- фиксированного порогового значения  $P = 50\%$  (или  $P = 0,5$  в долях), которое является эталонным в финансовой литературе.

Более того, как отмечает Базельской комитет по банковскому надзору, величина и число правильных прогнозов являются вопросами, которыми должны заниматься надзорные за банковской деятельностью органы. Эти вопросы могут изучаться с помощью так называемой **функции потерь**. Следовательно, в этом контексте, учитывая как таблицу «факт–прогноз», так и функцию потерь, мы хотим выбрать наилучшую модель прогнозирования. В частности, согласно структурной схеме, предложенной в [Granger, Pesaran (2000)], платежная матрица, суммирующая результаты принятия решений, имеет вид, представленный в табл. 7.7.

**Таблица 7.7.** Платежная матрица

	Фактическое состояние	
Прогноз	$y_{it} = 1$	$y_{it} = 0$
$\hat{y}_{it} = 1$ ( $\hat{p}_{i,t} > \text{Порог}$ )	0	$\theta_{i,t}^0$
$\hat{y}_{it} = 0$ ( $\hat{p}_{i,t} \leq \text{Порог}$ )	$\theta_{i,t}^1$	0

В таблице  $\theta_{i,t}^0$  — издержки банка в ситуации, когда он не выдает кредит компании  $i$ , которая в действительности не находится в состоянии дефолта, а величина  $\theta_{i,t}^1$  (обязательства перед банком, умноженные на

норму восстановления) — убыток в ситуации, когда кредит компании  $i$  предоставляется, но она оказывается в состоянии банкротства. Потери банка при правильном прогнозе равны нулю. Это позволяет выписать следующее выражение для функции финансового убытка (см. [Fantazzini, Figini (2009a)], [Fantazzini, Degiuli et al. (2008)]):

$$Loss = \sum_i \sum_t \theta_{i,t}^1 y_{i,t} (1 - \mathbf{1}\{\hat{p}_{i,t} > \text{порог}\}) + \theta_{i,t}^0 (1 - y_{i,t}) \mathbf{1}\{\hat{p}_{i,t} > \text{порог}\},$$

которая представляет собой сумму взвешенных элементов четырех типов из таблицы «факт–прогноз». Что касается нормы восстановления, то, например, при использовании базового подхода внутренних рейтингов для необеспеченных кредитов с первоочередным правом требования она равна 55% ( $NB=100\% - ДНС(Д)$ , где  $ДНС(Д)=45\%$ ).

#### 7.4.6. Применение классических и байесовских моделей панельных данных для прогнозирования дефолта по кредиту

##### 1) Классические модели панельных данных

Первые работы, в которых модели панельных данных используются для прогнозирования дефолта по кредиту для малых и средних предприятий, появились относительно недавно. К ним относится работа [Dietsch, Petey (2007)], в которой для оценки корреляции между стоимостями активов малых и средних компаний во Франции используется пробит-модель для панельных данных, в которой сектор занятости, местоположение и еще некоторые характеристики рассматривались в качестве специфических эффектов (но в этой работе не были представлены результаты прогнозирования). Точно так же в работе [Fidrmuc, Hainz et al. (2007)] для описания рынка кредитования малых и средних предприятий в Словакии используется пробит-модель для панельных данных. В работе [Fantazzini, Figini (2009a)] для прогнозирования вероятностей дефолта малых и средних предприятий предлагаются и сравниваются модели панельных данных из достаточно широкого спектра, в частности, рассматриваются такие классические модели, как модели со случайными эффектами, модели со случайными коэффициентами, учитывающими ненаблюдаемые неоднородности.

Большинство рейтинговых агентств обычно анализируют отдельно каждую компанию и оценивают риск дефолта с помощью критериев, основанных на годовых финансовых данных. Однако, как указывается в рекомендациях Международного валютного фонда относительно мо-





ность при заданных значениях предикторов  $P(Y_{itj} = 1|X_{itj})$ . Для бинарной случайной величины всегда берется распределение Бернулли. Типичным выбором для функции связи является логит- или пробит-функция. Логит-функция связи более привлекательна, поскольку при ее выборе линейная модель строится для  $\ln \left\{ \frac{P(Y_{itj}=1|X_i)}{1-P(Y_{itj}=1|X_i)} \right\}$  (подробнее см. [Dobson (2002)]).

Отметим, что здесь используются классические обозначения для моделей такого типа, см. [Rabe-Hesketh, Skrondal (2004, 2005)] и ссылки в этой работе. Однако логистическую регрессионную модель можно рассматривать как модель латентного отклика, в которой предполагается, что рассматриваемой бинарной величине  $Y_{itj}$  соответствует некоторая латентная непрерывная случайная величина  $Y_{itj}^*$ : если латентная переменная больше нуля, наблюдаемый отклик равен 1, иначе 0 (см., например, [Айвазян (2010), п. 9.1]). Модель линейной регрессии специфицируется для этой латентной величины, и ошибка в такой регрессионной модели имеет нормальное или логит-распределение. Итак:

$$Y_{itj} = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_{itj}^* > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $Y_{itj}^* = \beta' X_{itj} + \varepsilon_{itj}$ .

Для того чтобы ослабить предположение об условной независимости между компаниями/заемщиками при заданных значениях предикторов, в линейную регрессионную модель в качестве предиктора включают индивидуальные нормальные *случайные эффекты*  $\varsigma_i$ :

$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj}, \varsigma_i)\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_i.$$

В частности, в работе [Fantazzini, Fegini (2009a)] предлагаются следующие модели (с пробит- и логит-функциями связи):

$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj})\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_{1,i}, \quad (7.12)$$

$$\varsigma_i \in N(0, \sigma_{\varsigma,1}^2)$$

$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj})\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_{2,j}, \quad (7.13)$$

$$\varsigma_j \in N(0, \sigma_{\varsigma,2}^2)$$

$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj})\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_{1,i} + \varsigma_{2,j}, \quad (7.14)$$

$$\varsigma_i \in N(0, \sigma_{\varsigma,1}^2),$$

$$\varsigma_j \in N(0, \sigma_{\varsigma,2}^2),$$

где  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — это индекс, идентифицирующий компании, а  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — индекс, идентифицирующий бизнес-секторы.

Можно получить еще более гибкую модель, если в моделях (7.12)–(7.14) предположить, что некоторые или все коэффициенты случайны. Например, в приложениях, связанных с оценкой кредитного риска, мы хотим протестировать, является ли эффект между бизнес-секторами, вносимый отдельной финансовой характеристикой, случайным. Это можно сделать, если положить коэффициент при соответствующей характеристике случайным.

Пусть случайная величина  $\varsigma_{2,j}$  отвечает за случайный эффект между бизнес-секторами 2-й характеристики, и она равна отклонению от среднего этого случайного эффекта. Тогда модель может быть специфицирована следующим образом:

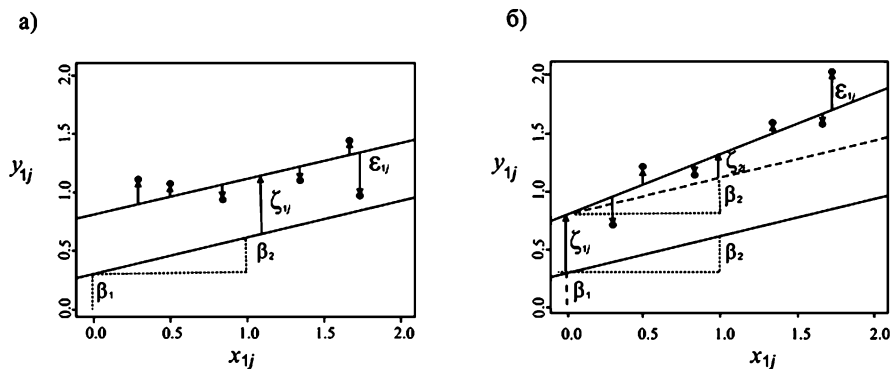
$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj})\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_{1,i} + \varsigma_{2,j} \cdot x_{itj}^{(2)},$$

где  $x_{itj}^{(2)}$  — рассматриваемый предиктор (в нашем случае некоторая финансовая характеристика)<sup>26</sup> и

$$\begin{bmatrix} \varsigma_{1,j} \\ \varsigma_{2,j} \end{bmatrix} \in N_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\varsigma,1}^2 & \sigma_{\varsigma,12} \\ \sigma_{\varsigma,12} & \sigma_{\varsigma,2}^2 \end{bmatrix} \right).$$

Предиктор  $x_{itj}^{(2)}$  подбирается на основании содержательных соображений.

Для иллюстрации различий между моделью с фиксированными эффектами и моделью со случайными коэффициентами обратимся к рис. 7.16, на котором представлен пример с единственным регрессором  $x_{ij}$ . Для более детального ознакомления с этими примерами см. работы [Rabe-Hesketh and Skrondal (2004, 2005)].



**Рис. 7.16.** Модель со случайным эффектом (а) и модель со случайными коэффициентами (б)

<sup>26</sup> Отметим, что в этой модели через  $\sigma_{\varsigma,2}^2$  обозначена дисперсия случайного коэффициента  $\varsigma_{2,j}$ , который, вообще говоря, может быть отличен от дисперсии случайного эффекта  $\epsilon_{ij}$ .  
 Скопировано с сайта <http://uchebniky.ru/elektronnyy-bibliotek/>  
 Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.pf>

Заметим, что совместное распределение случайных величин  $\beta' X_{itj}$  (см. (7.11)) в этих моделях при условии наблюдаемых регрессоров не может быть представлено в функциональной форме и оценивается с помощью приближенных методов, например с помощью квадратурных формул Гаусса — Эрмита. Однако если их плотность островершинна, то обычные квадратуры могут давать весьма плохие приближения (см. [Rabe-Hesketh et al. (2002, 2005)]). Такая ситуация может возникнуть тогда, когда имеются достаточно большие кластеры, что типично для баз данных по кредитам. В этом случае рекомендуется использовать альтернативный метод, известный как метод адаптивных квадратур, поскольку с его помощью можно получить более точные приближения, что, в свою очередь, возможно благодаря масштабированию квадратуры и ее весов, а также преобразованию подынтегральной функции. Но все же качество приближения, обусловленное этим методом, зависит от параметров модели. Подробное описание алгоритма применения метода адаптивных квадратур можно найти в работах [Rabe-Hesketh et al. (2002, 2005)], [Rabe-Hesketh, Skrondal (2004, 2005)]. Для оценки рассматриваемых моделей Рейб-Хескес, Скрондал и Пиклес написали в статистическом пакете STATA процедуру GLLAMM, которая доступна на сайте [www.gllamm.org](http://www.gllamm.org).

Наконец отметим, что мы не рассматривали логит-модели с фиксированным эффектом для панельных данных, поскольку такие модели оцениваются только по реализациям, отличным от «нулевых» (т.е. только по данным о тех заемщиках, которые подверглись дефолту). Слабая информативность других данных в задаче оценивания модели приводит к существенному снижению эффективности оценивания (см. [Cameron, Trivedi (2005)]).

## 2) Применение байесовских моделей панельных данных к кредитному риску

В работе [Fantazzini, Fegini (2009a)] предлагается объединить различные типы информации. Цель этого состоит в том, чтобы соединить результаты «экспериментирования», которые мы получаем в виде балансовых данных, и априорные знания. Как правило, априорные знания представлены в виде неструктурированных данных (качественная информация), например, в виде комментариев аналитиков, текстовой информации и т. д. Для того чтобы показать, как достичь эту цель на примере данных по средним и малым предприятиям, в работе [Fantazzini, Fegini (2009a)] рассмотрен набор байесовских моделей для панельных данных, использующих моделирование цепей Маркова.

Качественная информация, которой обладали авторы этой работы, включала в себя описание аналитиков рассматриваемых средних

и малых предприятий. В этих описаниях были изложены вероятные перспективы развития предприятий, без каких-либо четких указаний относительно того, стоит ли выдавать кредит или нет. В личной беседе с ответственными лицами, предоставившими эту информацию, последние отметили, что подобное описание с общими рекомендациями было обусловлено тем, что не только аналитик участвует в принятии окончательного решения. Последнее слово всегда за финансовым директором: указания последнего могут вызвать проблемы в некоторых спорных случаях. Кроме того, следует отметить, что для многих рассматриваемых малых и средних предприятий априорная информация не была указана. Более того, упомянутые ответственные лица отмечали невозможность определить четкие закономерности относительно изменения баланса этих предприятий, так как доходные предприятия с положительными денежными потоками могут иметь (во многом случайные) негативные перспективы и наоборот. Принимая во внимание имеющуюся качественную информацию, исследователи решили выбрать так называемые *неинформативные функции априорных распределений* для параметров, определяющих фиксированный эффект, тогда как для параметров, отвечающих за случайный эффект, было выбрано  $[0; 100]$  — равномерное распределение  $U(0, 100)$ , отражающее неоднородность рекомендаций аналитиков (о неинформативных априорных распределениях, используемых в байесовском подходе, см. также гл. 3 книги). Хотя такая ситуация часто встречается при работе с данными по малым и средним предприятиям, мы хотим подчеркнуть, что для получения более надежной априорной информации и более реалистичных априорных распределений необходимо больше данных, отражающих качественную информацию, и больше исследований в этой области.

В работе [Fantazzini, Fegini (2009a)] предложена методология, основанная на байесовском подходе для моделей панельных данных по малым и средним предприятиям, имеющих следующую структуру:

$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj})\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_j,$$

$$\varsigma_j \in N(0, \sigma_{\varsigma,2}^2),$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \in N_k \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \right),$$

$$\sigma_{\varsigma,2} \in U(0; 100).$$

При оценивании параметров авторы следовали стандартной схеме анализа байесовских моделей со случайными эффектами, предложенной в работах [Crowder (1978)], [Breslow, Clayton (1993)], [Gelman et al. (2004)] и [Gelman (1997a,b)]. Описание реализации байесовского под-

хода на примерах многих моделей общедоступно по адресу в Интернете: <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>.

Возможны и другие подходы (для более подробной информации см. [Cai, Dunson (2006)] и ссылки в этой работе). В статье [Fantazzini, Figini (2009a)] предложена модель с использованием цепей Маркова. В частности, при прогнозировании использовался формализованный алгоритм моделирования Гиббса (для более подробной информации относительно этого алгоритма см. [Gamerman (1997a,b)], а также руководство к программному обеспечению Winbugs). В упомянутой работе [Fantazzini, Figini (2009a)] рассматривается байесовский подход и модели со случайными коэффициентами:

$$g\{P(Y_{itj} = 1|X_{itj})\} = \beta' X_{itj} + \varsigma_{1,j} + \varsigma_{2,j} \cdot x_{itj}^{(2)},$$

где  $x_{itj}^{(2)}$  — это некоторый финансовый показатель, а

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varsigma_{1,j} \\ \varsigma_{2,j} \end{bmatrix} &\in N_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\varsigma,1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varsigma,2}^2 \end{bmatrix} \right), \\ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} &\in N_k \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \right), \\ \sigma_{\varsigma,1} &\in U(0, 100), \\ \sigma_{\varsigma,2} &\in U(0, 100). \end{aligned}$$

Отметим, что в моделях со случайными эффектами имеются некоторые проблемы идентификации. Несколько достаточно общих результатов относительно идентификации, неподходящих функций априорных распределений и моделирования при помощи алгоритма Гиббса рассмотрено в работах [Gelfand, Sahu (1999)], [Chen, Fan et al. (2006)].

#### 7.4.7. Модель Мертона

Модель Мертона была предложена в 1974 г. (см. [Merton (1974)]) и является прототипом всех моделей стоимости компании. Эта модель является эталонной и по сей день.

Модель Мертона является основной представительницей класса так называемых *моделей стоимости активов*. Она объясняет дефолт компании падением стоимостей активов компании. В модели Мертона предполагается, что стоимость активов  $V_t$  хорошо описывается процессом броуновского движения, а компания финансируется из своего собственного капитала  $S_t$  и своих долговых обязательств номиналом  $D_t$  со сроком



$$\frac{\partial G_t}{\partial V_t} = \frac{1}{V_t}, \quad \frac{\partial G_t}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 G_t}{\partial V_t^2} = -\frac{1}{V_t^2},$$

$$dG_t = \left( \frac{1}{V_t} \mu V_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{V_t^2} \right) \sigma^2 V_t^2 \right) dt + \frac{1}{V_t} \sigma V_t dW_t =$$

$$= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Наконец, сделав замену  $G_t = \ln V_t$ , получим

$$\ln V_T - \ln V_0 = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_T$$

или, что эквивалентно,

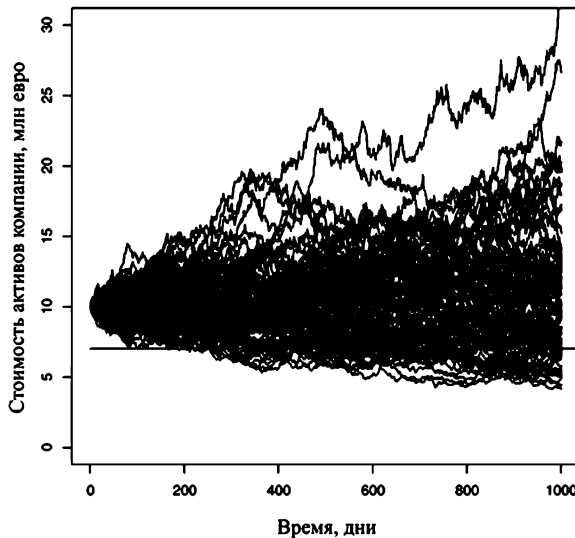
$$V_T = V_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_T \right].$$

Следовательно, вероятность дефолта компании легко вычислить по следующей формуле:

$$P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = \Phi \left[ \frac{\ln \frac{B}{V_0} - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right], \quad (7.15)$$

где  $\Phi(\cdot)$  — функция распределения стандартного нормального закона.

На рис. 7.17 графически представлен пример моделирования стоимости активов компании. В соответствии с экономической интуицией вероятность дефолта возрастает с ростом  $B$ ,  $\sigma$  и убывает с ростом  $V_0$ ,  $\mu$ .



**Рис. 7.17.** Смоделированная стоимость активов компании (процесс броуновского движения)

### 1) Структура капитала и ценообразование активов и долговых обязательств

Структура капитала в мертоновской модели весьма проста (табл. 7.8)

**Таблица 7.8.** Структура капитала компании в момент времени  $t$

Актив	Обязательства/Собственный капитал
Рискованные активы: $V_t$	Долг: $B_t$
	Собственный капитал: $S_t$
Итого: $V_t$	Итого: $V_t$

Предположим, что выполнены условия теоремы Модigliани—Миллера (см. [Miller, Modigliani (1958), (1961)]). Тогда выбор величины  $B$  не влияет на стоимость активов компании  $V$ , а выплата по долгу  $B_T$  и величина остаточного после выплаты долга собственного капитала  $S_T$  в момент времени  $T$  будут равны:

$$B_T = \min(B, V_T) = B - \max(B - V_T, 0),$$

$$S_T = \max(V_T - B, 0).$$

Итак,  $B_T$  равно номиналу безрисковой облигации минус стоимость опциона PUT на базисный актив  $V_t$  с ценой исполнения  $B$ , истекающего в момент времени  $T$ , а  $S_T$  равна стоимости опциона CALL на базисный актив  $V_t$  с ценой исполнения  $B$ , истекающего в момент времени  $T$  (объяснение смысла опционов PUT и CALL см. в сноске 5, п. 7.2.1). Таким образом, получаем

$$B_t = B \exp(-r(T - t)) - P(V_t, B, \sigma, r, T - t),$$

$$S_t = C(V_t, B, \sigma, r, T - t).$$

Используя формулу ценообразования опционов Блэка—Шоулса, можно определить  $C(\cdot)$  и  $P(\cdot)$  (для более подробной информации см. [Hull (2005)]):

$$C(V_t, B, \sigma, r, T - t) = V_t \Phi(d_{1t}) - B \exp(-r(T - t)) \Phi(d_{2t}),$$

$$P(V_t, B, \sigma, r, T - t) = -\Phi(-d_{1t}) V_t + B \exp(-r(T - t)) \Phi(-d_{2t}),$$

где  $\Phi(\cdot)$  — функция стандартного нормального распределения, а

$$d_{1t} = \frac{\ln(V_t/B) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$d_{2t} = d_{1t} - \sigma\sqrt{T - t}.$$



Более того, учитывая, что в момент времени  $t$  выплата по долгу равна разности между стоимостью в момент времени  $t$  безрисковой облигации с номиналом  $B$ , сроком погашения  $T$  и стоимостью опциона PUT на базисный актив  $V_t$  с ценой исполнения  $B$ , истекающего в момент времени  $T$ , получим, что стоимость долга в момент времени  $t$  равна

$$B_t = B \exp(-r(T-t))\Phi(d_{2t}) + V_t\Phi(-d_{1t}). \quad (7.16)$$

В связи с тем что увеличение волатильности  $\sigma$  повышает как цену опциона PUT, так и цену опциона CALL, держатели долговых обязательств и акционеры имеют несколько конфликтующие предпочтения: первые предпочитают низкую волатильность, поскольку в этом случае маловероятно, что опцион PUT будет реализован в момент истечения; акционеры же, наоборот, предпочитают высокую волатильность, поскольку в этом случае прибыль, ассоциированная с длинной позицией по опциону CALL, будет выше.

## 2) Вычисление вероятности дефолта: некоторые замечания

Сделаем некоторые пояснения относительно вычисления вероятности дефолта. В зависимости от целей проводимого анализа, эта вероятность может быть вычислена двумя способами:

- если целью является описание *ценообразования*, например рискованных облигаций, тогда *риск-нейтральная вероятность дефолта* (РНВД), получаемая в предположениях модели Блэка—Шоулса, равна

$$\begin{aligned} \text{РНВД} &= P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = \\ &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{B}{V_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \Phi(-d_{2,0}); \end{aligned} \quad (7.17)$$

в модели Мертона для описания ценообразования облигаций и акций используется формула Блэка—Шоулса;

- если же цель состоит в том, чтобы вычислить *актуальную вероятность дефолта* (также называемую *ожидаемой частотой дефолта* — ОЧД), что является достаточно распространенной ситуацией при управлении рисками, тогда мы должны использовать формулу (7.15), т.е.:

$$\begin{aligned} \text{ОЧД} &= P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = \\ &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{B}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \Phi(-d_2^*). \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$d_2^* = \frac{\ln(V_0/B) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_{2.0} + \frac{(\mu - r)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

а  $\mu$  — ожидаемая доходность активов  $V_t$  компании.

Сравнивая (7.17) с (7.18), получаем

$$\text{РНВД} = \Phi(-d_{2.0}) = \Phi\left[\Phi^{-1}(\text{ОЧД}) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right]. \quad (7.19)$$

В модели ценообразования основного капитала (ЦОК-модель)<sup>27</sup> используется представление  $\mu - r = \beta\pi$ , где  $\beta$  — бета-коэффициент, рассчитанный для модели ценообразования капитальных активов, а  $\pi$  — рыночная премия за риск:

$$\beta = \rho \frac{\sigma}{\sigma_M} = \frac{\text{cov}(R, R_M)}{\text{var}(R_M)},$$

$$\pi = \mu_M - r.$$

Здесь  $\rho$  — корреляция между рыночными ( $R_M$ ) и фондовой ( $R$ ) доходностями, а  $\mu_M$  и  $\sigma_M$  — ожидаемая рыночная доходность и ее дисперсия соответственно. Используя ранее упомянутые определения, можно выписать следующие соотношения:

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\beta\pi}{\sigma} = \rho \frac{\sigma}{\sigma_M} \cdot \frac{\pi}{\sigma} = \rho \frac{\pi}{\sigma_M} = \rho\theta, \quad \theta = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M}, \quad (7.20)$$

где  $\theta$  — рыночное отношение Шарпа. Подставляя (7.20) в (7.19), получим

$$\text{РНВД} = \Phi(-d_{2.0}) = \Phi\left[\Phi^{-1}(\text{ОЧД}) + \rho\theta\sqrt{T}\right].$$

### 3) Калибровка моделей реальными данными

Если мы хотим вычислить вероятность дефолта, предполагая выполненными условия модели Мертона и модели Блэка — Шоулса, нам необходимы оценки для  $V_t$  и  $\sigma$ . К сожалению, ни один из этих двух параметров в явном виде не наблюдается. Тем не менее для торгуемых собственных активов мы можем использовать величину стоимости акции в момент времени  $t$ , т. е.  $S_t$ , в задаче решения системы из двух уравнений относительно двух неизвестных параметров:

- первое уравнение получается из условия, что стоимость собственного капитала равна стоимости опциона CALL, а именно:

$$S_t = C(V_t, B, \sigma, r, T - t) = V_t\Phi(d_{1t}) - B \exp(-r(T - t))\Phi(d_{2t}); \quad (7.21a)$$

<sup>27</sup> В англоязычной литературе модель ценообразования основного капитала называется “Capital Asset Pricing Model” или “CAPM model”. Подробную информацию Скопировано с сайта <http://учебный.информ2000.ru/> относительно этой модели см. в [Cochrane (2005)] или [Берндт (2005)]. Разработка электронных библиотек <http://право.информ2000.ru/>

- второе уравнение получается, если воспользоваться леммой Ито:

$$\sigma_S S_t = \frac{\partial S}{\partial V} \sigma V_t = \Phi(d_{1t}) \sigma V_t. \quad (7.216)$$

Наконец, мы должны решить эту систему нелинейных уравнений относительно  $V_t$  и  $\sigma$ .

Уравнение (7.216) справедливо выписывать только для текущего момента, поскольку на практике отношение  $V_t/S_t$  изменяется слишком стремительно. Более того, модель систематически дает неверные оценки вероятности дефолта. Например, если отношение  $V_t/S_t$  быстро убывает, тогда модель будет систематически переоценивать волатильность актива, а значит вероятность дефолта будет завышена. Обратно, если отношение  $V_t/S_t$  быстро возрастает, тогда модель будет систематически недооценивать волатильность актива, а значит, вероятность дефолта будет недооценена.

#### 4) Кредитные спреды

Кредитные спреды измеряют разность между доходностью нулевой безрисковой безкупонной облигации (с непрерывно начисляемой процентной ставкой) и рискованной безкупонной облигации.

Если параметры  $\sigma$  и  $V_t$  вычислены, спред может быть определен явным образом. Если для описания ценообразования рискованных облигаций мы используем формулу (7.16)

$$B_t = B \exp(-r(T-t)) \Phi(d_{2t}) + V_t \Phi(-d_{1t}),$$

а также учитывая, что доходность рискованных облигаций определяется следующим соотношением:

$$r_B = \frac{1}{(T-t)} \ln(B/B_t),$$

после некоторых преобразований мы получим:

$$r_B - r = -\frac{1}{(T-t)} \ln \left[ \Phi(d_{2t}) + \frac{V_t}{B \exp(-r(T-t))} \Phi(-d_{1t}) \right].$$

Кредитный спред, полученный в предположениях модели Мертона, обладает следующими свойствами:

- он растет с увеличением величины  $V_t/B \exp(-r(T-t))$ , которая является мерой задолженности компании и отражает финансовый риск;
- он растет при увеличении  $\sigma$ , которая отражает бизнес-риск;

• он не имеет определенной тенденции в своем поведении при увеличении ( $T - t$ ). Если мы рассматриваем компанию, имеющую маленькую вероятность дефолта, то график кривой спреда имеет положительную крутизну. Если мы имеем дело с очень рискованной компанией с большой вероятностью дефолта, кривая спреда имеет отрицательную крутизну: если компания не подверглась дефолту в течение первого года, вероятность дефолта в последующие годы, как правило, снижается (а кредитный рейтинг увеличивается).

#### 7.4.8. Прогнозирование вероятности дефолта без учета данных из бухгалтерских отчетов: вероятность нулевой цены (ВНЦ)

Модель Мертона, а также некоторые другие структурные и статистические подходы к прогнозированию предполагают, что данные из бухгалтерских отчетов отражают реальную финансовую ситуацию, складывающуюся в компании. Что касается модели Мертона, то в ней используются бухгалтерские данные, отражающие величину суммарных долговых обязательств компании. Обычной практикой является вычисление суммарных долговых финансовых обязательств как суммы всех краткосрочных займов и половины долгосрочных. Эта практика впервые была предложена корпорацией KMV (которая сейчас принадлежит рейтинговому агентству Moody's) для североамериканских компаний, и использование такой практики гарантирует, что величина долговых обязательств компании не завышена (см. [Vassalou, Xing (2004)], [Hao (2006)]). Хотя в работе [Vassalou, Xing (2004)] указывается, что использование различных процентных ставок для долгосрочных финансовых долговых обязательств не обнаруживает значительного изменения качественных результатов, такой подход может быть неустойчивым к мерам по «декорированию баланса», проводимым для улучшения финансовых показателей компании, или, в наихудшем случае, к финансовым мошенничествам.

Анализ дефолта пищевого гиганта компании «Пармалат» в 2003 г. ясно показал, как информация относительно долговых финансовых обязательств, представленная в подтвержденном (аудитору) балансовом отчете, может отражать только часть реальных долгов.

Коротко об этой истории. В феврале 2003 г. финансовый директор Фаусто Тонна объявил о новом выпуске облигаций на сумму 500 млн евро. Это стало неожиданностью как для инвесторов, так и для генерального директора Калисто Танци. Танци настоял на увольнении Тонна и назначил финансовым директором Альберто Феррариса. Согласно интервью, которое Феррарис в 2004 г. дал журналу «Тайм» он

с удивлением обнаружил, что, будучи финансовым директором, тем не менее, не имеет доступа к некоторым корпоративным бухгалтерским книгам, которые находятся в ведении главного бухгалтера компании Лучиано Дель Солдато: «Феррарис обратился к двум доверенным лицам из своего штата с просьбой провести тайное расследование. После прояснения ситуации вокруг операций, осуществленных компанией «Пармалат» по всему миру, они поделились шокирующими новостями: суммарные долговые финансовые обязательства компании составили 14 млрд евро, т. е. величину более, чем в два раза, превышающую сумму долговых обязательств, указанных в балансовом отчете». О кризисе в компании стало общеизвестно в ноябре 2003 г., когда возникли вопросы относительно сделок с взаимным фондом «Эпикурум», компанией, расположенной на Каймановых островах и связанной с компанией «Пармалат»<sup>28</sup>. Впоследствии это сотрудничество сыграло роковую роль для компании «Пармалат». Феррарис подал в отставку и на посту финансового директора его заменил Дель Солдато. В декабре Дель Солдато также подал в отставку, после того как вывел наличные средства из фонда «Эпикурум», необходимые для выплат по долговым обязательствам. После того как в балансе возникла брешь размером в 7 млрд евро, Танци сложил с себя полномочия члена совета директоров и генерального директора компании. Позднее «Бэнк оф Америка», через который компания «Пармалат» осуществляла финансовые операции, выпустил документ, показывающий, что свидетельство о наличии 3,95 млрд евро на счету компании «Бонлат» является фальсификацией. Через несколько часов после того, как компания официально была объявлена неплатежеспособной и были предъявлены обвинения в финансовых мошенничествах и отмывании денег, Калисто Танци был арестован.

Среди сомнительной практики ведения бухгалтерского учета, использованной в компании «Пармалат», есть и такая ситуация: продажа собственных облигаций, привязанных к кредитному риску этой компании, когда фактически делалась ставка на собственную кредитоспособность и «из воздуха раздувался баланс». Для более подробной информации см. статьи, опубликованные в нескольких номерах за 2004 г. журнала «Тайм», а также работу [Cagri, Benedetto (2006)].

Приведенное описание скандала вокруг компании «Пармалат» ясно показывает, что использование данных из бухгалтерских отчетов для вычисления вероятности дефолта компании может вести по неправильному пути, в результате чего будет получена очень неточная оценка ве-

<sup>28</sup> В 1999 г. компания «Пармалат» учредила на Каймановых островах дочернюю  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru/> Разработка электронных библиотек  
<https://право.информ2000.рф>

роятности дефолта. Для того чтобы избежать таких проблем, рекомендуется использовать новый подход, предложенный в работах [Fantazzini et al. (2008a)], [Fantazzini, Figini (2009a)], в котором нулевая цена используется как дефолтная граница для отделения функционирующих компаний от компаний, находящихся в состоянии дефолта, а вероятность дефолта оценивается без использования данных из публичных бухгалтерских отчетов. Авторы оправдывают адекватность предлагаемого подхода тем, что, как показано во многих работах, котировки акций в основном обусловлены конфиденциальными сведениями, а следовательно, должны быть ближе к оценке реальной ситуации, чем сведения, полученные из официальных бухгалтерских отчетов.

О важности конфиденциальных сведений в определении справедливой цены было впервые упомянуто в работе [French, Roll (1986)], посвященной теоретическому исследованию волатильности доходности акций в торговые дни и неторговые дни, а также за первые часы после открытия рабочей сессии биржи и за несколько часов до ее закрытия. В работе показано, что во многих случаях большая волатильность доходностей активов была вызвана действиями информированных трейдеров, чьи конфиденциальные сведения начинали работать в момент открытия рабочей сессии на бирже. Все бóльшая доступность высокочастотных данных с недавнего времени позволила проводить более точные тесты на качество микроструктурных моделей. Вот лишь некоторые работы ([Hasbrouck (1988)], [Madhavan, Smith (1991)], [Hasbrouck, Sofianos (1993)], [Madhavan, Sofianos (1997)]), в которых показана важность асимметрии конфиденциальной информации относительно динамики цен акций и фьючерсов (в работах [Biais et al. (2005)], [Hasbrouck (2007)] представлены обзоры недавних исследований микроструктуры рынка).

Рассмотрим два следующих тождества, основанных на реальных бухгалтерских данных в момент времени  $T$ :

$$\begin{cases} E_T = A_T - B_T \\ E'_T = A_T = (A_T - B_T) + B_T = E_T + B_T. \end{cases}$$

Финансовый смысл величин  $E_T$  и  $E'_T$  зависит от ситуаций, с которыми сталкивается фирма (табл. 7.9)

В табл. 7.9 показано, что величина  $E_T$  отрицательна, когда компания находится в состоянии дефолта, поскольку в этом случае она представляет собой убытки держателей долговых обязательств в условиях дефолта компании, и  $E_T$  положительна, когда компания является функционирующей, представляя собой величину собственного капитала компании, принадлежащего акционеру.

тельность значения  $E_T$  является прямым следствием ограниченной ответственности, свойственной всем современным западным законодательствам. Кроме того, убытки могут быть теоретически бесконечными так же, как и доходы: убытки авиакомпаний вследствие воздушной атаки 11 сентября 2001 г. или убытки вследствие эпидемии коровьего бешенства среди животных или птичьего гриппа. Следовательно, для описания доходности компании мы можем использовать плотности вероятности, принимающие положительные значения для отрицательных значений аргумента.

**Таблица 7.9.** Финансовый смысл и знаки  $E_T$ ,  $E'_T$

$E_t = A_T - B_t$	$E'_T = A_t$
<i>Функционирующая компания</i>	
Собственный капитал компании (+)	Стоимость активов (+)
<i>Компания в состоянии дефолта</i>	
Убытки держателей долговых обязательств при дефолте (-)	Активы, принадлежащие кредиторам (+)

Основное следствие предыдущего рассуждения состоит в том, что мы можем оценить склонность к дефолту, просто используя величину  $E_T$  вместо величины  $d_2$ , как в модели Мертона, а вероятность дефолта оценивать как  $P[E_T \leq 0]$ , поскольку компания подвергается дефолту в случае, если  $E_t$  неположительно. Более того, при условии, что  $E_T = S \times P_T$ , где  $P_T$  — котировка цены акции в момент времени  $T$ , а  $S$  — число акций, вероятность дефолта компании может быть вычислена как  $P[P_T \leq 0]$ , т.е. как вероятность нулевой цены (ВНЦ). Несмотря на то что котировка цены  $P_T$  — это усеченная величина, которая не может принимать отрицательных значений, величина  $E_T$  не имеет нижней границы, поскольку она имеет различное финансовое значение для функционирующих компаний и компаний, находящихся в состоянии дефолта: в первом случае на финансовом рынке  $E_T$  вычисляется (в электронном виде) ежедневно, тогда как в последнем случае убытки в условиях дефолта вычисляются согласно предписанной в суде процедуре.

Цены акций, как правило, представляют собой нестационарные временные ряды первого порядка интегрируемости ( $I(1)$ ), и обычной практикой является моделирование их динамики при помощи лог-доходностей таким образом, чтобы цены были положительными. Однако нам необходимо найти  $P[P_T \leq 0]$ , поскольку, как было показано ранее, нулевая цена может быть использована как дефолтный барьер. Пространство

способом для вычисления упомянутой вероятности является использование условной модели для *разностей в уровнях цен*,  $X_t = P_t - P_{t-1}$ , вместо разностей в уровнях логарифмов цен.

Аналитическое выражение для  $P[P_T \leq 0]$  можно выписать для нескольких частных и не встречающихся на практике случаев, например для случая нормально распределенных цен с неменяющимися во времени дисперсиями. Когда выписать аналитическое выражение невозможно, необходимо пользоваться методами стохастического моделирования. Если в текущий момент времени  $t$  мы хотим оценить вероятность дефолта в момент времени  $(t + T)$ , то для этого мы можем воспользоваться следующим достаточно общим алгоритмом.

### Алгоритм оценки ВНЦ

**Шаг 1.** Рассмотрим общую условную модель для разностей в уровнях цен  $X_t = P_t - P_{t-1}$ , без логарифмического преобразования, при условии, что мы располагаем всей информацией  $F_t$  об анализируемом процессе до момента времени  $t$ :

$$\begin{aligned} X_t &= \mathbf{E}[X_t|F_t] + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= H_t^{1/2}\eta_t, \quad \eta_t \sim \text{н.о.р.с.в.}(0, 1), \end{aligned} \tag{7.22}$$

где  $\eta_t \sim \text{н.о.р.с.в.}(0, 1)$  означает, что  $(\eta_t)$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, а  $H_t = \mathbf{D}(\varepsilon_t|F_t)$  — дисперсия  $\varepsilon_t$ .

**Шаг 2.** Смоделируем большое число  $N$  траекторий цен до момента времени  $(t + T)$ , используя оцененную на шаге 1 модель временных рядов (7.22).

**Шаг 3.** Оценка вероятности дефолта равна отношению  $n/N$ , где  $n$  — количество смоделированных траекторий из  $N$ , которые касаются или пересекают барьер нулевой цены.

Этот метод позволяет получить ряд важных преимуществ:

- нам необходимы только курсовые стоимости акций;
- нам не нужны ни значение волатильности  $\sigma_A$  компании, ни величина номинала задолженности, как в моделях типа мертоновской модели;
- мы можем использовать более реалистичные, чем логнормальное, распределения;
- мы можем оценить вероятность дефолта для любого временного горизонта  $(t + T)$ ;
- мы можем рассчитывать ежедневные или даже внутридневные вероятности дефолта. Следовательно, ВНЦ может быть использована как инструмент управления рисками;



• ВНЦ может быть использована в качестве системы раннего предупреждения о финансовых дефолтах, поскольку она может быть оценена для любых финансовых временных рядов.

#### 7.4.9. Бутстреп-полосы доверия

Впервые бутстреп-методология (ее описание можно найти в работе [Efron, Tibshirani, 1993]) была использована для изучения воспроизводимости некоторых признаков филогенетических деревьев (см. работу [Felsenstein (1985)]). Позднее в работе [Efron, Tibshirani (1998)] эта методология была рассмотрена с более общих позиций и была названа «проблемой областей». В этой работе эта мера доверия представлена в связи с так называемыми  $p$ -значениями ( $p$ -value) эмпирической функции распределения и байесовскими апостериорными вероятностями.

С появлением бутстреп-техники значительно расширились возможности статистики в ситуациях, когда классические статистические процедуры неприменимы. Бутстреп-оценки стандартных ошибок параметров моделей оказываются весьма полезными в ситуации, когда вычисление стандартных ошибок (асимптотических или неасимптотических) в явном виде невозможно (см., например, работу [Efron, Tibshirani (1993)]). Кроме того, стандартные ошибки, рассчитанные с помощью бутстреп-техники, могут лучше отражать свойства оценок в условиях малых выборок.

На сегодняшний день весьма мало сделано для количественной оценки неопределенности оценок вероятностей дефолта, поскольку основной интерес исследований до сих пор был смещен к области построения *точечных оценок*. Подобная ситуация складывается в других областях исследования, например в биостатистических исследованиях, когда в задаче вычисления вероятности корректной идентификации отдельных генов и их распределения используется параметрическая бутстреп-техника (см. [Van der Laan, Bryan (2001)]). В работе [Karlis, Kostaki (2002)] для оценки коэффициентов смертности различных групп населения используется техника, подобная той, что в работе [Van der Laan, Bryan (2001)]. В работе [Zwane, Van der Heijden (2003)] представлен алгоритм для параметрической бутстреп-техники, который может использоваться в логлинейных моделях с непрерывными независимыми переменными. В работе [Zwane et al. (2004)] параметрический бутстреп-подход используется при построении доверительных интервалов для оценок систем множественных записей, когда регистрационные записи делаются для разных, но пересекающихся популяций.

Некоторые авторы использовали *непараметрическую* бутстреп-технику при логлинейном моделировании (см. например, Piggins



нок. В целях экономии места мы здесь рассмотрим только четыре известные компании, оказавшиеся в состоянии дефолта, чьи финансовые отчеты позднее были юридически признаны неправдоподобными, а следовательно, для них нельзя использовать стандартные подходы (см. [Fantazzini et al. (2008a)]). Это следующие четыре компании:

- «Чирио». 24.09.1999–24.07.2003. Второй по величине крупный дефолт в пищевом секторе Европы (первый по величине — дефолт компании «Пармалат», см. выше п. 7.4.8);
- «Энрон». 20.01.1998–10.01.2002. Второй по величине крупный дефолт в американской истории;
- «Пармалат». 22.02.2000–22.12.2003. Крупнейший дефолт в европейской истории;
- «Ворлдком». 16.07.1998–12.07.2002. Крупнейший дефолт в американской истории.

В статье [Fantazzini et al. (2008a)] сначала представлены результаты тестирования на наличие единичных корней для рассматриваемых финансовых временных рядов при помощи теста Дикки — Фуллера с «детрендингом» обобщенным методом наименьших квадратов, полученные с помощью метода, предложенного в работе [Elliott et al. (1996)], а также с помощью теста, предложенного в работе [Kwiatkowski et al. (1992)]. Нулевая гипотеза в первом методе (ДФ-ОМНК) состоит в наличии единичного корня (т.е. в нестационарности анализируемого временного ряда), в то время как в методе Квятковского и др. (KPSS-методе) нулевая гипотеза состоит в ковариационной стационарности ряда (против альтернативы о его интегрируемости первого порядка). Тщательный анализ уровней и разностей первого порядка ценовых временных рядов за рассматриваемый период наблюдений показывает, что основной их особенностью является их нестационарность (табл. 7.10).

**Таблица 7.10.** Тест на наличие единичных корней для данных по четырем компаниям

Компания	ДФ-ОМНК		KPSS	
	Уровни	Разности первого порядка	Уровни	Разности первого порядка
«Чирио»	-2,083	-20,583 (**)	0,256 (**)	0,065
«Пармалат»	-1,372	-12,395 (**)	0,768 (**)	0,045
«Энрон»	-2,620	-38,785 (**)	0,353 (**)	0,022
«Ворлдком»	-1,359	-34,876 (**)	0,833 (**)	0,057

(\*) статистическая значимость на 5%-ном уровне.

Далее в этой работе рассматривается модель AR(1)-TGARCH(1, 1) для разностей уровней цен  $X_t = P_t - P_{t-1}$ , стандартизированные ошибки которой имеют распределение Стьюдента (для более подробной информации относительно этой модели см. работу [Biais, Glosten et al. 1993]):

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \eta_t \sqrt{h_t}, \quad \eta_t \sim \text{н.о.р.с.в.}(0, 1), \\ h_t &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 D_{t-1} + \beta h_{t-1}, \end{aligned}$$

где  $D_{t-1} = 1$ , если  $\varepsilon_{t-1} < 0$ . Авторы работы [Fantazzini et al. (2008a)] объясняют выбор такой спецификации тем, что она позволяла получить хорошие результаты при моделировании финансовых данных (см. §3 в [Tsay (2002)]), а также [Hansen, Lunde (2005)] и ссылки в этих работах). Что касается выбора числа смоделированных ценовых траекторий  $N$  для оценки ВНЦ, в работе [Fantazzini et al. (2008a)] оно взято равным  $N = 5000$ .

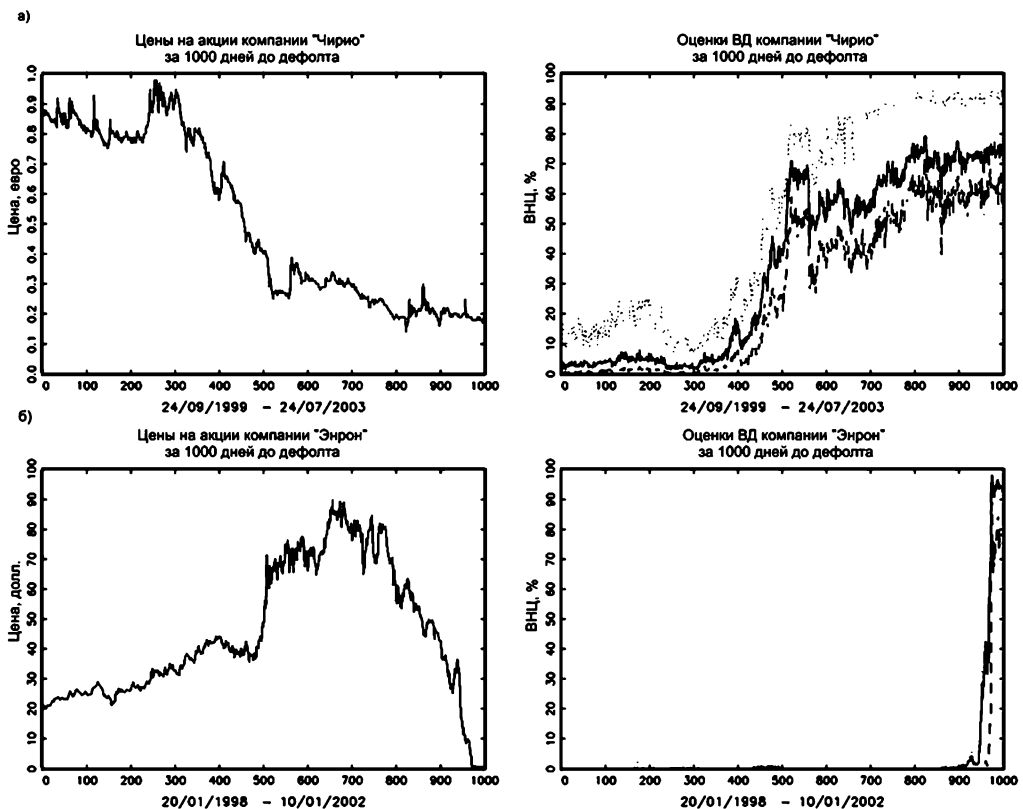
Наконец, в работе [Fantazzini et al. (2008a)] представлены результаты тестирования качества AR(1)-TGARCH(1, 1) моделей, использованных для описания условных маргинальных распределений. Тестирование качества осуществлялось при помощи теста Льюнга—Бокса для стандартизированных остатков в уровнях  $\hat{\eta}_t$  и их квадратов  $\hat{\eta}_t^2$ , нулевая гипотеза которого состоит в отсутствии автокорреляции. Использовались также тесты спецификации, рассмотренные в работе [Granger et al. (2006)]. Для проверки корректности спецификации плотности использовался тест Колмогорова—Смирнова, а для того, чтобы протестировать совместно адекватность динамики и спецификации плотности маргинального распределения модели, использовался «тест на охват», нулевая гипотеза которого состоит в том, что модель для плотности хорошо специфицирована. В последнем тесте носитель функции плотности делится на пять областей. После этого техника интервального прогнозирования применяется к каждой из этих областей в отдельности, а затем ко всем областям совместно (для более подробной информации см. [Granger et al. (2006)]). В целях экономии места в табл. 7.11 представлены только  $p$ -значения каждого из рассматриваемых тестов.

**Таблица 7.11.**  $p$ -значения спецификационных тестов

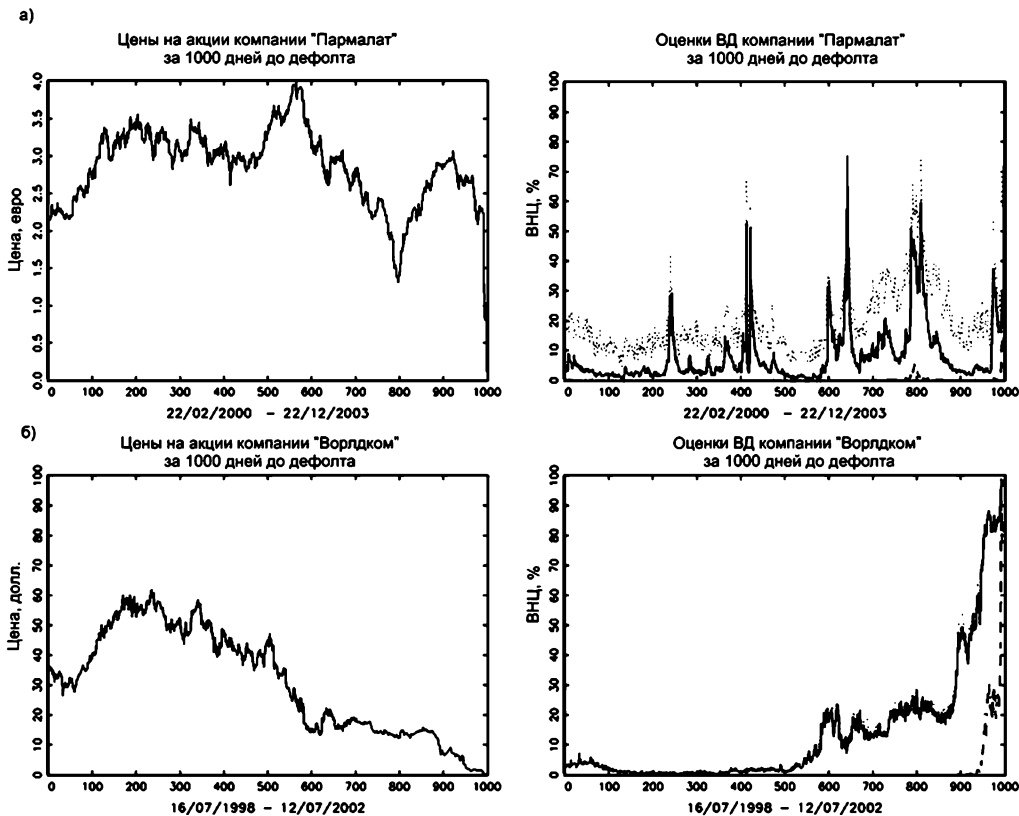
Компания	Тест Льюнга—Бокса (25)		Тест Колмогорова—Смирнова	Тест на охват
	$\hat{\eta}_t$	$\hat{\eta}_t^2$		
«Чирио»	0,112	0,182	0,018	0,017
«Энрон»	0,953	0,096	0,380	0,837
«Пармалат»	0,906	0,971	0,091	0,530
«Роснефть»	0,167	0,758	0,495	0,000

Во всех упомянутых в табл. 7.11 тестах для каждой из рассмотренных маргинальных моделей принимается нулевая гипотеза (по крайней мере, на 1%-ном уровне значимости), что указывает на корректную спецификацию моделей. В целом, представленные результаты указывают на то, что выбранная  $AR(1)$ -TGARCH(1,1)-модель, в которой стандартизированные ошибки имеют распределение Стьюдента, адекватна рассматриваемым финансовым временным рядам. Последнее обстоятельство очень важно, поскольку оно позволяет нам использовать параметрические бутстреп-процедуры для построения доверительных интервалов оценок вероятностей дефолта.

На рис. 7.18 и 7.19 показаны котировки цен акций рассматриваемых четырех компаний за 1000 дней до дефолта, а также вычисленные оценки вероятностей дефолта и 90%-ные доверительные полосы (по оси  $x$  отложено количество дней).



**Рис. 7.18.** Цены на акции и оценки ВД с 90%-ми бутстреп-доверительными полосами (верхняя граница — пунктирная линия, нижняя — штриховая) для компании «Чирно» (а) и «Энрон» (б)



**Рис. 7.19.** Цены на акции и оценки ВД с 90%-ми бутстреп-доверительными полосами (верхняя граница — пунктирная линия, нижняя — штриховая) для компании «Пармалат» (а) и «Ворлдком» (б)

Обратим особое внимание на тот факт, что доверительные интервалы в определенной степени асимметричны. Кроме того, мы наблюдаем сильное различие между американскими и итальянскими компаниями. Вычисленное значение оценки вероятности дефолта за *один год* до дефолта для компании «Энрон» и компании «Ворлдком» составляет более чем 50% от значения оценки вероятности дефолта за *два месяца* до дефолта. Что касается итальянских компаний, интересно отметить, что уже за 2/3 года до дефолта величина оценки вероятности дефолта превышает 50%. Эти результаты соответствуют развитию ситуации, связанному с предварительным расследованием. Оно показало, что финансовые трудности в двух компаниях были известны менеджменту уже в 1990-х гг. Кроме того, хотя достаточно широкие полосы доверия указывают нам на то, что мы должны рассматривать корректность оценки вероятностей дефолта только с некоторой степенью уверенности (в частности, для компании «Пармалат»), мы можем интерпретировать это как знак, указывающий на рыночную неопределенность относительно будущего компании.

В целом предыдущие результаты указывают на разную степень эффективности итальянского и американского рынков в случае финансо-

вых махинаций. Некоторые эпизоды вокруг дефолтов компаний «Энрон» и «Пармалат» могут помочь прояснить причины такого различия.

Жена генерального директора компании «Энрон» Лиза Лей была обвинена в продаже 500 000 акций компании «Энрон» общей суммой в 1,2 млн долл. 28 ноября 2001 г. Отчеты показывают, что миссис Лей размещала предложение на продажу в промежутке времени между 10:00 и 10:20. Новости относительно проблем в компании «Энрон», включая информацию о миллионных (в долларах) убытках, которые были скрыты, стали общеизвестны около 10:30, и вскоре после этого сообщения котировки цен акций упали до одного доллара. Кроме того, бывшей работнице компании «Энрон» Пауле Райекер было предъявлено уголовное обвинение в использовании инсайдерской информации. Райекер получила 18 380 акций компании «Энрон» по цене 15,51 долл. за каждую акцию, а продала эти акции по цене 49,77 долл. за акцию в июле 2001 г., за неделю до того, как стала общеизвестна информация об убытках в 102 млн долл., которая была ей известна на момент продажи ее акций.

Что касается компании «Пармалат», то финансовая полиция обнаружила, что сумма приблизительно в 1–2 млрд евро была выведена с банковских счетов компании «Пармалат» на счета туристических обществ, а также других компаний, принадлежащих семье Танци (до тех пор не имевших отношений с пищевым гигантом), между 1993 и 2003 г.

Следовательно, дефолты этих двух компаний разного типа: хотя информация относительно серьезных проблем в компании «Энрон» была известна работникам этой компании еще за год до того, как она стала общеизвестной, продажи в последние минуты, по-видимому, свидетельствуют о том, что продавцы акций «покидали тонущий корабль». Случай с компанией «Пармалат» несколько отличен от предыдущего случая: по-видимому, менеджмент организовал незаконную систему вывода денег из компании.

#### 7.4.10. Модели для нормы восстановления (НВ) и величин номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д))

Как мы упоминали в п. 7.4.3, существует две разновидности подхода, основанного на внутренних рейтингах (ПВР): *базовый* подход и *усовершенствованный* подход. Они имеют принципиальные различия в том, как рассчитывать параметры ВД, ДНС(Д)(= 1–НВ), ВНП(Д), ЭСДО. Например, при использовании базового подхода только ВД может быть рассчитана на основе внутренних моделей, используемых в банке, тогда как для усовершенствованного подхода на основе внутренних моделей

рассчитываются все четыре параметра и, разумеется, подлежат инспекции надзорных органов в банковской сфере.

Гибкость существующих моделей для вычисления НВ портфеля кредитных активов, вероятно, будет мотивацией перехода банков от использования базового подхода к использованию усовершенствованного подхода. То, как воспользуется банк имеющейся гибкостью, зависит, конечно, от того, насколько хорошо банк представляет общий и дифференцированный характер НВ имеющихся кредитных активов.

**В связи с этим перечислим наиболее характерные особенности и основные факторы, определяющие НВ.**

- Норма восстановления как процент от величины номинальных потерь при дефолте либо высока (70–80%), либо низка (20–30%). Характерной особенностью распределения, описывающего норму восстановления, является бимодальность: следовательно, не совсем корректно рассматривать среднюю норму восстановления.

- Одним из основных определяющих факторов является *наличие или отсутствие секьюритизации дефолтного кредитного обязательства*, а также *место этого дефолтного обязательства в структуре капитала заемщика* (степень субординированности требования). Таким образом, банковские кредиты, будучи на вершине структуры капитала, как правило, имеют большую норму восстановления, чем, например, долговые расписки.

- *Наличие какого-либо залога и степень его ликвидности* являются еще одним определяющим фактором.

- *Тип процедуры банкротства*, определяемый существующим законодательством, влияет на срок восстановления всей величины номинальных потерь или ее части; в частности, в развитых странах существует множество правил, защищающих интересы служащих, а также семей с низкими совокупными доходами.

- *Бизнес-циклы и политика определения процентных ставок* также являются определяющими факторами; нормы восстановления систематически меньше в периоды рецессии, и разница может достигать значительных величин (до 35%). Другими словами, убытки больше в периоды рецессии и меньше в противоположной ситуации.

- *Характер бизнеса заемщика*: фондоемкие отрасли промышленности, в особенности муниципальные, коммунальные предприятия, имеют более высокие нормы восстановления, чем компании из сектора сферы услуг (с некоторыми исключениями, такими как, например, телекоммуникационные и наукоемкие компании).

- *Географическое положение* также имеет значение.

- *Величина номинальных потерь*, как представляется, не имеет **сильного влияния на реальные потери.**



Для более подробной информации см. работы [Altman et al. (2001)], [Altman et al. (2005)], [Varma, Cantor (2005)], [Acharya et al. (2007)] и ссылки в этих работах.

Решения, предложенные для оценки НВ, могут быть разделены на четыре категории.

- *Субъективная оценка* основана на историческом опыте и сегментации кредитного портфеля.

- *Стандартная мера* рассчитывается как фиксированная процентная ставка на основе имеющихся собственных данных.

- *Подразумеваемая рыночная норма восстановления* рассчитывается на основе цен рискованных (но не дефолтных) облигаций, с использованием теоретических моделей ценообразования активов. В эту категорию мы также можем включить оценки НВ, рассчитанные на основе рыночных цен облигаций, оказавшихся в дефолте, или цен ликвидных займов вскоре после фактического дефолта. Эта процедура является классической для английских и американских банков, в то же время она менее распространена в континентальной Европе.

- *Финансовый подход к оценке НВ.* В этом подходе рассматривается множество оценок движения наличных средств и затрат, полученных на основе опыта работы с просроченной задолженностью и (или) с иной собранной информацией и надлежащим образом дисконтированных, а также оценки номинальных потерь. Этот подход достаточно распространен в континентальной Европе.

Если мы рассмотрим последнюю методологию, то в соответствии с ней НВ вычисляется на основе *ожидаемого восстановления* (ОВ), т. е. НВ, которую банк ожидает получить от заемщика рассматриваемого типа, учитывая его залог, величину *административных расходов* (АР), связанных с процедурой ликвидации, а также оценку необходимого для восстановления времени ( $t$ ) и *маргинальную стоимость фондирования* (МСФ), в качестве которой может быть взята процентная ставка по межбанковским операциям или своп-ставка. Сохраняя ранее введенные обозначения, НВ вычисляется следующим образом:

$$НВ = \frac{ОВ - АР}{(1 + МСФ)^t}$$

или

$$ДНС(Д) = 1 - \frac{ОВ - АР}{(1 + МСФ)^t}.$$

Важно отметить, что процедура вычисления НВ сильно зависит от определения неплатежеспособности, которого мы придерживаемся при анализе: если определение очень строгое, оценка НВ будет, как правило, достаточно низкой, и, соответственно, дефолтные заемщики будут

в крайне жестких условиях. Если определение не является строгим, то оценка НВ возрастет и заемщики, классифицированные как неплатежеспособные, будут в более хороших условиях, чем заемщики, классифицируемые как дефолтные в соответствии с более строгим определением. Кроме того, существование различных законов о банкротстве неизбежно сказывается на оценках НВ (см., например, табл. G.1 из главы Техническая Документация CreditMetrics в работе [Gupton et al. (1997)]).

### 7.4.11. Эмпирические свидетельства для значений норм восстановления

Существует множество исследований, отраженных в финансовой литературе, касающихся изучения восстановления облигаций или займов. В большинстве из опубликованных исследований изучается восстановление облигаций, а не восстановление займов. Это объясняется тем, что по облигациям имеется достаточное количество данных. Однако хотелось бы, чтобы займы были столь же хорошо исследованы, как и облигации. Банковские займы обычно имеют большой приоритет в структуре капитала и банкам следует более активно следить за меняющимся финансовым здоровьем заемщиков.

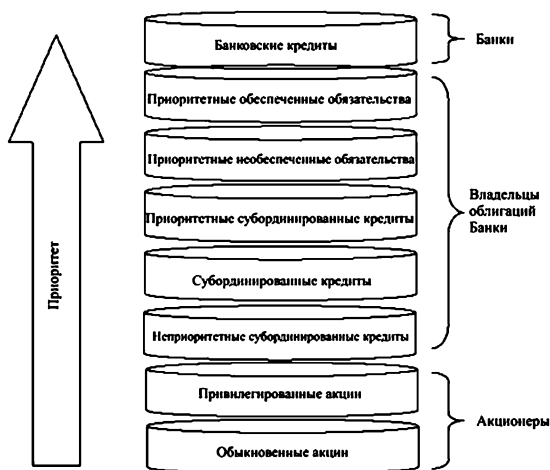


Рис. 7.20. Степень приоритета

В работе [Hu, Perraudin (2002)] показано, что НВ должника зависит от промышленного сектора, в котором занят должник. А в работе [Altman, Kishore (1996)] показано, что должники из ряда отраслей, таких как, например, коммунальный сектор, имеют большую НВ, чем другие.

Как показано в работе [Altman, Kishore (1996)], наиболее устойчиво повторяющимся результатом является результат, состоящий том,

что приоритет обязательств в структуре капитала должника и наличие обеспечения (обеспеченные обязательства против необеспеченных) — это наиболее важные составляющие НВ долговых обязательств. В этой связи структура капитала компании может быть разделена следующим образом (рис. 7.20).

В США и многих других странах законы о банкротстве имеют важную особенность, называемую «правилом абсолютного приоритета» (ПАП). Коротко говоря, это правило гласит, что стоимость компании, оказавшейся в состоянии банкротства, должна быть распределена между поставщиками капитала таким образом, чтобы сначала долг был погашен перед кредиторами, обязательства перед которыми имеют наибольший приоритет, затем долг должен быть погашен перед кредиторами, обязательства перед которыми имеют меньший приоритет, а затем оставшаяся стоимость компании распределяется между акционерами компании.

Однако на практике ПАП систематически нарушается. В действительности, некоторыми исследователями обнаружено, что в 65–80% банкротствах акционеры получают какие-то средства до того, как долги будут полностью погашены перед кредиторами (см., например, работу [Eberhart, Weiss (1998)] и ссылки в этой работе). Основной причиной этого является скорость погашения долгов (кредиторы согласны с нарушениями ПАП ради того, что побыстрее получить причитающиеся средства).

Если мы рассмотрим значения НВ, представленные в некоторых недавних исследовательских работах, то мы можем рассчитать средние значения НВ для каждого класса и получить более надежные значения (табл. 7.12).

**Таблица 7.12.** Средние значения НВ (%)

Авторы	Банковские кредиты	Приоритетные обеспеченные обязательства	Приоритетные необеспеченные обязательства	Приоритетные субординированные кредиты	Субординированные кредиты
[Carty, Lieberman (1996)]	71	57	46		34
[Van de Castle, Keisman (2000)]	84	66	49	37	26
[Hamilton, Cantor, Ou (2002)]	67	52	44	35	32
[Emery, Cantor, Avner (2004)]	67				
[Fons (1994)]		65	48	40	30
[Altman, Kishore (1996)]		57	48	34	31
[Hu, Perraudin (2002)]		53	50	387	33
[Altman, Fanju (2004)]		52	35	39	31
Средние значения	<b>72,25</b>	<b>57,57</b>	<b>45,71</b>	<b>35,67</b>	<b>31,00</b>

Тем не менее эти значения должны рассматриваться с некоторой степенью предосторожности, поскольку количество изучаемых данных обычно не очень велико. При расчете значений НВ главным образом рассматривается рынок облигаций и не рассматриваются банковские кредиты. Следовательно, гораздо лучше, если банк сосредоточивает свой бизнес в основном на локальном рынке, поскольку это позволяет полагаться как на данные, собранные самим этим банком, так и на информацию, получаемую с подобных рынков.

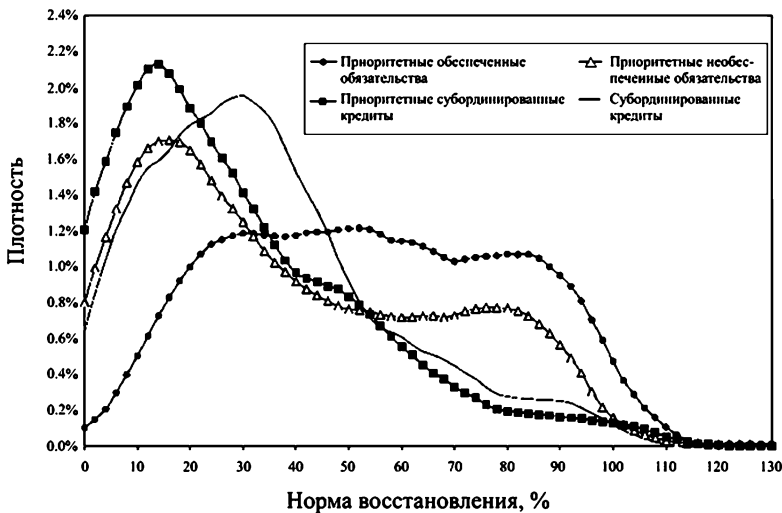
#### 7.4.12. Распределение нормы восстановления

Распределение норм восстановления, как правило, имеет две вершины (моды). Последнее означает, что НВ либо очень маленькая, либо очень большая. Кроме того, маленькое значение НВ является более распространенным явлением. Как указывалось ранее, существует вполне четкая взаимосвязь между уровнем приоритета долгового обязательства и НВ. Последнее можно обнаружить, если, например, рассмотреть данные из базы по дефолтным рискам рейтингового агентства Moody's (Moody's Default Risk Service Database), см. рис. 7.21.

По мере того, как мы двигаемся вниз в капитальной структуре к позициям с меньшим приоритетом, масса смещается влево, т. е. нормы восстановления становятся меньше. Интересно отметить, что для функции распределения приоритетных несекьюритизированных инструментов сохраняется бимодальность, тогда как для субординированных и приоритетных субординированных кредитов большинство вероятностной массы сосредоточено при малых значениях НВ (около 15%)<sup>29</sup>. Однако приоритетные секьюритизированные инструменты имеют почти плоское распределение, указывающее на то, что нормы восстановления относительно равномерно распределены от 30% до 80%. Отметим, что нормы восстановления могут превосходить 100% ввиду различий в период восстановления между купонными ставками и преобладающими процентными ставками, т. е. в случаях, когда купоны превышают величину преобладающей процентной ставки.

Если бы мы ничего не знали относительно норм восстановления и предполагали бы, что все возможные нормы восстановления равновероятны, то мы моделировали бы их с помощью *равномерного распределения*  $U(0; 100)$ . Однако такой выбор редко описывает реальную ситуацию (см. рис. 7.21).

<sup>29</sup> Субординированные кредиты с низким уровнем приоритета включены в категорию «Секьюритизированные кредиты», поскольку выборка по ним мала.  
Скопировано с сайта <http://www.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек <http://www.информ2000.ru>



**Рис. 7.21.** Плотности функций распределения НВ для кредитов с разным уровнем приоритета (Moody's, 1970-2003). Источник: [Shimko (2004)]

Другой альтернативой является выбор *бета-распределения*, которое позволяет моделировать вероятностную массу вокруг моды и толщину хвостов. Плотность этого распределения равна<sup>30</sup>

$$f(x, a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$$

где  $0 \leq x \leq 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $B(a, b)$  — бета-функция, т. е.:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Если  $a = b = 1$ , то бета-распределение сводится к равномерному распределению на отрезке  $[0, 1]$ . При заданных оценках выборочного среднего  $\hat{\mu}$  и дисперсии  $\hat{\sigma}^2$  оценки параметров бета-распределения, полученные методом моментов, равны соответственно:

$$\hat{b} = \frac{\hat{\mu}(\hat{\mu} - 1)^2}{\hat{\sigma}^2} + \hat{\mu} - 1, \quad \hat{a} = \frac{\hat{b}\hat{\mu}}{\hat{\mu} - 1}.$$

Анализируя данные рейтингового агентства Moody's за 1970–2003 гг. с целью оценить бета-распределения для каждой категории приоритета, получаем следующие результаты (табл. 7.13)<sup>31</sup>.

<sup>30</sup> Информацию о бета-распределении см. также в Приложении 2 к гл. 3 книги.

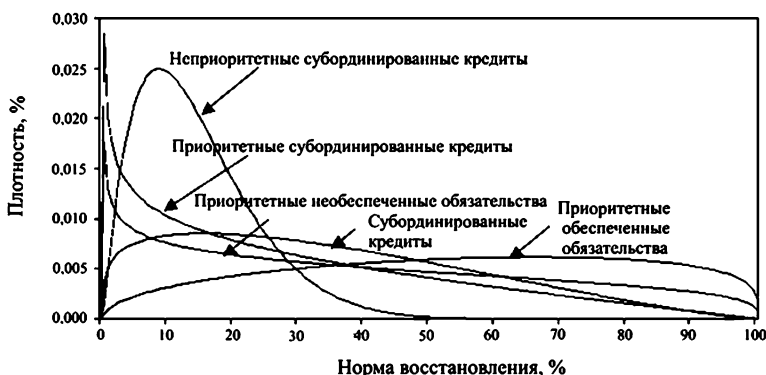
<sup>31</sup> Следуя принятым в данной области правилам, все линейные характеристики бета-распределений случайной величины даются в процентах (т.е. шкала ее возможных значений умножается на 100%).  
Скопировано с сайта <http://лучше.информ2000.рф> разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

**Таблица 7.13.** Оценки параметров бета-распределения, описывающего НВ для каждой категории приоритета

Уровень приоритета	Среднее	Стандартное отклонение	N	Параметры бета-распределения	
				a	b
Приоритетные обеспеченные обязательства	54,26	25,82	433	1,48	1,25
Приоритетные необеспеченные обязательства	38,71	27,80	971	0,80	1,27
Приоритетные субординированные кредиты	28,51	23,41	260	0,78	1,94
Субординированные кредиты	34,65	22,23	347	1,24	2,34
Неприоритетные субординированные кредиты	14,39	8,99	12	2,05	12,19

Графики плотности бета-распределений для всех категорий приоритета изображены на рис. 7.22 (при этом с помощью соответствующего масштабного множителя шкала возможных значений [0; 1] бета-распределений случайной величины преобразована в шкалу [0%; 100%]).

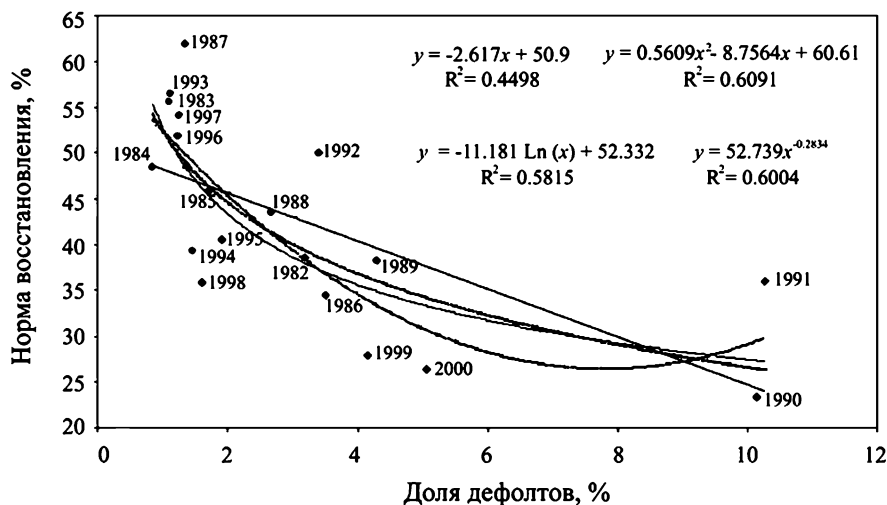
Однако плотности, представленные на рис. 7.22, лишь частично напоминают эмпирические плотности, представленные на рис. 7.21.



**Рис. 7.22.** Функции бета-плотности для всех классов (Moody's, 1970–2003)

### 7.4.13. Связь между ВД и НВ

Как отмечалось ранее, вероятность дефолта или доля дефолтов (т. е. доля дефолтных компаний в экономике) и среднее значение для норм восстановления отрицательно коррелированы (см., например, [Altman, Resti et al. (2001)], [Altman, Brady et al. (2005)] и [Acharya, Bharath et al. (2007)]). Это отражено, в частности, на рис. 7.23.



**Рис. 7.23.** Норма восстановления — доля дефолтов: взяты данные по облигациям за период 1982–2000 гг. Источник: [Altman et al. (2001)]

Этот результат подтверждается результатами, полученными в работе [Hu, Perraudin (2002)], в которой установлено, что корреляция между нормами восстановления и агрегированными долями дефолта для США равна в среднем  $-0,2$  и около  $-0,3$ , если рассматривать только достаточно большие или достаточно малые значения агрегированной доли дефолта и соответствующие им средние значения норм восстановления.

В работе [Altman et al. (2001)] сделана попытка рассчитать, насколько сильно увеличивается 99%-ная граница потерь, если учесть отрицательную корреляцию между нормами восстановления и долями дефолта. На основе статической модели авторы утверждают, что 99%-ная граница потерь для репрезентативного портфеля может меняться от значения, равного приблизительно 3,8%-ной доли убытков, до значения, равного 4,9%-ной доли убытков при переходе от модели, в которой нормы восстановления постоянны, к модели, в которой учитывается отрицательная зависимость между нормами восстановления и долями дефолта.

Представляется, что НВ и ВД движимы одним и тем же общим фактором, который достаточно устойчив во времени и связан с бизнес-циклами: в периоды рецессии или спада в промышленности вероятности дефолтов велики, а нормы восстановления малы. Можно продемонстрировать этот результат снова, воспользовавшись данными по дефолтам, собранными рейтинговым агентством Moody's, отдельно анализируя нормы восстановления в периоды спадов и в периоды подъемов американской экономики с 1970 г. Сводные выборочные статистики пред-

**Таблица 7.14.** Нормы восстановления для разных периодов бизнес-цикла (Moody's, 1970–2003)

Период бизнес-цикла	Среднее	Стандартное отклонение	НВ при вероятности дефолта			N
			25%	50%	75%	
Рецессии	32,07	26,86	10	25	48,5	322
Рост	41,39	26,98	19,5	36	62,5	1703
По всей выборке	39,91	27,17	18	34,5	61,37	2025

В периоды рецессии нормы восстановления меньше, чем в периоды роста. Кроме того, в периоды роста экономики нормы восстановления распределены более равномерно. В работе [Altman et al. (2005)] приведена регрессия среднего норм восстановления на агрегированные вероятности дефолта и макроэкономические переменные, анализируя которую можно увидеть, что нормы восстановления и агрегированные вероятности дефолта тесно взаимосвязаны, а макроэкономические переменные становятся незначимыми как только агрегированные вероятности дефолта включаются в регрессию в качестве объясняющих переменных. Авторы предполагают, что это происходит в силу неэластичности спроса на дефолтные ценные бумаги. Гипотеза авторов заключается в том, что типичные инвесторы, вкладывающие средства в дефолтные ценные бумаги, имеют ограниченные возможности, и, как результат, когда происходит много дефолтов, цена дефолтных ценных бумаг быстро падает.

В работе [Acharya et al. (2007)] принимается аргумент, предложенный в [Shleifer, Vishny (1992)], который используется в качестве отправной точки: предположим, некоторый сектор промышленности находится в бедственном положении, и некоторые компании, занятые в этом секторе, оказались в состоянии дефолта. Если активы компаний, оказавшихся в дефолте, состоят из промышленных активов, то для эффективного управления компаниям лучше всего реализовать эти активы, но в период управления покупателями этих активов проблемы могут усугубиться, а следовательно, может возникнуть ситуация, когда эти активы невозможно будет выкупить. А это может привести к низким ценам этих активов, а следовательно, к низким значениям нормы восстановления. По смыслу этот аргумент аналогичен аргументу, предложенному в работе [Altman et al. (2005)], за исключением того, что в первом аргументе цена перепродажи реальных активов снижается, тогда как в случае аргумента из [Altman et al. (2005)] цена перепродажи финансовых активов (дефолтные облигации) повышается.



Однако, как следует из работы [Altman, Kishore (1996)], корпоративные облигации компаний некоторых отраслей экономики (например, коммунальные службы) надежнее. Их исследование охватывает достаточно длинный период (1971–1995), и мы воспроизведем некоторые их результаты в табл. 7.15.

**Таблица 7.15.** Средняя норма восстановления для разных отраслей экономики и секторов промышленности

Отрасль экономики	Средн. НВ	Сектор промышленности	Средн. НВ
Коммунальные службы	70%	Телекоммуникации	37%
Сфера услуг	46%	Финансовые компании	36%
Пищевая промышленность	45%	Недвижимость	35%
Торговля	44%	Магазины со смешанным ассортиментом	33%
Производство	42%	Текстильная промышленность	32%
Строительство	39%	Бумажная промышленность	30%
Транспорт	38%	Сдача помещений в аренду	26%

*Источник:* [Altman and Kishore (1996)].

Эти общие выводы подтверждаются на более поздних данных (см. [Grossman et al. (2001)]) по рейтингуемым агентством Fitch облигациям и займам за период 1997–2000 гг. В соответствии с работой [Grossman et al. (2001)] различия в ставках восстановления займов и облигаций для одних и тех же секторов экономики достаточно значительны. Например, облигации компаний сферы услуг имеют удивительно низкие нормы восстановления (около 3%) сравнительно с нормой восстановления займов (около 42%). Конечно, мы не обладаем информацией относительно уровня приоритетности долговых обязательств, поэтому следует принимать эти результаты с некоторой степенью предосторожности. Более того, поскольку это *средние* значения, бимодальность распределения нормы восстановления не учитывается.

#### 7.4.14. Величина номинальных потерь при дефолте

Величина номинальных потерь при дефолте для срочных кредитов, как правило, определяется однозначно. Эта ситуация несвойственна таким схемам кредитования, как, например, кредитная линия, когда заемщик теоретически может отклониться от первоначально установленной схемы возвращения долга. Более того, в случае ухудшения финансово-  
Скопировано с сайта http://учебники.информ2000.ru/ Разработка электронных библиотек http://правс.информ2000.ru/  
 по положению заемщики, как правило, отклоняются от первоначально

установленной схемы кредитной линии настолько, насколько это возможно в сложившихся условиях для того, чтобы избежать дефолта. В базовом ПВР вычисление величины номинальных потерь при дефолте в случае, когда процедура измерения не вполне четкая, основано на контрольных значениях. Например, ВВП(Д) для безотзывных неиспользованных обязательств равна 75%. Однако для усовершенствованного ПВР величина номинальных потерь при дефолте может быть определена на основе модели, используемой в банке.

Анализ кредитных линий и соответствующих им величин номинальных потерь, значения которых неизвестны в начальный момент времени, требует тщательной оценки следующих элементов:

- *величины кредита*, т. е. максимальной суммы, которая может быть использована заемщиком;
- *извлеченной суммы*, т. е. использованной заемщиком части кредита;
- *неизвлеченной суммы*, т. е. неиспользованной заемщиком части кредита.

В качестве примера рассмотрим статистический бюллетень Банка Италии, в котором отражено осуществляемое банками финансирование заемщиков с помощью кредитных линий или похожими схемами с сентября 2004 г. (табл. 7.16).

**Таблица 7.16.** Величины кредитов и извлеченные суммы  
(Банк Италии, сентябрь 2004 г.)

Сумма выделенного кредита, евро	Число заемщиков	Среднее величин кредитов, евро	Среднее извлеченных сумм	
			евро	%
От 75 000 до 125 000	778 918	83 375	74 681	89,59
От 125 000 до 250 000	417 587	84 479	69 508	82,28
От 250 000 до 500 000	146 492	71 478	50 727	70,97
От 500 000 до 2 500 000	134 747	206 749	139 555	67,50
От 2 500 000 до 5 000 000	18 271	93 498	63 034	67,42
От 5 000 000 до 25 000 000	13 339	196 898	130 275	66,16
Более 25 000 000	2438	522 694	350 201	67,00

Очевидно, что чем меньше величина кредита, тем больше процент извлеченных заемщиками сумм.

С учетом вышеупомянутых элементов ВВП(Д) может быть разложена на два компонента:

- *рисковую составляющую*, которую обычно называют *скорректированной ВВП(Д)* или *фактором эквивалентности займа (ФЭЗ)*:

$$\text{ФЭЗ} = \text{Извлеченная сумма} + (\text{Величина кредита} - \text{Извлеченная сумма}) \times \text{ДИС(Д)},$$

где ДИС(Д) — оценка доли использованных средств компанией, оказавшейся в состоянии дефолта;

- *безрисковую составляющую*, которая определяется следующим образом:

$$(\text{Величина кредита} - \text{Извлеченная сумма}) \times (1 - \text{ДИС(Д)}).$$

При нормальных условиях ДИС(Д) достаточно стабильно во времени. Однако если у заемщика возникают некоторые финансовые проблемы, то он берет больше денег и его ДИС(Д) увеличивается. С финансовой точки зрения ДИС(Д) можно рассматривать как опцион, который заемщик может исполнить в случае финансовой необходимости. В качестве компенсации банк берет комиссию, равную фиксированному проценту от неиспользованной суммы.

Как оценить ДИС(Д) и ФЭЗ? Эти величины зависят от кредитного качества, типа кредитной схемы и географического положения. Однако довольно мало эмпирических исследований на эту тему. В одной из немногих работ, в которых рассматривается эта тема, а именно в работе [Asanow, Marker (1995)], анализируется характер больших корпоративных заемных обязательств перед Ситибанком за период с 1988 по 1993 г. и показана важность кредитных рейтингов, в особенности на спекулятивном уровне (табл. 7.17).

**Таблица 7.17.** Извлеченные суммы в %, ДИС(Д) и ФЭЗ  
(Ситибанк, 1988–1993)

Рейтинг	Извлеченная сумма, %	ДИС(Д), %	ФЭЗ, %
	(А)	(В)	(А)+[100–(А)]·(В)
AAA	0,10%	69,00%	69,03%
AA	1,60%	73,00%	73,43%
A	4,60%	71,00%	72,33%
BBB	20,00%	65,00%	72,00%
BB	46,80%	52,00%	74,46%
B	63,70%	48,00%	81,12%
СДС	85,00%	44,00%	88,00%

\* \* \*

В предыдущих пунктах параграфа 7.4, посвященного теме кредитного риска, были представлены **одномерные** модели кредитного риска. Пункты 7.4.15–7.4.19 посвящены анализу **многомерных** моделей, позволяющих оценивать неожиданные убытки, дефолтную и миграционную зависимость, вероятности дефолтов и другие рисковые характеристики **«портфеля заемщиков»**.

Вообще говоря, существуют четыре основных метода для построения моделей кредитных портфелей. Предлагаем их читателю.

**Модели кредитной миграции.** Подход CreditMetrics, предложенный J.P. Morgan в 1997 г., основан на анализе кредитной миграции, т. е. вероятности перемещения из одного рейтингового класса в другой (включая дефолт, являющийся поглощающим состоянием) за заданный период времени, который обычно берется равным одному году. В подходе CreditMetrics оценивается функция распределения на один год вперед для стоимости кредитного портфеля, которая меняется в результате кредитной миграции. Этот подход предполагает, что матрица переход, оцененная по историческим данным нескольких тысяч рейтингуемых облигаций, достаточно точно описывает вероятность миграции из одного рейтингового класса в другой.

**Структурные модели.** «Прародителем» большинства из этих моделей является *модель Мертона*, которая постулирует механизм дефолта с точки зрения его связи со стоимостью активов компании и ее обязательствам (см. п. 7.4.7). Корпорация MV (которая сейчас принадлежит рейтинговому агентству) развила методологию кредитного риска и создала большую базу данных для расчета вероятностей дефолта и вычисления функции распределения убытков с учетом рисков дефолта и рисков миграции. KMV-модель отличается от CreditMetrics-модели, поскольку она строится на основе так называемой *ожидаемой частоты дефолтов* для каждого эмитента, а не на основе средних частот переходов, построенных по историческим данным, как это делается в модели CreditMetrics.

**Актuarные модели.** CreditRisk+ это подход, предложенный Credit Suisse в конце 1997 г. и основанный на результатах актуарной науки. В этом подходе уделяется основное внимание описанию вероятности дефолта, а не кредитной миграции. Кроме того, в отличие от KMV- и CreditMetrics-подходов, в CreditRisk+ игнорируются причины дефолта. Однако этот подход — единственный, который позволяет получить решения в аналитическом виде, а не с помощью методов стохастического моделирования, что позволяет значительно уменьшить количество необходимых вычислительных ресурсов.

**Макроэкономические модели.** В работах [Wilson (1997a, 1997b)] предложена модель, названная CreditPortfolioView и направленная на то, чтобы улучшить подход кредитной миграции путем допущения того, что вероятности миграций могут меняться в зависимости от кредитных циклов. В этом подходе вероятности дефолтов являются *функциями макропеременных*, таких как безработица, уровень процентных ставок и др., которые предполагаются факторами, определяющими кредитные циклы.

В CreditMetrics-модели и в модели KMV, предложенной Moody's, используются похожие предположения, основанные на модели Мертона и факторном анализе. Хотя эти две модели концептуально аналогичны, вторая из них более сложная, чем первая, и для ее построения требуется больше данных. Вот почему KMV-модель на данный момент наиболее популярна и обследование рынка в 2004 г. показало, что 40 из 50 крупнейших финансовых организаций используют именно этот подход. Мы начнем наш анализ с CreditMetrics-модели, которая в свое время была серьезным прорывом в этой области и открыла путь для развития моделей кредитных портфелей.

#### 7.4.15. Модель CreditMetrics

Модель CreditMetrics ([Gupton et al. (1997)]) представляет собой методологию расчета границы потерь (ГП) для финансовых инструментов, которые не котируются на финансовых рынках (например, банковские ссуды и корпоративные займы). Модель CreditMetrics принадлежит классу моделей с корректировкой по рынку, в которых учитывается, что убыток по кредиту возможен не только в результате дефолта, но и в случае понижения рейтинга. В частности, уровни рейтинга определяются в соответствии с рейтинговыми классами одного из основных рейтинговых агентств, таких как Moody's или Standard & Poor's: следовательно, в модели CreditMetrics используется дискретная классификация возможных рейтинговых уровней. Кроме того, модель CreditMetrics является безусловной моделью: оценки, даваемые этой моделью, основаны на исторической информации, которая в свою очередь не корректируется в зависимости от текущей экономической ситуации.

Информационное множество в этой модели состоит из следующих элементов:

- *Вероятностей миграции кредитных рейтингов*, т. е. вероятностей изменения кредитного качества некоторого рейтингуемого обязательства во всех возможных условиях за фиксированный промежуток времени. Эти вероятности представлены в *матрице кредитных переходов*, опубликованной рейтинговыми агентствами;

- *норм восстановления* в случае дефолта;
- *форвардных ставок*;
- *матрицы корреляций между займами* (когда рассматривается два и более займов).

Матрица переходов (матрица вероятностей миграции кредитных рейтингов) — это таблица, в которой представлены вероятности того, что текущий рейтинг заемщика через определенный промежуток времени (например, через год) будет повышен, понижен или заемщик окажется неплатежеспособным. Эти вероятности обычно рассчитываются как среднее значение частот миграций заемщиков из одного рейтингового класса в другой через заданный промежуток времени. Помимо матриц перехода, рейтинговые агентства также публикуют нормы восстановления, тогда как корреляционная матрица между займами рассчитывается только компанией J.P. Morgan. Что касается форвардных ставок, они находятся из кривых доходностей для займов, и их расчет также осуществляется компанией J.P. Morgan. При условии, что задано указанное выше информационное множество, мы можем вычислить математическое ожидание, дисперсию и границу потерь (некоторого уровня доверия) стоимости кредитного портфеля.

## 1) Оценка кредитного портфеля, составленного из одного долгового обязательства

Основная идея процедуры оценки состоит в том, что состояние кредитного качества любого долгового обязательства, имеющего рейтинг, может измениться с вероятностями, определяемыми матрицей перехода. Таким образом, стоимость долгового обязательства равна взвешенной сумме стоимостей этого долгового обязательства при всех возможных рейтингах, где взвешивание осуществляется с учетом вероятностей перехода из текущего состояния в состояние, соответствующее рассматриваемой сумме долгового обязательства. Следовательно, для того чтобы оценить долговое обязательство, необходимо следовать следующей процедуре:

- определить кредитный рейтинг рассматриваемого заемщика и соответствующую ему переходную матрицу;
- зафиксировать временной период. Довольно часто он берется равным одному году;
- оценить стоимость долгового обязательства при всех возможных кредитных рейтингах; в случае, если мы пользуемся данными рейтингового агентства S&P, рейтинговая система этого агентства состоит из семи классов и дефолтной позиции;

- оценить математическое ожидание стоимости долгового обязательства в конце следующего периода; в качестве оценки берется взвешенное среднее стоимостей долговых обязательств для всех рейтингов, с весами, равными соответствующим вероятностям из матрицы перехода;

- наконец, для стоимости долгового обязательства вычислить границу потерь необходимого уровня.

Наиболее сложным шагом в этой процедуре, конечно, является оценка стоимости долгового обязательства при всех возможных кредитных рейтингах. Процедура оценки может быть разделена на два случая: один случай — **дефолт**, другой — **увеличение или понижение кредитного рейтинга**: если заемщик оказывается в состоянии дефолта, основной целью является выяснение того, какая доля требований по кредиту или кредитам может быть возмещена через процедуры банкротства заемщика. В исходной CreditMetrics-модели предполагается, что возмещения кредиторам осуществляются в соответствии с их классом приоритета. Однако в относительно недавних исследованиях предлагается отказаться от этого предположения и упростить анализ норм восстановления, используя для их описания во всех случаях бета-распределение со средним, равным 50%, и дисперсией, равной 20%.

Для того чтобы вычислить границу потерь на конец следующего периода, необходимо рассчитать текущую стоимость долгового обязательства. В случае долговых обязательств используемые дисконтные процентные ставки берутся равными соответствующим значениям на кривой доходности. Долговые обязательства с разными кредитными рейтингами дисконтируются с процентными ставками, взятыми из различных кривых доходностей, в зависимости от их рейтингового класса.

При условии, что ставки определены, общая формула для приведенной стоимости долгового обязательства со сроком погашения через один год принимает следующий вид:

$$V = C + \frac{C}{1 + f_1} + \frac{C}{(1 + f_2)^2} + \frac{C}{(1 + f_3)^3} + \dots + \frac{B + C}{(1 + f_n)^n}, \quad (7.23)$$

где  $C$  — величина купона,  $B$  — номинальная стоимость долгового обязательства, а  $f_i$  — дисконтные процентные ставки, определенные из кривой доходности.

## 2) Пример оценки кредитного портфеля, составленного из одного долгового обязательства

Предположим, что компания, имеющая рейтинг ВВВ, выпускает долговое обязательство номинальной стоимостью в 100 млн евро со сроком погашения через один год. Компания имеет следующие ставки по кредитам:

сроком погашения через 5 лет и ежегодными купонными платежами, составляющими 6% от номинальной стоимости. Кроме того, предположим, что вероятности миграции кредитного рейтинга для компании, имеющей рейтинг ВВВ, равны значениям, указанным в табл. 7.18.

**Таблица 7.18.** Вероятности миграции кредитного рейтинга для компаний, имеющих текущий рейтинг ВВВ

Рейтинг в конце года	Вероятность, %
AAA	0,02
AA	0,33
A	5,95
ВВВ	86,93
ВВ	5,30
В	1,17
ССС	0,12
Дефолт	0,18

Для этой компании вероятность остаться в том же рейтинговом классе равна 86,93%, вероятность улучшить кредитное качество до высшего рейтинга AAA равна 0,02%, а вероятность банкротства этой компании в течение одного года равна 0,18%. Матрица перехода для всех рейтинговых классов представлена в табл. 7.19.

**Таблица 7.19.** Матрица перехода: вероятности миграций кредитного рейтинга из одного класса в другой в течение одного года

Текущий рейтинг	Рейтинг в конце года (в %)							
	AAA	AA	A	ВВВ	ВВ	В	ССС	Дефолт
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0	0	0
AA	0,7	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
ВВВ	0,02	0,33	5,95	86,93	5,3	1,17	1,12	0,18
ВВ	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1	1,06
В	0	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,2
ССС	0,22	0	0,22	1,3	2,38	11,24	64,86	19,79

Источник: [Gupton et al. (1997)].



ровать форвардную модель ценообразования. Оценка кредитного портфеля, составленного из одного долгового обязательства, строится на основании кривой доходности, соответствующей рейтингу его эмитента. Спотовая кривая бескупонного обязательства используется для определения текущей спотовой стоимости этого долгового обязательства. Тогда как форвардная цена долгового обязательства через один год вычисляется на основании форвардной кривой для бескупонного долгового обязательства, процентные ставки которой затем применяются к остаточным денежным потокам за период с конца первого года от момента выпуска долгового обязательства до срока его погашения.

В нашем примере мы взяли одногодичные значения доходностей, полученных из форвардной кривой для бескупонного долгового обязательства, из документации CreditMetrics-модели (соответствующие доходности представлены ниже, в табл. 7.20).

**Таблица 7.20.** Значения доходностей из форвардной кривой через 1 год для бескупонных долговых обязательств из всех рейтинговых классов, %

Рейтинговый класс	Год 1	Год 2	Год 3	Год 4
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,05	14,03	13,52

*Источник:* [Gupton et al. (1997)].

Отметим, что, если эмитент оказывается в состоянии дефолта в конце года, это не означает, что не удастся возместить хотя бы часть суммы долга, так как инвестор может восстановить определенный процент выданных в долг средств, который зависит от степени приоритетности долга. Эти нормы восстановления оцениваются рейтинговыми агентствами по историческим данным. В качестве примера в табл. 7.21 представлены средние и стандартные отклонения норм восстановления для долговых обязательств из разных классов приоритетности, оценки которых получены компанией Moody's в 1996 г.

Предполагается, что рассматриваемый займ принадлежит к классу приоритетных необеспеченных обязательств, поэтому в случае дефолта его норма восстановления в среднем равна 51,13% от номинальной стоимости.

С этой точки зрения, если предположить, что компания сохранит уровень рейтинга ВВВ через один год, форвардная цена рассматриваемого ее долгового обязательства через один год составит:

$$V_{ВВВ} = 6 + \frac{6}{1 + 0,0410} + \frac{6}{(1 + 0,0467)^2} + \frac{6}{(1 + 0,0525)^3} + \frac{100 + 6}{(1 + 0,0563)^4} = 107,55.$$

**Таблица 7.21.** Средние и стандартные отклонения норм восстановления в зависимости от степени приоритета (в % от номинальной стоимости)

Класс приоритетности	Среднее отклонение	Стандартное отклонение
Приоритетные обеспеченные обязательства	53,80	26,86
Приоритетные необеспеченные обязательства	51,13	25,45
Приоритетные субординированные кредиты	38,52	23,81
Субординированные кредиты	32,74	20,18
Неприоритетные субординированные кредиты	17,09	10,90

*Источник:* [Carty, Lieberman (1996)], [Gupton et al. (1997)].

Если осуществить аналогичные вычисления в предположении, что через год компания изменит свой кредитный рейтинг, получим следующую таблицу стоимостей рассматриваемого займа (см. табл. 7.22).

**Таблица 7.22.** Форвардная цена долгового обязательства с текущим рейтингом ВВВ через один год, вероятности различных состояний и изменения стоимости этого обязательства

Рейтинговый класс к концу первого года	Стоимость, долл.	Вероятность изменения рейтинга, %	Изменение стоимости $\Delta V$ , долл.
AAA	109,37	0,02	1,82
AA	109,19	0,33	1,64
A	108,66	5,95	1,11
ВВВ	107,55	86,93	0
ВВ	102,02	5,30	-5,53
В	98,10	1,17	-9,45
ССС	83,64	0,12	-23,91
Дефолт	51,13	0,18	-56,42

Используя распределение изменений стоимости рассматриваемого займа, задаваемое двумя последними столбцами табл. 7.22, можно вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение  $\Delta V$ . В результате получим значения, равные  $-0,46$  и  $2,99$ , соответственно. Граница потерь 1%-ного доверительного уровня для этого займа равна  $-23,91$ , что соответствует значительно бóльшим потерям, чем граница потерь, вычисленная в предположении нормальности функции распределения  $\Delta V$  (которая равна  $-0,46 - 2,33 \cdot 2,99 = -7,43$ , где  $-2,33$  это 0,01 квантиль стандартного нормального распределения).

### 3) Оценка кредитного портфеля, составленного из двух долговых обязательств

Основная цель модели CreditMetrics состоит не в оценке стоимости одного-единственного кредитного инструмента, а в оценке портфеля таких инструментов. В сущности, модель CreditMetrics строится на следующих трех основных предположениях.

- В рамках одного кредитного класса все эмитенты долговых обязательств с точки зрения кредитного качества однородны. А следовательно, они характеризуются одной и той же матрицей вероятностей переходов.

- Матрица вероятностей переходов, отвечающая некоторой компании, зависит только от рейтинговой категории, к которой принадлежит эта компания в момент оценки ее долговых обязательств.

- Переходные вероятности стационарны, т. е. не зависят от времени.

Рассмотрим следующую задачу: как, зная характер каждого отдельного кредитного инструмента, описать характер портфеля этих инструментов. Если бы мы предположили, что изменения стоимостей различных инструментов, составляющих рассматриваемый портфель, взаимно независимы, то совместная вероятность события, состоящего в изменении стоимостей рассматриваемых активов, была бы равна произведению соответствующих маргинальных вероятностей для каждого отдельного актива, вычисляемых на основании элементов матрицы переходов этого актива. Однако, к сожалению, такое предположение нереалистично. К примеру, общеизвестно, что среди компаний, работающих в одном индустриальном секторе или (и) геополитическом регионе, корреляции выше или что корреляции значительно изменяются в зависимости от состояния экономики.

Если корреляции среди заемщиков отличны от нуля, то в этом случае необходимо вычислить совместную миграционную вероятность, при этом учитывая следующее:

- кредитное качество заемщиков может как улучшаться, так и ухуд-

- существуют корреляции между рейтинговыми миграциями.

В методологии CreditMetrics указанные выше особенности учитываются следующим образом:

- в модели CreditMetrics оценка кредитного рейтинга связывается с изменениями стоимостей/доходностей активов, что весьма схоже с методологией, основанной на модели Мертона; в частности, CreditMetrics обобщает последнюю модель на случай  $n$  «этапов к дефолту» (ЭД), где  $n$  — количество рейтинговых классов;

- в отличие от так называемой KMV-модели (см. ниже), в модели CreditMetrics для оценки стоимости компании, которая ненаблюдаема, используется цена акций этой компании.

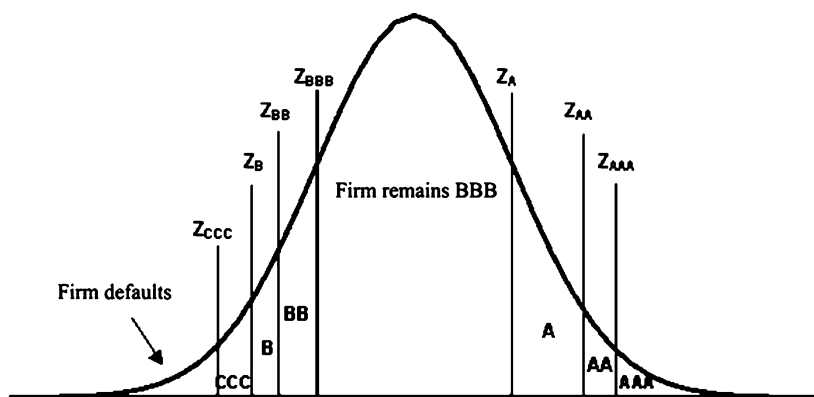
В целом процедура оценки портфеля кредитных обязательств на основании модели CreditMetrics состоит из четырех шагов.

**Шаг 1.** На основании вероятностей миграций для двух рассматриваемых заемщиков вычисляются пороговые уровни ( $Z$ ), отвечающие каждому рейтинговому классу. Эталонной моделью здесь является модель, предложенная Мертоном: динамика стоимости активов компании  $V_t$  описывается стандартным геометрическим броуновским движением, т. е.

$$V_t = V_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z_t \right], \quad Z_t \in N(0; 1), \quad (7.24)$$

где  $\mu$  — ожидаемая стоимость для  $V_t$ , а  $\sigma$  — волатильность для  $V_t$ .

Случайная величина  $V_t$  имеет логнормальное распределение с математическим ожиданием, равным  $E(V_t) = V_0 \exp(\mu t)$ . Методология CreditMetrics обобщает модель Мертона путем «нарезания» функции распределения стандартизированной лог-доходности на полосы так, что они в точности воспроизводят миграционные частоты, представленные в матрице переходов.



**Рис. 7.24.** Обобщение модели Мертона с учетом изменений рейтинга:

На рис. 7.24 в дополнение к порогу, соответствующему дефолту, изображены также пороги, отвечающие всем другим рейтинговым классам. Значение лог-доходности стоимости активов компании за некоторый период, лежащее между двумя ближайшими порогами, определяет рейтинг этой компании в конце рассматриваемого периода.

В обобщенной модели Мертона предполагается, что стандартизированные для всех заемщиков лог-доходности за некоторый фиксированный промежуток времени имеют стандартное нормальное распределение  $N(0; 1)$ , и нормировка, определяющая стандартизацию, для всех заемщиков из одного рейтингового класса одна и та же. Обозначим через  $P(DEF)$  вероятность дефолта для некоторого заемщика из рейтингового класса ВВВ. Тогда критический уровень  $V_{DEF}$  стоимости активов заемщика, отвечающий дефолту, определяется соотношением:  $P(DEF) = P[V_t \leq V_{DEF}]$ . Зная вероятность дефолта, мы можем найти для стандартизированной лог-доходности порог  $Z_{ССС}$ , соответствующий дефолту, поскольку площадь под графиком плотности стандартизированной лог-доходности на интервале  $(-\infty; Z_{ССС}]$  равна  $P(DEF)$ . Используя выражение (7.24), перепишем вероятность возникновения дефолта в момент времени  $t$  в терминах стандартизированных лог-доходностей  $Z_t$ . Получим (по аналогии с пп. 2) в п. 7.4.7):

$$\begin{aligned} P(DEF) &= P \left[ \frac{\ln(V_{DEF}/V_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \geq Z_t \right] = \\ &= P \left[ Z_t \leq -\frac{\ln(V_0/V_{DEF}) + (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] = \Phi(-d_{2t}^*), \end{aligned}$$

где стандартизированная лог-доходность  $Z_t = [\ln(V_t/V_0) - (\mu - \sigma^2/2)t] / (\sigma\sqrt{t})$  имеет стандартное нормальное распределение  $N(0; 1)$ .  $Z_{ССС}$  — это квантиль стандартного нормального распределения, отвечающий кумулятивной вероятности  $P_{DEF}$ , а критический уровень стоимости активов заемщика  $V_{DEF}$ , соответствующий дефолту, определяется из следующего соотношения:  $Z_{ССС} = -d_{2t}^*$ . Следует отметить, что совместные вероятности миграций необходимы только для определения порогов  $Z$ , для вычисления которых не нужно знать величину стоимости активов, оценивать математическое ожидание или дисперсию. Пороговые значения рассчитываются с использованием обращения стандартной нормальной функции распределения и определяются кумулятивными вероятностями. Например,  $Z_B$  — пороговый уровень, соответствующий кумулятивной вероятности нахождения рейтинга либо на уровне ССС, либо в состоянии дефолта.

**Шаг 2.** После того как определены пороговые уровни, при помощи стандартного нормального распределения вычисляются совместные вероятности миграций.

ятности миграций, где в качестве входных параметров используются пороговые уровни и коэффициенты корреляции между лог-доходностями стоимостей активов.

**Шаг 3.** Теперь переходная матрица строится с учетом  $(n + 1) \times (n + 1)$  возможных состояний. Это означает, что стоимость портфеля, составленного из двух долговых обязательств, может принимать  $(n + 1)^2$  значений, где каждое значение рассчитывается согласно ранее изложенной процедуре для оценки единственной позиции.

**Шаг 4.** Наконец, используя распределение (дискретное) возможных стоимостей портфеля, можно оценить математическое ожидание, стандартное отклонение, а также когерентные меры риска его стоимости.

#### 4) Пример оценки портфеля, составленного из двух долговых обязательств

Предположим, что наш портфель состоит из двух долговых обязательств: первое — долговое обязательство компании, имеющей рейтинг ВВВ, номинальной стоимостью в 100 млн евро со сроком погашения через 5 лет и ежегодными купонными платежами, составляющими 6% от номинальной стоимости, второе — долговое обязательство компании, имеющей рейтинг А, номинальной стоимостью 100 млн евро со сроком погашения через 3 года и ежегодными купонными платежами, составляющими 5% от номинальной стоимости. Используя ранее описанную методологию для оценки портфеля из единственной кредитной позиции и данные, представленные в табл. 7.20 и 7.21, мы получим следующие результаты для второго долгового обязательства (табл. 7.23).

**Таблица 7.23.** Форвардная стоимость долгового обязательства с рейтингом А на конец первого года, вероятности различных состояний и изменения его стоимости

Рейтинговый класс	Стоимость в конце первого года, долл.	Вероятность состояния, %	Изменение стоимости $\Delta V$ , долл.
AAA	106,59		0,29
AA	106,49	2,27	0,19
A	106,30	91,05	0,00
ВВВ	105,64	5,52	-0,66
ВВ	103,15	0,74	-3,15
В	101,39	0,6	-4,91
ССС	88,71	0,01	-17,59
Дефолт	51,13	0,06	-55,17



Что касается расчета пороговых уровней, то, например, для компании с текущим рейтингом ВВВ пороговый уровень  $Z_{CCC}$  определяется следующим выражением:

$$Z_{CCC} = \Phi^{-1}(0,0018) = -2,91,$$

а пороговый уровень  $Z_B$ :

$$Z_B = \Phi^{-1}(0,0018 + 0,0012) = -2,75.$$

Подобным образом как для заемщиков с рейтингом ВВВ, так и заемщиков с рейтингом А получим таблицу определяемых порогами полос, каждая из которых соответствует определенному рейтингу (табл. 7.25).

Если портфель состоит из двух и более займов, то при вычислении мер риска необходимо учитывать дополнительные элементы: корреляцию между различными займами. Методология CreditMetrics предполагает, что стандартизированные лог-доходности стоимости активов двух компаний имеют двумерное нормальное распределение с корреляционной матрицей  $\Sigma$ <sup>32</sup>. В нашем примере мы предположим, что корреляция рассматриваемых лог-доходностей равна 0,3:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, когда мы хотим вычислить вероятность того, что оба заемщика сохранят свой текущий рейтинг (т.е. ВВВ и А соответственно), мы должны, согласно методологии CreditMetrics, использовать двумерное нормальное распределение. Таким образом:

$$\begin{aligned} P(Z_{BBB} < R_{BBB} < Z_A, Z_A < R_A < Z_{AA}) = \\ = \int_{Z_{BBB}}^{Z_A} \int_{Z_A}^{Z_{AA}} f(r_{BBB}, r_A; \Sigma) dr_{BBB} dr_A = 79,69\%, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где  $f(r_{BBB}, r_A; \Sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} [r_{BBB}^2 - 2\rho r_{BBB} \cdot r_A + r_A^2] \right\}$  — плотность двумерного нормального распределения случайного вектора  $(R_{BBB}, R_A)$  в точке  $(r_{BBB}, r_A)$ ;  $R_{BBB}, R_A$  — стандартизированные лог-доходности стоимостей активов рассматриваемых компаний;  $\rho$  — коэффициент корреляции между  $R_{BBB}$  и  $R_A$ .

<sup>32</sup> Следует отметить, что, если каждая из двух рассматриваемых случайных величин имеет стандартное нормальное распределение, ковариационная матрица совпадает с корреляционной.  
 Скопировано с сайта <http://учебный.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>



Выполняя эту процедуру для оставшихся 63 комбинаций, получим табл. 7.26.

**Таблица 7.26.** Совместные вероятности сохранения или изменения рейтингов для двух компаний с текущими рейтингами BBV и A (при коэффициенте корреляции, равном 0,3)

Рейтинг первой компании (BBV)		Рейтинг второй компании (A)							
		AAA	AA	A	BBV	BB	B	CCC	Дефолт
		<b>0,09</b>	<b>2,27</b>	<b>91,05</b>	<b>5,52</b>	<b>0,74</b>	<b>0,26</b>	<b>0,01</b>	<b>0,06</b>
AAA	<b>0,02</b>	0	0	0,02	0	0	0	0	0
AA	<b>0,33</b>	0	0,04	0,29	0	0	0	0	0
A	<b>5,95</b>	0,02	0,39	5,44	0,08	0,01	0	0	0
BBV	<b>86,93</b>	0,07	1,81	79,69	4,55	0,57	0,19	0,01	0,04
BB	<b>5,3</b>	0	0,02	4,47	0,64	0,11	0,04	0	0,01
B	<b>1,17</b>	0	0	0,92	0,18	0,04	0,02	0	0
CCC	<b>0,12</b>	0	0	0,09	0,02	0	0	0	0
Дефолт	<b>0,18</b>	0	0	0,13	0,04	0,01	0	0	0

Переходная матрица содержит  $8 \times 8 = 64$  элементов, каждый из которых отвечает одному из 64 состояний для стоимости портфеля. Стоимость портфеля в каждом отдельном состоянии вычисляется точно так же, как в случае одной кредитной позиции. Таким образом, приходим к табл. 7.27.

Используя результаты, отраженные в табл. 7.26 и 7.27, мы можем вычислить, например, ожидаемую стоимость портфеля и ее стандартное отклонение, которые равны 213,63 и 3,35 соответственно. Мы оставляем вычисление границы потерь 1%-ного уровня в качестве упражнения.

**Таблица 7.27.** Стоимости портфеля из двух заемщиков с текущими рейтингами BBV и A соответственно

Рейтинг первой компании (BBV)		Рейтинг второй компании (A)							
		AAA	AA	A	BBV	BB	B	CCC	Дефолт
		<b>106,59</b>	<b>106,49</b>	<b>106,3</b>	<b>105,64</b>	<b>103,15</b>	<b>101,39</b>	<b>88,71</b>	<b>51,13</b>
AAA	<b>109,37</b>	215,96	215,86	215,67	215,01	212,52	210,76	198,08	160,5
AA	<b>109,19</b>	215,78	215,68	215,49	214,83	212,34	210,58	197,9	160,32
A	<b>108,66</b>	215,25	215,15	214,96	214,3	211,81	210,05	197,37	159,79
BBV	<b>107,55</b>	214,14	214,04	213,85	213,19	210,7	208,94	196,26	158,68
BB	<b>102,02</b>	208,61	208,51	208,33	207,66	205,17	203,41	190,73	153,15
B	<b>98,1</b>	204,69	204,59	204,4	203,74	201,25	199,49	186,81	149,23
CCC	<b>83,64</b>	190,23	190,13	189,28	189,28	186,79	185,03	172,35	134,77
Дефолт	<b>51,13</b>	157,72	157,62	157,43	156,77	154,28	152,52	139,86	109,09

Отметим, что если лог-доходности стоимостей активов двух рассматриваемых компаний были бы независимыми, то совместная вероятность сохранения этими компаниями текущего рейтинга (т. е. BBB и A соответственно) равнялась бы  $86,93\% \times 91,05\% = 79,15\%$ , что меньше, чем значение, полученное на основании методологии CreditMetrics (см. формулу (7.25)) и равное 79,69%.

### 5) Корреляция дефолтов и корреляция активов

Интуитивно ясно, что корреляция между дефолтами должна быть малой. Действительно, рассмотрим две компании,  $O_1$  и  $O_2$  и предположим, что стоимости активов этих компаний описываются моделью Мертона. При таком предположении корреляция дефолтов будет определяться вероятностью того, что за некоторый промежуток времени (например, за один год) стоимости обеих компаний окажутся меньше соответствующих пороговых уровней, отвечающих дефолту (см. рис. 7.25).

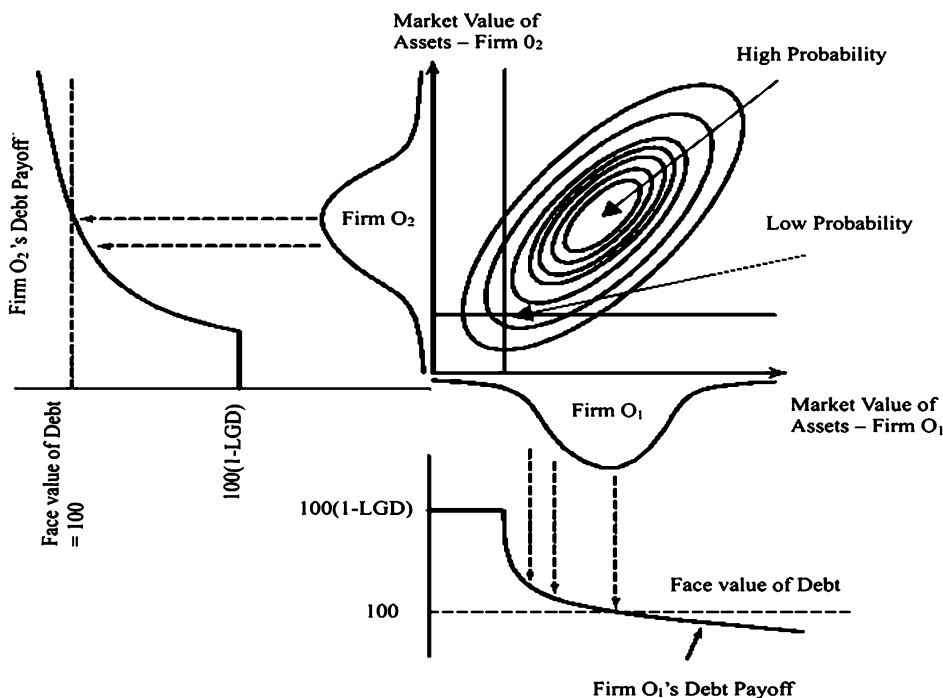


Рис. 7.25. Совместная вероятность дефолтов двух компаний

Определим случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я компания оказалась в состоянии дефолта;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда коэффициент корреляции между  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяется соотношением [Lucas (1995)]:

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) - P(\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_2 = 1)}{\sqrt{P(\xi_1 = 1) \cdot (1 - P(\xi_1 = 1))} \cdot \sqrt{P(\xi_2 = 1) \cdot (1 - P(\xi_2 = 1))}}.$$

Поскольку стандартизированные лог-доходности активов имеют совместное стандартное нормальное распределение с корреляционной матрицей  $\Sigma$ , мы имеем:

$$P(DEF_1, DEF_2) = \int_{-\infty}^{-d_1^1} \int_{-\infty}^{-d_2^2} f(r_1, r_2; \Sigma) dr_1 dr_2,$$

где  $-d_2^i = Z_{CCC}^i$ ,  $i = 1, 2$  — пороги, соответствующие дефолту первой и второй компаний.

Предположим, что, как и в рассматриваемом выше примере, два заемщика имеют рейтинги ВВВ и А. Зададимся совместным распределением лог-доходностей заемщиков ВВВ и А, соответствующим данным табл. 7.26, дополненными предположением, что  $\rho(\xi_{ВВВ}, \xi_A) = 0,3$ , где  $\xi_1 = \xi_{ВВВ}$  и  $\xi_2 = \xi_A$ . Тогда:

$$P(\xi_{ВВВ} = 1) = 0,0018;$$

$$P(\xi_A = 1) = 0,0006;$$

$$\begin{aligned} P(\xi_{ВВВ} = 1, \xi_A = 1) &= \int_{-\infty}^{-d_2^{ВВВ}} \int_{-\infty}^{-d_2^A} f(r_{ВВВ}, r_A; \Sigma) dr_{ВВВ} dr_A = \\ &= \int_{-\infty}^{-2,91} \int_{-\infty}^{-3,24} f(r_{ВВВ}, r_A; \Sigma) dr_{ВВВ} dr_A = 0,0000156; \end{aligned}$$

$$\rho(\xi_{ВВВ}, \xi_A) d = \frac{P(\xi_{ВВВ}, \xi_A) - P(\xi_{ВВВ}=1) \cdot P(\xi_A=1)}{\sqrt{P(\xi_{ВВВ}=1) \cdot (1 - P(\xi_{ВВВ}=1))} \cdot \sqrt{P(\xi_A=1) \cdot (1 - P(\xi_A=1))}};$$

$$\rho(\xi_{ВВВ} = 1, \xi_A = 1) = \frac{0,0000156 - 0,0018 \cdot 0,0006}{\sqrt{0,0018(1 - 0,0018)} \cdot \sqrt{0,0006(1 - 0,0006)}} = 0,014.$$

Если графически изобразить, как меняется корреляция дефолтов для двух взятых компаний в зависимости от изменения корреляции между лог-доходностями стоимостей их активов от 0 до 1, то получим рис. 7.26.



• Вычислим (или используем) матрицу переходов, в которой указаны вероятности миграции из одного рейтингового класса в другой.

• С использованием вероятностей миграций вычислим пороговые уровни  $Z_i$ , отвечающие кредитным рейтингам. Отметим, что эти уровни зависят от текущего рейтинга заемщика.

• Вычислим корреляционную матрицу  $\Sigma$  стандартизированных лог-доходностей стоимостей активов рассматриваемых компаний с использованием факторной модели (т.е. корреляционной KMV-модели, см. следующий раздел, а также работу [Gupton et al. (1997)]).

• Смоделируем вектор  $(N \times 1)$  лог-доходностей стоимостей активов из совместного  $N$ -мерного нормального распределения  $N(\mathbf{0}, \Sigma)$ . При моделировании вектора лог-доходностей можно воспользоваться стандартной техникой генерирования коррелированных нормальных случайных величин, основанной на разложении Холецкого (напомним, что оно позволяет представить корреляционную (ковариационную) матрицу в виде произведения нижнетреугольной матрицы  $A$  и матрицы  $A'$ , полученной ее транспонированием). В случае простого двумерного случая мы получим:

$$\Sigma = AA', \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$a_{11}a_{11} + 0 \cdot 0 = 1 \rightarrow a_{11} = 1$$

$$a_{21}a_{11} + a_{22} \cdot 0 = \rho \rightarrow a_{21} = \rho$$

$$a_{11}a_{21} + 0 \cdot a_{22} = \rho \rightarrow a_{21} = \rho$$

$$a_{21}a_{21} + a_{22} \cdot a_{22} = 1 \rightarrow a_{22} = \sqrt{1 - \rho^2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

А для того чтобы получить две нормально распределенные случайные величины с корреляцией  $\rho$ , нам необходимо вычислить

$$Y = A \times \varepsilon, \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 = \varepsilon_1 \\ y_2 = \rho\varepsilon_1 + \varepsilon_2\sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$  — вектор, составленный из независимых стандартных нормальных случайных величин.

• С использованием пороговых уровней  $Z_i$ , полученных на шаге 4 для соответствующих текущих рейтингов взятых заемщиков, определим по каждому смоделированному вектору стандартизированных лог-доходностей  $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N)'$  рейтинговый класс каждой из рассматриваемых компаний.

• Оценим стоимость каждой позиции в соответствии с форвардной кривой, при этом учитывая рейтинговый класс, соответствующий концу рассматриваемого периода.



• Доля невозвращенных средств при дефолте по кредиту одна и та же для всех компаний.

• Несмотря на то что убыткам по портфелю, рассчитываемым с помощью команды `sm.gain`, отвечают отрицательные числа,  $ГП_\alpha$ , вычисляемая с помощью команды `sm.CVaR`, положительна. Например, если вычислить 1%-ный квантиль построенной функции распределения (с помощью команды `sm.gain`) и получить  $-100$ , то результатом использования команды `sm.CVaR` будет  $+100$ .

```
# Удалим все объекты активизированной среды
rm(list = ls(all = TRUE))
# Загрузим набор процедур CreditMetrics
library(CreditMetrics)
# Зададим входные параметры
N <- 3
n <- 50000
r <- 0.03
ead <- c(4000000, 1000000, 10000000)
rc <- c("AAA", "AA", "A", "BBB", "BB", "B", "CCC", "D")
lgd <- 0.45
rating <- c("BBB", "AA", "B")
firmnames <- c("firm 1", "firm 2", "firm 3")
alpha <- 0.99
# Корреляционная матрица
rho <- matrix(c( 1, 0.4, 0.6,
0.4, 1, 0.5,
0.6, 0.5, 1), 3, 3, dimnames = list(firmnames, firmnames),
byrow = TRUE)
# эмпирическая матрица миграций за один год,
# взятая с вебсайта рейтингового агентства standard&poors
rc <- c("AAA", "AA", "A", "BBB", "BB", "B", "CCC", "D")
M <- matrix(c(90.81, 8.33, 0.68, 0.06, 0.08, 0.02, 0.01, 0.01,
0.70, 90.65, 7.79, 0.64, 0.06, 0.13, 0.02, 0.01,
0.09, 2.27, 91.05, 5.52, 0.74, 0.26, 0.01, 0.06,
0.02, 0.33, 5.95, 85.93, 5.30, 1.17, 1.12, 0.18,
0.03, 0.14, 0.67, 7.73, 80.53, 8.84, 1.00, 1.06,
0.01, 0.11, 0.24, 0.43, 6.48, 83.46, 4.07, 5.20,
0.21, 0, 0.22, 1.30, 2.38, 11.24, 64.86, 19.79,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 100
)/100, 8, 8, dimnames = list(rc, rc), byrow = TRUE)
# С помощью команды sm.CVaR вычислим границу потерь
sm.CVaR(M, lgd, ead, N, n, r, rho, alpha, rating)
# С помощью команды sm.gain вычислим
# смоделированные доходы и убытки
sm.gain(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)
# С помощью команды sm.val разобьем смоделированные
# лог-доходности по рейтинговым классам
sm.val(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)
# С помощью команды sm.portfolio вычислим
# смоделированную стоимость портфеля займов
sm.portfolio(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)
```

```
cm.portfolio(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)
# Изобразим гистограмму для смоделированных доходов/убытков
cm.hist(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating,
col = "steelblue4", main = "Profit / Loss Distribution",
xlab = "loss / profit", ylab = "frequency")
```

Поскольку мы использовали метод Монте-Карло, то полученный результат оценки границы потерь должен быть близок к 4015891. А гистограмма смоделированных доходов/убытков должна напоминать гистограмму на рис. 7.27.

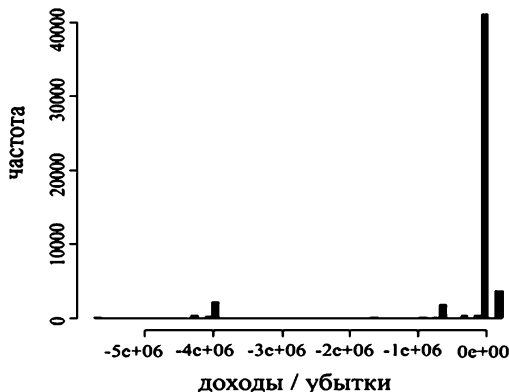


Рис. 7.27. Гистограмма смоделированных доходов/убытков

### 7.4.16. Модель KMV

Модель KMV, широко используемая при оценке кредитных рисков, строится на основе модели Мертона. Модель KMV еще известна как модель Васичека — Килхофера (ВК-модель). Буква «М» в аббревиатуре «KMV» отвечает первой букве в фамилии McQuown, одного из трех основателей компании KMV, которую впоследствии выкупило агентство Moody's. Инновация модели KMV заложена не столько в теоретической части, сколько в практической реализации модели. Моделируются несколько классов долговых обязательств: краткосрочные долговые обязательства, долгосрочные долговые обязательства, конвертируемые долговые обязательства и др. Кроме того, явным образом моделируются выплаты наличных денежных средств, такие как, например, дивиденды. Общие принципы реализации этой модели будут описаны ниже.

В KMV-модели вводится два ранее не встречавшихся понятия: «расстояние до дефолта» (РД) и «ожидаемая частота дефолтов» (ОЧД). ОЧД — это просто вероятность дефолта в течение ближайшего года (ряда лет). Для того чтобы вычислить ОЧД, необходимо пошагово выполнять следующую процедуру:



• решая систему из двух уравнений (см. уравнения (7.21a) и (7.21б)), оценим стоимость активов и ее волатильность;

• используя стоимость активов, ее волатильность и балансовые значения долговых обязательств, вычислим РД (способ вычисления РД см. ниже);

• в соответствии с оценкой РД вычислим вероятность дефолта.

Как отмечалось ранее, из-за некоторой численной неустойчивости коэффициентов уравнения (7.21б) можно получить некорректные результаты. В частности, такое возможно при работе с «зашумленными» данными, см. работы [Crosbie, Bohn (2001)], [Hao (2006)], [Bharath, Shumway (2008)] и [Fantazzini et al. (2008a)].

Чтобы преодолеть эту проблему модели KMV, необходимо использовать итеративный подход. Для этого следует:

• получить исторические данные по стоимостям акций,  $\{S_{t-n}, \dots, S_t\}$ ;

• получить начальную оценку волатильности стоимости активов  $\sigma^{(0)}$  на основании волатильности курсовых стоимостей акций  $\sigma_S$ ;

• используя  $\sigma^{(0)}$  и  $\{S_{t-n}, \dots, S_t\}$ , вычислить соответствующие стоимости активов,  $\{V_{t-n}^{(0)}, \dots, V_t^{(0)}\}$ ;

• вычислить доходности стоимостей активов:

$$R_i^{(0)} = \ln V_i^{(0)} - \ln V_{i-1}^{(0)},$$

и их среднее значение:

$$\bar{R}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^t R_i^{(0)};$$

• вычислить следующую оценку волатильности стоимости активов

$$(\sigma^{(7.3.2.)})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^t (R_i^{(0)} - \bar{R}^{(0)})^2;$$

• повторять первые пять шагов, пока не будет достигнута сходимость волатильностей стоимостей акций, т. е. пока не будет выполняться неравенство

$$|(\sigma^{(m+1)})^2 - (\sigma^{(m)})^2| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — некоторый заданный «порог чувствительности».

После того как будет достигнута сходимость в вышеописанном алгоритме, мы получим оценку для стоимости активов и ее волатильности в момент времени  $t$ , т. е. определим  $V_t$ . Поскольку нам необходимо

оценить вероятность того, что в момент  $T$  стоимости активов не будут превосходить величину долговых обязательств, т. е.  $P(V_T \leq B)$ , мы должны воспользоваться формулой (7.18), т. е.

$$\text{ОЧД} = P(V_T < B) = \Phi \left( \frac{\ln \frac{B}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right).$$

Однако разработчики KMV-модели признают, что используемая модель Мертона является слишком простой для описания динамики финансовых рынков. В частности, в ней:

- предполагается логнормальность распределения для доходностей стоимостей активов;
- предполагается чрезмерно упрощенная структура капитала компании;
- рассматривается состояние компании в момент времени  $T$ , но дефолт может наступить в любой момент времени  $t < T$ ;
- следует также отметить, что дефолт нельзя рассматривать как поглощающее состояние, поскольку он не влечет автоматическое банкротство. Особенно в развитых странах законодательство коммерческой деятельности устроено таким образом, что законы направлены на сохранение любой возможности для компании продолжить свою работу (после соответствующей реструктуризации), и это делается в целях сохранения рабочих мест.

Поэтому в модели KMV предложены определенные модификации. В частности, вводится понятие «расстояния до дефолта», которое определяется следующим образом:

$$\text{РД} = \frac{V_t - \tilde{B}}{V_t \sigma},$$

где  $\tilde{B}$  — величина краткосрочных обязательств + 50% величины долгосрочных обязательств, которая определяется на основании данных, представленных в балансовом отчете компании. Если  $\mu_V$  и  $\sigma_V$  малы, а  $\ln(V_t/B) \approx (V_t - \tilde{B})/V_t$ , тогда РД аппроксимируется величиной  $d_2^*$  (см. (7.18)), которую часто называют числом стандартных отклонений от дефолта.

В модели KMV предполагается, что компании с одним и тем же РД имеют равные вероятности дефолта. Для того чтобы построить выражение, связывающее РД и наблюдаемые частоты дефолтов, в KMV используется база исторических данных по дефолтам. Эта модель позволяет вычислять долю компаний с РД из малого интервала, которые окажутся в состоянии дефолта за некоторый фиксированный промежуток времени. Это эмпирическая процедура оценки опубликована агентством

Moody's KMV. Услуги, предлагаемые компанией KMV в рамках мониторинга кредитного риска: оценки ОЧД (начиная с 1993 г.) с использованием базы данных по 100 000 американским компаниям, включая 2000 случаев неплатежеспособности компаний. Таким образом, несмотря на то что KMV-модель весьма похожа на модель Мертона, результаты их практической реализации могут существенно различаться.

## 1) Модель KMV и рейтинги

В KMV-модели матрица переходов строится не на основании рейтинговых классов, а на основании вероятностей дефолтов. Во-первых, в методологии KMV классификация компаний на группы основана на непересекающихся интервалах принадлежности вероятностей дефолта, которые являются типичными для рейтинговых классов. Например, все компании с ОЧД, меньшей чем 2 базовых пункта (или 0,02%), относятся к классу компаний с рейтингом AAA, тогда как те компании, которые имеют ОЧД, заключенное между 3 и 6 базовыми пунктами, принадлежат к классу компаний с рейтингом AA, а компании, чьи ОЧД заключены между 7 и 15 базовыми пунктами, принадлежат к классу компаний с рейтингом A, и т. д. Во-вторых, в модели KMV матрица перехода, показанная в табл. 7.28, оценивается с использованием информации относительно истории изменений ОЧД. Эта матрица весьма схожа по структуре с ее аналогами, рассчитываемыми такими рейтинговыми агентствами, как, например, Standard and Poors (см. табл. 7.29).

Различия в соответствующих вероятностях из табл. 7.28 и 7.29 поразительны: в соответствии с KMV-моделью, кроме рейтинга AAA, вероятность сохранения рейтинга составляет от одной трети до одной второй от исторических вероятностей перехода, предоставленных рейтинговым агентством. Вероятности дефолта в модели KMV меньше, в особенности для низких рейтингов. Миграционные вероятности, напротив, значительно больше в модели KMV для всех рейтингов, не совпадающих с текущим рейтингом. Эти различия можно легко объяснить. Во-первых, поскольку рейтинговые агентства не спешат менять приписываемые рейтинги, исторические частоты сохранения рейтинга, как правило, переоценивают фактическую вероятность сохранения кредитного качества. Во-вторых, средняя историческая вероятность дефолта переоценивает фактическую вероятность дефолта для компаний из одного рейтингового класса. Это происходит в силу того, что каждый рейтинговый класс включает группу компаний, которые имеют значительно большие вероятности дефолта, и, соответственно, их рейтинг должен был быть понижен, но такого понижения рейтинга не происходило.

и вероятность дефолта очень велики, то отсюда следует, что вероятности перехода должны быть малы.

Нет необходимости упоминать, что эти различия могут оказать значительное влияние на значение границы потерь или других мер риска.

**Таблица 7.28.** Матрица перехода за год в модели KMV, построенная по непересекающимся интервалам ранжирования ОЧД

Текущий рейтинг	Рейтинг через год, %							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Дефолт
AAA	66,26	22,22	7,37	2,45	0,86	0,67	0,14	0,02
AA	21,66	43,04	25,83	6,56	1,99	0,68	0,2	0,04
A	2,76	20,34	44,19	22,94	7,42	1,97	0,28	0,1
BBB	0,3	2,8	22,63	42,54	23,52	6,95	1	0,26
BB	0,08	0,24	3,69	22,93	44,41	24,53	3,41	0,71
B	0,01	0,05	0,39	3,48	20,47	53	20,58	2,01
CCC	0,00	0,01	0,09	0,26	1,79	17,77	69,94	10,13

*Источник:* Корпорация KMV.

**Таблица 7.29.** Матрица перехода за год, построенная по фактическим изменениям рейтингов

Текущий рейтинг	Рейтинг через год, %							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Дефолт
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0	0	0
AA	0,7	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,3	1,17	1,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1	1,06
B	0	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,2
CCC	0,22	0	0,22	1,3	2,38	11,24	64,86	19,79

*Источник:* Standard & Poor's CreditWeek (15 апреля 1996 г.).

## 2) Оценка долгового обязательства или займа с учетом риска дефолта

В то время как при оценке обязательств в рамках модели CreditMetrics используются кривые форвардных ставок, ценообразование в модели KMV строится иным образом и основано на модели риска-нейтрального ценообразования. В этом подходе цены рассчитываются

как дисконтированная ожидаемая стоимость будущих платежей, а математическое ожидание вычисляется с использованием так называемых риск-нейтральных, а не фактических вероятностей. Первые могут быть получены из исторических данных или ОЧД, для более подробной информации см., например, [Jarrow, Turnbull (1999), гл. 5 и 6].

Оценка рисковых выплат осуществляется в два шага: на первом шаге оценивается безрисковая компонента, на втором шаге — компоненты, подверженные кредитному риску. Например, рассмотрим ценообразование бескупонного долгового обязательства с обязательным платежом  $M$  в конце года  $T = 1$ , с нормой восстановления в случае дефолта, равной  $(1 - \text{ДНС}(D))$ , где  $\text{ДНС}(D)$  — доля невозвращенных при дефолте средств. Тогда получим:

- *безрисковую компоненту  $M(1 - \text{ДНС}(D))$* , приведенное значение которой ( $PV_{RF}$ ) оценивается с использованием кривой безрискового дисконта

$$PV_{RF} = \frac{M(1 - \text{ДНС}(D))}{(1 + r)},$$

где через  $r$  обозначена годовая безрисковая ставка процента.

- *рисковые выплаты*, которые оцениваются с использованием риск-нейтрального подхода

$$\begin{aligned} PV_Q &= \mathbf{E}_Q(\text{дисконтные рисковые платежи}) = \\ &= \frac{M \cdot \text{ДНС}(D)(1 - Q) + 0 \cdot Q}{1 + r}, \end{aligned}$$

где математическое ожидание вычисляется с использованием риск-нейтральной вероятности  $Q$ .

Текущая стоимость рискового бескупонного долгового обязательства ( $PV$ ) вычисляется как сумма текущих стоимостей безрисковой и рисковей компонент:

$$PV = PV_{RF} + PV_Q.$$

Кредитный спред ( $KC$ ) рассматриваемого долгового обязательства мы находим, решая следующее уравнение:

$$\frac{M \cdot (1 - \text{ОЧД})}{(1 + r)} + \frac{M \cdot \text{ОЧД}(1 - Q)}{(1 + r)} = \frac{M}{1 + r + KC}.$$

Откуда получаем:

$$KC = \frac{\text{ОЧД} \cdot Q \cdot (1 + r)}{1 - \text{ОЧД} \cdot Q}$$

Описанная выше методология оценки может быть обобщена на случай серии рисковых выплат следующим образом:

$$PV = (1 - \text{ОЧД}) \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + r_i)^{t_i}} + \text{ОЧД} \sum_{i=1}^n \frac{(1 - Q_i)C_i}{(1 + r_i)^{t_i}}$$

или, если мы рассматриваем непрерывное время,

$$PV = (1 - \text{ОЧД}) \sum_{i=1}^n C_i \exp(-\tilde{r}_i t_i) + \text{ОЧД} \sum_{i=1}^n (1 - Q_i)C_i \exp(-\tilde{r}_i t_i),$$

где через  $Q_i$  обозначена кумулятивная риск-нейтральная ОЧД за период времени  $t_i$ ,  $\tilde{r}_i = \ln(1 + r_i)$ , а  $C_i$  — величина купона в  $i$ -м периоде времени.

### 3) Оценка портфеля долговых обязательств: аналитическое решение на основании методологии KMV

На основании методологии KMV не моделируется вся функция распределения стоимости портфеля через время  $H$ . Вместо этого мы, делая некоторые упрощающие предположения, получаем асимптотику функции распределения убытков в любой момент времени за некоторый период  $H$ . Среди них предположение о том, что сроки всех займов истекают в момент времени  $H$ , а их номиналы равны одному доллару. Кроме того, предполагается, что все компании, из долговых обязательств которых составлен наш портфель, оказываются в состоянии дефолта с одинаковой вероятностью, т.е.  $P(\xi_i = 1) = P(\xi_j = 1) = p, \forall i, j$ , а лог-доходности стоимостей активов одинаково коррелированы с корреляцией, равной  $\rho$ .

Обозначим через  $V_{H,RF}$  дисконтированную стоимость портфеля в момент времени  $H$  в предположении, что компания не оказалась в состоянии дефолта, а через  $V_H$  — стоимость портфеля в момент времени  $H$ , которая определяется в соответствии с формулой (7.24). Тогда убыток по портфелю в момент времени  $H$  определяется как разность между рискованной стоимостью портфеля и его рыночной стоимостью в этот момент времени, т.е.  $L = V_{H,RF} - V_H$ .

Предполагая, что портфель займов диверсифицирован, а число займов  $N$ , его составляющих, стремится к бесконечности, получим, что в рамках KMV-модели предельной функцией распределения убытков портфеля будет обратное гауссовское распределение (см. [Johnson et al. (1994)]). Таким образом, как граница потерь, так и другие меры риска для портфеля с большим количеством кредитных позиций могут быть

оценены относительно легко и без обращения к процедурам стохастического моделирования. Однако следует отметить, что все детали методологии KMV не раскрываются и неизвестно, как эта модель калибруется по реальным данным.

#### 4) Корреляции в модели KMV

Когда мы имеем дело с портфелем, составленным из большого количества (например, тысячи) облигаций и займов, расчет корреляционной матрицы с вычислительной точки зрения сопряжен с некоторыми трудностями оценивания. Для того чтобы их преодолеть, в методологиях CreditMetrics и KMV используется факторный анализ (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001), п. 13.3]). В частности, предполагается, что доходности стоимостей активов компании формируются под влиянием следующих факторов: множества *общих* факторов (или факторов систематического риска) и множества *специфических* факторов (специфических для компании факторов риска). Специфические факторы могут быть свойственны отдельной компании, стране или отрасли, но корреляция между лог-доходностями стоимостей активов от них не зависит, поскольку специфические факторы не коррелируют как друг с другом, так и с общими факторами. Корреляции лог-доходностей стоимостей активов двух компаний объясняются только общими факторами, воздействующими на эти компании.

Методологии CreditMetrics и KMV довольно схожи, и далее мы обсудим это более подробно. Однако они имеют два ключевых отличия:

- модель для корреляции в методологии KMV использует стоимости активов, тогда как факторная модель в методологии CreditMetrics использует курсовые стоимости акций;
- в методологии CreditMetrics используются сочетания некоторых отраслей и отдельных стран, тогда как в методологии KMV отрасли и страны рассматриваются раздельно.

Как же в рамках методологии KMV реализуется модель факторного анализа? Лог-доходности стоимости активов  $\tilde{R}_i$  компаний  $i = 1, \dots, N$  за некоторый временной промежуток (обычно за один год) представляются в виде:

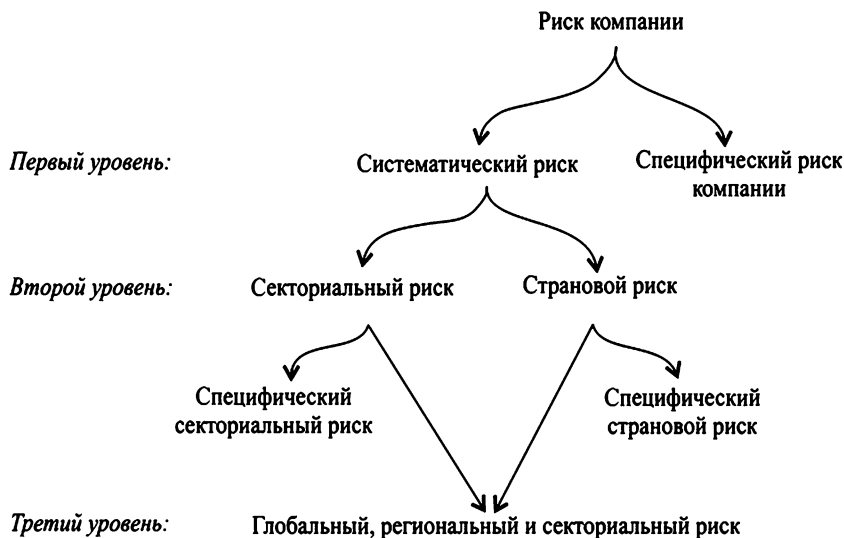
$$\tilde{R}_i = \tilde{\beta}_i \tilde{F}_i + \tilde{Z}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.26)$$

или, если записать в матричной форме:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\beta} \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{Z}}, \quad (7.26a)$$

где  $\tilde{\mathbf{R}}$  –  $(N \times 1)$  вектор лог-доходностей стоимостей активов,  $\tilde{\beta}$  –  $(N \times N)$  диагональная матрица,  $\tilde{\mathbf{F}}$  –  $(N \times 1)$  вектор, содержащий составные общие факторы, а  $\tilde{\mathbf{Z}}$  –  $(N \times 1)$  вектор, содержащий специфические факторы. Построение общих факторов – крайне сложная задача, поскольку каждый элемент  $\tilde{F}_i$  представляет собой взвешенную сумму  $K$  основных факторов,  $\tilde{\Psi}_1 \dots \tilde{\Psi}_K$ . Отметим, что модель KMV основана на трехуровневой иерархической модели (рис. 7.28):

- *первый уровень*: представляет факторы как систематического, так и специфического риска для каждой компании;
- *второй уровень*: подразделяет факторы систематического риска на отраслевые и страновые;
- *третий уровень*: отражает глобальную, региональную и секториальную специфику в представлении общих (систематических) факторов.



**Рис. 7.28.** Трехуровневая факторная структура корреляционной модели в методологии KMV

Поскольку  $\tilde{F}_i$  и  $\tilde{Z}_i$  некоррелированы, то в предположении, что оба этих случайных фактора имеют гауссовское распределение, они являются независимыми. Лог-доходности  $\tilde{R}_i$  коррелированы. Степень этой коррелированности определяется составными общими факторами. Последнее объясняет, почему  $\tilde{F}_i$  рассматривают как *систематическую часть*  $\tilde{R}_i$ , тогда как  $\tilde{Z}_i$  можно рассматривать как случайный эффект, свойственный компании  $i$ . Это разложение на систематическую и специфическую части соответствует первому уровню в трехуровневой факторной модели методологии KMV.

Второму уровню соответствует разложение вектора составных общих факторов  $\tilde{\mathbf{F}}$  на отраслевые и страновые факторы, характеризую-



щие среду, в которой функционируют компании:

$$\tilde{F}_i = \sum_{k=1}^{K_0} w_{i,k} \tilde{\Psi}_k + \sum_{k=K_0+1}^K w_{i,k} \tilde{\Psi}_k, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.27)$$

где параметры  $w_{i,k}$  и  $\tilde{\Psi}_k$  считаются заданными. При этом  $\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_{K_0}$  — это так называемые *отраслевые индексы*, которые для компании  $i$  суммируются с весами  $w_{i,1}, \dots, w_{i,K_0}$ ; а  $\tilde{\Psi}_{K_0+1}, \dots, \tilde{\Psi}_K$  — *страновые индексы*, которые для компании  $i$  суммируются с весами  $w_{i,K_0+1}, \dots, w_{i,K}$ . Веса предполагаются неотрицательными для всех  $i, k$  и нормированными в следующем смысле:

$$\sum_{k=1}^{K_0} w_{i,k} = \sum_{k=K_0+1}^K w_{i,k} = 1.$$

Обозначая  $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_K)'$ , и подставляя (7.27) в (7.26а), мы получим следующее:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\beta} \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\beta} \mathbf{W} \tilde{\Psi} + \tilde{\mathbf{Z}}, \quad (7.28)$$

где  $\mathbf{W} = (w_{i,k})_{i=1, \dots, N; k=1, \dots, K}$  — матрица отраслевых и страновых весов для компаний из рассматриваемого портфеля.

Наконец, третьему уровню соответствует представление отраслевого и странового факторов в виде линейной комбинации *независимых общих факторов*  $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \dots, \tilde{\Gamma}_M$ :

$$\tilde{\Psi}_k = \sum_{m=1}^M b_{k,m} \tilde{\Gamma}_m + \tilde{\delta}_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (7.29)$$

Последний шаг осуществляется при помощи *метода главных компонент (МГК)*, примененного к отраслевым и страновым индексам. Это делается скорее с точки зрения вычислительного удобства (найти экономическую интерпретацию этим общим факторам обычно бывает трудно). В векторных обозначениях мы получим:

$$\tilde{\Psi} = \mathbf{B} \tilde{\Gamma} + \tilde{\delta}, \quad (7.30)$$

где  $\mathbf{B} = (b_{k,m})_{k=1, \dots, K; m=1, \dots, M}$  — матрица отраслевых и страновых коэффициентов,  $\tilde{\Gamma}' = (\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_M)$  — вектор главных компонент — общих факторов, а  $\tilde{\delta}' = (\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_K)$  — вектор остатков. Подставляя (7.30) в (7.28), мы получим

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\beta} \mathbf{W} (\mathbf{B} \tilde{\Gamma} + \tilde{\delta}) + \tilde{\mathbf{Z}}.$$

После того как мы получили составной фактор, при помощи (7.26) можно легко вычислить коэффициент чувствительности  $\tilde{\beta}_i$  для компании  $i$ , а значит, может быть вычислена корреляция между лог-доходностями стоимостей активов. Рассмотрим стандартизированную версию модели (7.26):

$$R_i = \frac{\tilde{R}_i - \mu_i}{\sigma_i} = \frac{\beta_i}{\sigma_i} F_i + \frac{Z_i}{\sigma_i},$$

где  $\sigma_i^2 = \mathbf{D}(\tilde{R}_i)$ ,  $F_i = \tilde{F}_i - \mu_i$ , а  $Z_i = \tilde{Z}_i - \mu_i$ . Корреляция между лог-доходностями стоимостей компаний  $i, j$  определяется соотношением

$$\rho(R_i, R_j) = \mathbf{E}(R_i, R_j) = \frac{\beta_i \beta_j}{\sigma_i \sigma_j} \mathbf{E}(F_i F_j),$$

поскольку  $Z_i$  предполагаются некоррелированными и независимыми от общих факторов. Используя коэффициент детерминации  $R^2$  парной регрессии (7.26), который равен

$$R_{sq,i}^2 = \frac{\beta_i^2 \mathbf{D}(\tilde{F}_i)}{\sigma_i^2}, \tag{7.32}$$

мы можем упростить выражение для  $\rho(R_i, R_j)$  и представить его в виде

$$\begin{aligned} \rho(R_i, R_j) &= \frac{R_{sq,i}}{\sqrt{\mathbf{D}(\tilde{F}_i)}} \frac{R_{sq,j}}{\sqrt{\mathbf{D}(\tilde{F}_j)}} \mathbf{E}(F_i F_j) = \\ &= \frac{R_{sq,i}}{\sqrt{\mathbf{D}(F_i)}} \frac{R_{sq,j}}{\sqrt{\mathbf{D}(F_j)}} \mathbf{E}(F_i F_j), \end{aligned} \tag{7.33}$$

поскольку  $\mathbf{D}[\tilde{F}_i] = \mathbf{D}[F_i]$ . Используя оценки коэффициентов уравнения (7.31), мы можем вычислить по формуле (7.33) оценку корреляции лог-доходностей стоимостей активов. Если произвести стандартизацию переменных уравнения (7.31), мы получим

$$\mathbf{R} = \beta \mathbf{W}(\mathbf{B}\Gamma + \delta) + \mathbf{Z},$$

где  $\beta - (N \times N)$  матрица, полученная шкалированием каждого диагонального элемента в  $\tilde{\beta}$  множителем  $1/\sigma_i$ , а



переменная — лог-доходности стоимостей активов, независимые переменные — 45 страновых и 61 отраслевая фиктивные переменные.

• Отраслевые веса  $w_{i,k}$  в (7.27) вычисляются путем усреднения активов и продаж по каждому бизнес-направлению (БН), в котором осуществляет деятельность рассматриваемая компания  $i$ . Например, рассмотрим итальянскую компанию, которая осуществляет деятельность в двух бизнес-направлениях (табл. 7.30).

**Таблица 7.30.** Активы и продажи для разных БН

Бизнес-направление	Активы, %	Продажи, %
Спортивные машины	40	30
Спортивные мотоциклы	60	70
Общее число	100	100

Веса  $w_{i,k}$  вычисляются как среднее весов (измеряемых в %) для каждого БН по активам и продажам. Таким образом, в этом примере вес для спортивных машин равен  $35\% = (40 + 30)/2$ , а вес для спортивных мотоциклов равен  $65\% = (60 + 70)/2$ . Страновые веса вычисляются похожим образом. После того как определены веса, можно построить факторы  $\tilde{F}_i$ .

• Применим метод главных компонент к факторам  $\tilde{F}_i$  и вычислим 14 главных компонент  $\tilde{\Gamma}_m$ . Интерпертация полученных главных компонент позволила разбить их на два глобальных фактора, пять региональных факторов и семь отраслевых факторов. Этот шаг делается главным образом для обеспечения вычислительного удобства реализации моделирования методом Монте-Карло.

• Отраслевые и страновые коэффициенты  $b_{k,m}$  в уравнении (7.29) вычисляются с использованием стандартной техники оценивания коэффициентов линейной регрессии.

• Составные факторы  $\tilde{F}_i$  строятся с использованием ортогональных факторов и весов  $w_{i,k}$ .

• После того как найдены составные факторы, оценим в линейном регрессионном уравнении (7.26) коэффициент чувствительности  $\beta_i$ .

Имея оценки всех параметров модели, можно оценить функцию распределения убытков портфеля, а затем получить численную оценку влияния различных факторов, представляющих систематический риск,

набора исторических данных в форме

$$\tilde{R}_{it} = \tilde{\beta}_i \tilde{F}_{it} + \tilde{Z}_{it}, \quad t = 1, \dots, T,$$

где  $t$  — номер такта времени, к которому «привязаны» наблюдаемые значения  $(\tilde{R}_{it}, \tilde{F}_{it})$ . Это и позволяет нам оценивать коэффициент чувствительности  $\tilde{\beta}_i$  в рамках уравнения (7.26) в виде модели парной регрессии  $\tilde{R}_{it}$  по  $\tilde{F}_{it}$ .

на убыток портфеля. Кроме того, можно использовать оцененную модель (7.26) в различных сценарных расчетах (в так называемом стресс-тестировании).

### 6) Корреляционная KMV-модель: имитационное моделирование функции распределения убытков портфеля

Функция распределения убытков портфеля вычисляется с использованием Монте-Карло-моделирования. Далее мы будем символом «\*» сопровождать смоделированные случайные величины. Процедура моделирования состоит из следующих шагов:

- смоделируем ортогональные глобальные факторы  $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_M$ ; в результате получим  $M$  смоделированных значений  $\tilde{\Gamma}_1^*, \dots, \tilde{\Gamma}_M^*$ ;
- смоделируем ошибки в (7.29); получим  $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_K$ ; чтобы получить страновые и секторальные индексы  $\Psi_1^*, \dots, \Psi_K^*$ , подставим смоделированные ошибки и  $\tilde{\Gamma}_1^*, \dots, \tilde{\Gamma}_M^*$  в это уравнение;
- чтобы смоделировать составной фактор  $\tilde{F}_i$ , подставим  $\Psi_1^*, \dots, \Psi_K^*$  в (7.27);
- используя оценки параметров уравнения (7.27), сгенерируем случайный вектор лог-доходностей стоимостей активов; для этого из  $N$ -мерного нормального распределения со средним  $\beta\tilde{F}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ , элементы  $\sigma_{ij}$  которой определяются по формулам (7.32)–(7.33), смоделируем  $N$ -мерный случайный вектор;
- повторим предыдущие шаги большое количество раз.

По смоделированным доходностям можно вычислить РД и ОЧД, зная которые, можно оценить среднюю норму потерь портфеля. Однако ранее предложенный анализ для оценки функции распределения убытков портфеля можно провести и с использованием рыночных стоимостей портфеля.

### 7) Эмпирические приложения с использованием статистического пакета GAUSS: модель KMV с одним фактором

После того как была рассмотрена теория для общего случая, приведем простой прикладной пример модели KMV с одним фактором. Однофакторная модель широко используется на практике и дает вполне адекватные результаты для многих портфелей. Она представима в виде:

$$R_i = \beta_i F + \sqrt{1 - \beta_i^2} Z_i,$$

$$\text{cov}(Z_i, Z_j) = 0, i \neq j, \quad \text{cov}(F, Z_i) = 0, \forall i$$

где  $R_i$  — стандартизированные доходности стоимостей активов компании  $i$ ,  $\beta_i$  — коэффициент чувствительности, а  $F$  — систематический фактор. В подходе стоимостей активов стандартный способ получения функции распределения портфеля имеет следующую структуру.

- Смоделируем стандартизированные лог-доходности  $R_i$  для каждого заемщика в нашем портфеле (по построению они подчиняются стандартному нормальному распределению).

- Для каждого заемщика проверим, оказался ли он в состоянии дефолта или нет, т.е. оказалась ли стоимость активов меньше некоторого порога  $d_i$ , отвечающего заданной  $V_i$ . Если мы предположим для простоты, что стоимости активов имеют стандартное нормальное распределение, то  $d_i = \Phi^{-1}(V_i)$ , где  $\Phi^{-1}$  обозначает обращение стандартного нормального распределения. Если активы окажутся в состоянии дефолта, определим значение ДНС(Д) $_i \times$  ВВП(Д) $_i$ .

- Сложим убытки всех индивидуальных заемщиков, входящих в портфель.

- Повторим описанные выше шаги достаточно большое количество раз и получим функцию распределения убытков кредитного портфеля.

```
new;cls; et=hsec;
//Классы ВД
pd=seqa(0.01,0.01,5);
//Число моделирований
scenarios=100000;
//Число заемщиков
number_ob=1000;
//Матрица вероятностей переходов для всех заемщиков
//во всех моделированиях
pd_all=pd.*ones(number_ob,1);
//Инициализируем матрицу,
//составленную из убытков по портфелю
//для каждого моделирования
port_all=zeros(scenarios,1);
//Создадим цикл для вычисления смоделированного много
//раз убытка по портфелю (представленного в переменной
//"scenarios")
for i(1,scenarios,1);
//Фиксированная ДНС(Д)
lgd_all=0.45;
//Случайная ДНС(Д)
//LGD_all=rndbeta(1, 1,0.2,0.6);
//Невозвращенные при дефолте средства (для простоты
//зафиксируем их на уровне 1000 $,
//но она может меняться случайным образом)
ead_all=1000*ones(rows(pd_all), 1);
//Коэффициент чувствительности beta_i
//Фиксированный
```

```

//Случайный (предположим, что он был оценен для каждой
//компании методом наименьших квадратов)
//beta_i=rndu(rows(pd_all), 1);
//Порог дефолта: для простоты будем использовать
//обращение нормального распределения для ВД
dt_all=cdfni(pd).*ones(number_ob,1);
//Моделируем фактор
zz=rndn(1,1);
//Генерируем лог-доходности стоимостей активов
//для всех компаний
a_i_all = beta_i.*zz + sqrt(1-beta_i^2).*rndn(rows(pd_all), 1);
//Убыток на займ
loss_i=lgd_all.*ead_all.*(a_i_all.<dt_all);
//Убыток портфеля
port_loss=sumc(loss_i);
port_all[i,1]=port_loss;
endfor;
//Покажем эмпирическую функцию распределения портфеля
library pgraph; _pdate=0; xlabel("PORTFOLIO LOSSES");
histp(port_all,100);
"Time requested to simulated the portfolio loss distribution
(in seconds)";
ht=hsec-et;ht/100;
"VaR 99 %"; quantile(port_all,0.99);

```

Величина смоделированной границы потерь 99%-ного доверительного уровня должна быть близка к числу 327 150 долл., а смоделированная гистограмма убытков портфеля должна быть похожа на функцию распределения, представленную на рис. 7.29.

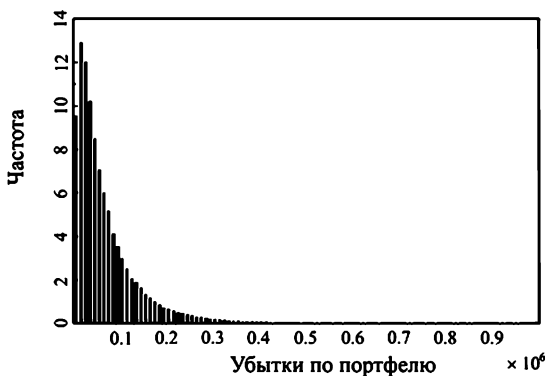


Рис. 7.29. Гистограмма убытков портфеля для однофакторной модели

#### 7.4.17. Модель CreditRisk+

CreditRisk+ (далее — CR+) — это модель оценки и управления кредитным риском, разработанная в 1997 г. банком Credit Suisse (Credit Suisse).  
Скопировано с сайта http://учебники.информ2000.ru/ Разработка электронных библиотек http://прав.информ2000.ru/

(1997)]. Она может быть рассмотрена как актуарная модель, поскольку при ее реализации используются некоторые методы управления рисками, а также алгоритмы, заимствованные из страхования. На основании этой модели можно оценить функцию распределения убытков по кредитному портфелю как для одногодичного, так и для многогодичного временного горизонта. В двух этих случаях доли дефолтов могут рассматриваться либо в качестве детерминированных, либо в качестве случайных величин.

## 1) Информационное множество модели

Основная особенность этой модели состоит в том, что для нее требуется ограниченное и легко доступное информационное множество. Оно состоит из следующих компонентов:

- величины номинальных потерь при дефолте;
- вероятности дефолта;
- стандартных отклонений вероятностей дефолта;
- норм восстановления.

Модель может управлять финансовыми инструментами различных типов. Например, облигациями, займами, аккредитивами с гарантией оплаты, деривативами. Каждый из этих инструментов имеет свою норму восстановления, что учитывается при оценке функции распределения убытков по портфелю. Кроме того, если мы рассматриваем убытки за несколько лет, то важно учитывать, что уровень ВВП(Д) может меняться с течением времени. Более того, вероятности дефолта меняются от года к году, а финансовые организации могут использовать свои собственные оценки, построенные на основании внутренних моделей прогнозов. Стандартные отклонения вероятностей дефолта могут быть легко вычислены на основании временных рядов, характеризующих платежеспособность компании. Следует отметить, что более длинные временные ряды позволяют получить более надежные оценки стандартных отклонений, поскольку в этом случае учитываются эффекты экономических циклов. Нормы восстановления могут быть получены либо от специализированных рейтинговых агентств, либо вычислены с использованием внутренних ресурсов финансовой организации.

## 2) Основная модель с фиксированной долей дефолтов

В модели CR+ делаются следующие предположения:

- для займов вероятность дефолта за заданный период — скажем, за один год — зависит только от длины периода и не зависит от момента отсчета этого периода;



- для большого количества заемщиков вероятность дефолта хотя бы одного из них мала, а число дефолтов, возникших за заданный период, не зависит от числа дефолтов, возникших в любой другой период.

В модели CR+ не делается никаких предположений относительно причин неплатежеспособности: заемщик  $A$  становится неплатежеспособным с вероятностью  $p_A$  и остается платежеспособным с вероятностью  $(1 - p_A)$ . Таким образом, отправной точкой является бернуллиевская случайная величина с функцией плотности  $f(x) = p_A^x (1 - p_A)^{1-x}$ . Учитывая эти предположения, можно показать, что число дефолтов в портфеле имеет пуассоновское распределение (доказательство см. в разделе §A2.1 методологии [Credit Suisse (1997)]).

Назначение модели CR+ состоит в определении рекурсивного соотношения, которое позволило бы легко оценить функцию распределения убытков по портфелю. Для этого в CR+ на первом шаге определяется функция распределения количества дефолтов в портфеле. После этого можно выписать рекурсивную формулу для функции распределения убытков, связанных с дефолтами.

Чтобы получить функцию распределения убытков и уменьшить вычислительную сложность, убытки (которые представляют собой чистый убыток, полученный после корректировки с учетом нормы восстановления) делятся на  $m$  групп, в каждой из которых уровень кредитного риска характеризуется единственным числом.

Обозначения, используемые для каждой из этих групп, представлены ниже:

Указатель	Символ
Заемщик	$A$
ВНП(Д)	$L_A$
Вероятность дефолта	$p_A$
Ожидаемая ВНП(Д)	$\lambda_A = L_A \times p_A$

Прежде чем представить вычисления, условимся считать, что в некоторой базовой валюте выбрана единица измерения ВНП(Д), которую обозначим через  $L$ . Для каждого заемщика  $A$  определим числа  $\varepsilon_A$  и  $\nu_A$  такие, что

$$L_A = L \times \nu_A \quad \text{и} \quad \lambda_A = L \times \varepsilon_A.$$

Следовательно,  $\nu_A$  и  $\varepsilon_A$  — это соответственно величина невозвращенных при дефолте средств и ожидаемый убыток, выраженные в еди-

**Пример 7.11.** Предположим, банк имеет портфель, составленный из займов и облигаций 500 различных заемщиков с ВВП(Д), меняющимися от 50 000 долл. до 1 млн долл. Пусть для первых шести заемщиков ВВП (Д) составит следующие значения (табл. 7.31).

**Таблица 7.31.** ВВП(Д) для первых шести заемщиков

Заемщик А	ВВП(Д) (в долл.) $L_A$	Нормир. ВВП(Д) (в 100 000 долл.) $\bar{\nu}_j$	Округленная нормир. ВВП(Д) (в 100 000 долл.) $\nu_j$	Группа $j$
1	150 000	1,5	2	2
2	460 000	4,6	5	5
3	435 000	4,35	5	5
4	370 000	3,7	4	4
5	190 000	1,9	2	2
6	480 000	4,8	5	5

Единица измерения ВВП(Д) предполагается равной  $L = 100\,000$  долл. В каждой группе  $j, j = 1, \dots, m$ , где  $m = 10$ , ВВП(Д) в среднем равна  $\nu_j$  или  $100\,000$  долл.  $\times j$ .

В модели CR+ займы и облигации одной группы  $j$  рассматриваются как независимый портфель.

Введем следующие обозначения:

Указатель	Символ
Средняя ВВП(Д) в группе $j$ , измеряемая в единицах $L$	$\nu_j$
Ожидаемый убыток в группе $j$ , измеренный в единицах $L$	$\varepsilon_j$
Ожидаемое число дефолтов в группе $j$	$\mu_j$

Тогда

$$\varepsilon_j = \nu_j \cdot \mu_j, \quad \mu_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j}. \tag{7.35}$$

Кроме того, ожидаемый (за год) убыток  $\varepsilon_j$  в группе  $j$ , измеренный в единицах  $L$ , равен сумме ожидаемых убытков  $\varepsilon_A$  по каждому заемщику, принадлежащему группе  $j$ :

$$\varepsilon_j = \sum_{A:\nu_A=\nu_j} \varepsilon_A.$$

Пусть  $\mu$  — ожидаемое (среднее) суммарное число дефолтов в портфеле за один год. Поскольку  $\mu$  равна сумме ожидаемого числа дефолтов в каждой из групп, то:

$$\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j = \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} \tag{7.36}$$





следствием изменчивости такого внешнего фактора, как состояние экономики, которое влияет на платежеспособность заемщиков. Например, ухудшение состояния экономики может привести к неплатежеспособности большинства заемщиков. Следовательно, пуассоновское распределение не так сильно рассеяно, чтобы быть распределением, описывающим число дефолтов.

Одним из способов моделирования ситуаций, когда дефолты возникают в результате влияния неких общих факторов – это использование смесей распределений. Оценка величины агрегированных убытков по кредитному портфелю может быть вычислена при помощи следующей двухшаговой процедуры: на первом шаге из некоторого распределения (в методологии CreditRisk+ это гамма-распределение) моделируется управляющий дефолтами внешний параметр. На втором шаге число дефолтов моделируется с помощью условного распределения, при условии того, что управляющий внешний параметр равен значению, смоделированному на предыдущем шаге (в методологии CreditRisk+ это распределение Пуассона с параметром, равным значению, полученному на первом шаге).

В частности, следует отметить, что в методологии CR+ управляющие внешние параметры измеряются для группы заемщиков из каждого сектора. Группа заемщиков из одного сектора подвержена влиянию общих внешних факторов, определяющих число дефолтов. Например, можно разделить всех заемщиков по страновой принадлежности. Для удобства описания результатов при разделении заемщиков по секторам в CR+ вводятся новые обозначения: каждому сектору  $S_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , ставится в соответствие случайная величина  $x_k$ , равная числу дефолтов в этом секторе, математическое ожидание которой обозначается через  $\mu_k$ , а стандартное отклонение — через  $\sigma_k$ . Необходимые в дальнейшем обозначения, с учетом разделения по секторам, приведены в табл. 7.32.

**Таблица 7.32.** Необходимые обозначения, с учетом разделения по секторам

Внутрисекторные характеристики	Старое обозначение	Новое обозначение
Базовая единица измерения ВВП(Д)	$L$	$L$
ВВП(Д) в единицах $L$	$L_j = Lv_j$ $1 \leq j \leq m$	$L_j^{(k)} = Lv_j^{(k)}$ $1 \leq k \leq n; 1 \leq j \leq m(k)$
Ожидаемая ВВП(Д) в каждой группе, измеренная в единицах $L$	$\lambda_j = L\varepsilon_j$ $1 \leq j \leq m$	$\lambda_j^{(k)} = L\varepsilon_j^{(k)}$ $1 \leq k \leq n; 1 \leq j \leq m(k)$

Математическое ожидание  $\mu_k$  числа убытков в секторе  $k$  может быть выражено через математические ожидания числа убытков в груп-

пах заемщиков, входящих в этот сектор, или, что эквивалентно,  $\mu_k$  представимо в виде суммы вероятностей дефолта по всем заемщикам из рассматриваемого сектора, т. е.

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}; \quad (7.42)$$

$$\mu_k = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}, \quad (7.43)$$

где  $\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = p_A$ , а  $p_A$  — вероятность дефолта заемщика  $A$  за рассматриваемый период.

Выражения (7.42)–(7.43) являются аналогами (7.35)–(7.36). В методологии CR+ фактическая вероятность дефолта заемщика  $A$  из рассматриваемого сектора моделируется как случайная величина, пропорциональная  $x_k$ , математическое ожидание которой равно  $p_A$ . Для того чтобы выразить эту зависимость, в методологии CR+ определяется случайная вероятность дефолта  $x_A$  заемщика  $A$ :

$$x_A = \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \cdot \frac{x_k}{\mu_k}, \quad (7.44)$$

где математическое ожидание  $x_A$  равно  $p_A = \varepsilon_A/\nu_A$ .

Тогда стандартное отклонение случайной вероятности дефолта среди заемщиков из сектора  $k$  равно сумме стандартных отклонений случайных вероятностей дефолтов по всем заемщикам из этого сектора:

$$\sum_A \sigma_A = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \cdot \frac{\sigma_k}{\mu_k} = \sigma_k \frac{1}{\mu_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = \sigma_k.$$

Представив отношение  $\sigma_k$  к  $\mu_k$  как отношение суммы стандартных отклонений случайных вероятностей дефолтов для каждого заемщика из сектора  $k$  к сумме математических ожиданий этих вероятностей, взвешенных с учетом их вклада в вероятность дефолта всех заемщиков в этом секторе, получим:

$$\frac{\sigma_k}{\mu_k} = \frac{\sum_A \sigma_A}{\sum_A p_A} = \frac{\sum_A p_A \left( \frac{\sigma_A}{p_A} \right)}{\sum_A p_A},$$

откуда следует:  $\sigma_k = \mu_k \cdot \omega_k$ , где  $\omega_k = \frac{\sum_A p_A \left( \frac{\sigma_A}{p_A} \right)}{\sum_A p_A}$ .

*Распределение дефолтов со случайными вероятностями дефолтов* рассчитывается по той же схеме, как и в случае фиксированных вероятностей дефолтов. Налагая условие  $X_k = x$  и используя соотношение

(7.37), можно выписать приближенное выражение для производящей функции распределения числа дефолтов<sup>35</sup>:

$$F_k(z|X_k = x) = e^{x(z-1)}. \quad (7.45)$$

Если мы предположим, что  $x_k$  имеет плотность  $f_k(x)$ , то, проинтегрировав  $F_k(z|x_k = x)$ , мы сможем найти безусловную производящую функцию для распределения числа дефолтов:

$$F_k(z) = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} f_k(x) dx. \quad (7.46)$$

В модели CR+ предполагается, что  $x_k$  имеет гамма-распределение  $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$  со средним  $\mu_k$  и стандартным отклонением  $\sigma_k$ . Решая следующую систему уравнений относительно  $\alpha_k$  и  $\beta_k$

$$\begin{cases} \mu_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \\ \sigma_k^2 = \frac{\alpha_k}{\beta_k^2} \end{cases},$$

получаем требуемые параметры гамма-распределения

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}, \quad (7.47)$$

$$\beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}. \quad (7.48)$$

Подставляя аналитическое выражение плотности гамма-распределения в (7.46), получим:

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} \frac{e^{-\frac{x}{\beta_k}} x^{\alpha_k-1}}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} dx \\ &= \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} (1 + \beta_k^{-1} - z)^{\alpha_k}} = \left( \frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

где  $p_k = \beta_k / (1 + \beta_k)$ .

Разложив функцию  $F_k(z)$  в ряд Тейлора, найдем выражение для вероятности  $p(n)$  возникновения  $n$  дефолтов в секторе  $k$ :

$$p(n) = (1 - p_k)^{\alpha_k} \binom{n + \alpha_k - 1}{n} p_k^n.$$

<sup>35</sup> В данном приближенном представлении производящей функции  $F_k(z|X_k = x)$  подразумеваются взаимная статистическая независимость дефолтов заемщиков од-  
Скопировано с сайта <http://лучше.онлайн.информ2000.рф> Разработка электронных библиотек  
http://сезонка.информ2000.рф <https://право.информ2000.рф>

Последнее распределение представляет собой отрицательное биномиальное распределение.

Наконец, функция распределения числа убытков по всему портфелю определяется с помощью следующей производящей функции:

$$F(z) = \prod_{k=1}^n F_k(z) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}.$$

Функция распределения числа дефолтов по всему портфелю в общем случае не является отрицательным биномиальным распределением, а представляет собой смесь отрицательных биномиальных распределений по всем секторам.

Закон распределения убытков банка в результате дефолтов заемщиков со случайными вероятностями индивидуальных дефолтов определяется с использованием производящей функции распределения убытков по портфелю, а именно функции:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{агрегированные убытки} = n \times L) z^n,$$

которая в силу предположения о независимости может быть также выражена как произведение производящих функций по каждому из  $n$  секторов,

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z).$$

Аналогично выражению (7.39) введем следующее обозначение:

$$P_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left( \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right)} = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left( \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}. \quad (7.50)$$

Тогда можно показать, что производящая функция распределения убытков от заемщиков из  $k$ -го сектора является аналогом уравнения (7.40):

$$G_k(z) = F_k(P_k(z)). \quad (7.51)$$

Подобно тому, как это делалось в (7.45), можно выписать условную производящую функцию распределения убытков, где каждый заемщик  $A$  оказывается в состоянии дефолта с вероятностью  $x_A$ :

$$G_k(z|x_A) = e^{-\sum_A x_A + \sum_A x_A z^{\nu_A}} = e^{\sum_A x_A (z^{\nu_A} - 1)} = e^{\frac{x_k}{\mu_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} (z^{\nu_A} - 1)} =$$



Здесь мы воспользовались выражением (7.44) и альтернативным представлением (7.50), выраженным в виде суммы по всем заемщикам, принадлежащим сектору  $k$ :

$$P_k(z) = \frac{\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}}{\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}} = \frac{1}{\mu_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}. \quad (7.53)$$

Аналогично тому, как это делалось в случае функции распределения числа убытков, воспользовавшись (7.52), можно найти безусловную производящую функцию распределения убытков от заемщиков в секторе  $k$ :

$$G_k(z) = \int_{x_k=0}^{\infty} e^{\sum_A x_A (z^{\nu_A} - 1)} f_k(x_k) dx_k = \int_{x_k=0}^{\infty} e^{x_k (P_k(z) - 1)} f_k(x_k) dx_k.$$

Наконец, если мы воспользуемся (7.50) и (7.51), подставив их в (7.49), и возьмем произведение полученных выражений по всем секторам, то получим:

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k}. \quad (7.54)$$

В руководстве к методологии CR+ (см. приложение § A10 в [Credit Suisse (1997)]) на основании выражения (7.54) получено рекуррентное соотношение для вычисления распределения убытков по портфелю, которое мы коротко рассмотрим ниже.

Производящую функцию можно представить в виде многочлена

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n.$$

Продифференцировав обе части этого равенства, получим:

$$\frac{d(\log G(z))}{dz} = \frac{1}{G(z)} \frac{dG(z)}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_r z^r}{b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_r z^r}.$$

Рекуррентное соотношение для коэффициентов многочлена  $G(z)$  имеет вид:

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left( \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1} (n-j) A_{n-j} \right).$$

Используя ранее полученные соотношения, выражение для производящей функции, определенной в (7.54), можно вычислить коэффициенты  $A(z)$  и  $B(z)$  с учетом того, что

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\frac{p_k \alpha_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{\nu_j^{(k)} - 1}}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}}.$$

Наконец, получаем распределение убытков. Заинтересованным читателям мы рекомендуем ознакомиться с работой [Melchiori (2004)], в которой подробно описан пример использования вышеуказанного рекуррентного соотношения.

#### 4) Расширение базовой модели: несколько секторов и распределение числа дефолтов зависит от случайных внешних факторов

В наиболее общей версии модели CR+ уже предполагается наличие нескольких факторов, объясняющих систематическую волатильность распределения числа дефолтов в портфеле. Это предположение учитывается путем замены понятия «сектор» на понятие «систематический фактор».

Рассмотрим производящую функцию условного распределения (7.52), которая представляет собой экспоненту в некоторой степени. В схеме с несколькими секторами эта степень может быть представлена в виде:

$$\sum_{k=1}^n x_k (P_k(z) - 1) = \sum_{k=1}^n \sum_A \frac{x_k \varepsilon_A}{\mu_k \nu_A} (z^{\nu_A} - 1) = \sum_{A,k} \delta_{A,k} \frac{x_k \varepsilon_A}{\mu_k \nu_A} (z^{\nu_A} - 1), \tag{7.55}$$

где

$$\delta_{A,k} = \begin{cases} 0 & A \notin K \\ 1 & A \in K. \end{cases}$$

В расширенной версии модели CR+ делается допущение о том, что каждый заемщик подвержен влиянию более одного фактора. Чтобы учесть этот факт, заменим дельта-функцию  $\delta_{A,k}$ , задающую принадлежность заемщика определенному сектору, весовой функцией:

$$\theta_{A,k} : \sum_{k=1}^n \theta_{A,k} = 1$$

Веса  $\theta_{A,k}$  определяют степень зависимости вероятности дефолта заемщика  $A$  от воздействия фактора сектора  $k$ , к которому он относится. Таким образом, выражение (7.55) преобразуется к виду:

$$\sum_{k=1}^n x_k (P_k(z) - 1) = \sum_{A,k} \theta_{A,k} \frac{x_k \varepsilon_A}{\mu_k \nu_A} (z^{\nu_A} - 1),$$

где вклад заемщика  $A$  равен

$$x_A (z^{\nu_A} - 1), \quad \text{а} \quad x_A = \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \sum_{k=1}^n \theta_{A,k} \frac{x_k}{\mu_k}. \quad (7.56)$$

В силу того что математическое ожидание  $\frac{x_k}{\mu_k}$  равно единице, математическое ожидание  $x_A$  равно  $p_A = \varepsilon_A / \nu_A$ . Следовательно, выражение (7.53) заменяется на следующее:

$$P_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_A \theta_{A,k} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A},$$

где  $\mu_k = \sum_A \theta_{A,k} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}$ , а математическое ожидание и стандартное отклонение числа убытков по всем секторам равны сумме соответствующих вкладов каждым из заемщиков в портфеле, взвешенных с помощью функции  $\theta_{A,k}$ :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \sum_A \theta_{A,k} \mu_A, \\ \sigma_k &= \sum_A \theta_{A,k} \sigma_A. \end{aligned}$$

## 5) Методология Creditrisk+ и быстрое преобразование Фурье

Одним из недавно примененных подходов к оценке функции распределения убытков является быстрое преобразование Фурье (БПФ), в котором вместо *производящей* функции используется *характеристическая*. Основным преимуществом такой техники является ее вычислительная эффективность в условиях больших портфелей заемщиков из нескольких секторов. Более того, алгоритм, построенный по этой технике, функционирует более быстро и устойчиво по сравнению со стандартными алгоритмами, которые основаны на рекуррентных соотношениях, или такими алгоритмами, как алгоритм Панжера для рекурсий (для получения более подробной информации см. работу [Melchiori (2004)] и



(БПФ). Оно отображает вектор, составленный из  $n$  действительных чисел, в вектор, составленный из  $n$  комплексных чисел, т.е. является алгоритмом дискретного преобразования, что значительно снижает вычислительную сложность.

Поскольку в стандартной методологии CreditRisk+ мы имеем дело с производящей функцией для *дискретного* распределения, то для получения характеристической функции убытков целесообразно применить технику быстрого преобразования Фурье.

Отметим одно важное свойство характеристической функции. Предположим, что  $N$  и  $K$  — независимые неотрицательные дискретные случайные величины. Тогда характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций случайных величин  $N$  и  $K$  соответственно:

$$\varphi_{N+K}(t) = \mathbf{E}[e^{it(N+K)}] = \mathbf{E}[e^{itN}] \cdot \mathbf{E}[e^{itK}] = \varphi_N(t) \cdot \varphi_K(t).$$

В методологии CreditRisk+ связанный с дефолтом суммарный убыток  $Z$  равен сумме случайного числа  $N$  индивидуальных убытков  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Характеристическая функция этого суммарного убытка имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= \mathbf{E}[e^{it(Z)}] = \mathbf{E}_N[\mathbf{E}[e^{it(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N]] = \\ &= \mathbf{E}_N[\varphi_X(t)^N]. \end{aligned}$$

Благодаря удобному виду характеристической функции для суммарного убытка БПФ может быть использовано для вычисления сверток: БПФ для суммы двух (или большего числа) независимых дискретных случайных величин равно произведению БПФ этих случайных величин.

Как мы видели ранее, CreditRisk+ моделирует число дефолтов в кредитном портфеле как сумму случайных величин, имеющих отрицательное биномиальное распределение. Однако при расчете функции распределения убытков по этому портфелю такой способ моделирования не подходит, поскольку никак не учитывается зависимость между величинами убытков.

В качестве отправной точки рассмотрим производящую функцию моментов гамма-распределения  $\Gamma(\alpha, \beta)$ :

$$M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tx}] = (1 - \beta t)^{-\alpha}. \quad (7.57)$$

Теперь рассмотрим  $n$  дискретных случайных величин  $N_1, N_2, \dots, N_n$ . Предположим, что существует такая случайная величина  $X_k$  с некоторой плотностью  $f(x)$  и производящей функцией моментов  $M_X(t)$ , что

для любого фиксированного значения  $X_k$  ( $X_k = x$ ), случайные величины  $N_j|x$  независимы и

$$(N_j|X_k = x) \in Poisson(x\mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда совместная условная производящая функция равна:

$$\begin{aligned} P_{N_1, N_2, \dots, N_n}(t_1, t_2, \dots, t_n | X_k = x) &= \\ &= \mathbf{E}[t_1^{N_1}, \dots, t_n^{N_n} | X_k = x] = e^{x[\mu_1(t-1) + \dots + \mu_n(t-1)]}. \end{aligned}$$

Однако случайные величины  $N_1, N_2, \dots, N_n$  коррелированы, поскольку они зависят от общего случайного параметра  $X_k$ . Совместная безусловная производящая функция для  $N_1, N_2, \dots, N_n$  равна

$$\begin{aligned} P_{N_1, N_2, \dots, N_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \mathbf{E}_{X_k}[\mathbf{E}[t_1^{N_1}, \dots, t_n^{N_n} | X_k]] = \\ &= \int_0^{\infty} e^{x[\mu_1(t-1) + \dots + \mu_n(t-1)]} f(x) dx = M_{X_k}(\mu_1(t-1) + \dots + \mu_n(t-1)), \end{aligned}$$

где  $M_{X_k}(\cdot)$  — производящая функция моментов.

Учитывая, что  $X_k \in \Gamma(\alpha, \beta)$ , и используя выражение для ее производящей функции (7.57), получим совместную безусловную производящую функцию для  $N_1, N_2, \dots, N_n$ :

$$\begin{aligned} P_{N_1, N_2, \dots, N_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= M_{X_k}(\mu_1(t-1) + \dots + \mu_n(t-1)) = \\ &= [1 - \beta\mu_1(t-1) + \dots + \beta\mu_n(t-1)]^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Перед тем как приступить к изложению алгоритма вычисления функции распределения убытков по портфелю заемщиков из нескольких секторов, сделаем некоторое замечание относительно условной вероятности  $x_A$  дефолта заемщика  $A$ , которая возникла в (7.44) и (7.56). В работах [Gordy (2000)], [Melchiori (2004)] эта условная вероятность определяется следующим образом:

$$x_A = p_A \sum_{k=1}^n \theta_{A,k} X_k, \quad (7.59)$$

где случайная величина  $x_k$  имеет гамма-распределение со средним, равным единице, и стандартным отклонением  $\sigma_k$ . Сравнивая (7.56) с (7.59), легко видеть, что эти два представления эквивалентны, поскольку  $X_k/\mu_k$  в (7.56) имеет гамма-распределение со средним, равным единице. Однако представление (7.59) более удобно, поскольку в нем отсутствует константа  $1/\mu_k$ , нормирующая  $X_k$ , а значит, нет необходимости ее оценивать. Далее мы будем придерживаться именно этого представления.

## Анализ распределения убытков в модели CR+ с помощью БПФ (случай одного сектора)

1. Используя (7.47)–(7.48), при  $k = 1$ , вычислим оценки параметров гамма-распределения  $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ :

$$\alpha_k = \frac{1}{\sigma_k^2}, \quad \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{1}.$$

2. Построим вектор размерности  $m$  ( $m$  — число групп заемщиков, образованных при их разбиении по величине номинальных потерь, см. пример 7.11), на  $j$ -м месте которого стоит доля дефолтов в  $j$ -й группе от общего числа дефолтов в кредитном портфеле:

$$f(j) = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j}, \quad \text{для } j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

3. Вычислим БПФ для вектора, полученного на предыдущем шаге:

$$\tilde{f} = \text{БПФ}(f).$$

4. Применив формулу для производящей функции частот (7.58), получим вектор распределения числа дефолтов во всем портфеле:

$$\tilde{f}_z = \left[ 1 - \left( \sum_{j=1}^m \mu_j \beta \right) (\tilde{f} - 1) \right]^{-\alpha}.$$

5. Применим БПФ для восстановления функции распределения величины суммарного убытка по портфелю:

$$f_z = \text{БПФ}(\tilde{f}_z).$$

Если в нашем кредитном портфеле имеются заемщики из  $n$  независимых секторов, тогда портфель необходимо разделить на  $n$  подпортфелей для того, чтобы разбить заемщиков по категориям так, чтобы учесть как систематический, так и специфический риски. В соответствии с методологией CR+ специфический риск влияет на число дефолтов в отдельно взятом секторе, не связанных с воздействием систематических рисков этого сектора, и он может быть диверсифицирован. Поскольку каждый сектор рассматривается как независимый портфель, описанный выше алгоритм может быть применен к каждому такому

## Анализ распределения убытков в модели CR+ с помощью БПФ (случай нескольких секторов)

1. Повторим шаги 1–4 предыдущего алгоритма для всех  $n$  секторов.
2. Вычислим поэлементное произведение (умножение комплексных чисел)  $n$  векторов, полученных на предыдущем шаге:

$$\tilde{h} = \tilde{f}_{z,1} \cdot \dots \cdot \tilde{f}_{z,n+1}.$$

3. Для того чтобы восстановить вектор вероятностей как свертку  $\tilde{f}_{z,1}, \dots, \tilde{f}_{z,n+1}$ , применим к  $\tilde{h}$  обратную функцию для БПФ.

Так как при БПФ мы имеем дело с комплексными числами, конечная характеристическая функция также будет иметь комплексные коэффициенты. А значит, для получения искомого вектора вероятностей необходимо брать действительную часть. О сравнительном анализе различных подходов в методологии CreditRisk+ читатель может прочитать в работе [Melchiori (2004)].

### 6) Эмпирические приложения в пакете GAUSS: CreditRisk+ для трех секторов

Продемонстрируем технику БПФ на примере данных, взятых из работы [Crouhy et al. (2000)] (они представлены в табл. 7.33).

**Таблица 7.33.** Информация о заемщиках

Группа $j$	Число заемщиков	$\varepsilon_j$	$\mu_j$
1	30	1.5	1.5
2	40	8	4
3	50	6	2
4	70	25.2	6.3
5	100	35	7
6	60	14.4	2.4
7	50	38.5	5.5
8	40	19.2	2.4
9	40	25.2	2.8
10	20	4	0.4

// CreditRisk+ – торговая марка финансовых продуктов

//Credit Suisse.

// Данные брались из работы “A comparative analysis of

Скопировано с сайта  
 // <http://учебники.информ2000.ru/>

Разработка электронных библиотек

<https://право.информ2000.рф>



```

// Michel Crouhy, Dan Galai, Robert Mark,
// Journal of Banking and Finance 24, (2000),
// sigma_k=0.5 как для сектора А, так и для сектора В
new;cls;
//Определим размер вектора вероятностей
r=10; n=2^r; x=seqa(0,1,n);
//Установим число групп j
m=10; //j=1:m;
//Установим число секторов
sectors=3;
//Ожидаемое число дефолтов для каждой группы j
mu=1.5,4,2,6.3,7,2.4,5.5,2.4,2.8,0.40;
//Интересующие уровни вероятностей для функции
// распределения убытков
percentiles=0.5,0.75,0.95,0.975,0.99,0.995,0.9975,0.999;
percentiles=zeros(8,1);
//Установим стандартное отклонение для гамма-распределения
u=ones(sectors,1); sigma_k=0.000001|0.5|0.5;
//Секторные проценты
sector_percentage=zeros(m,sectors);
sector_percentage[:,1]=0.5*ones(m,1);
sector_percentage[1:m/2,2]=0.25*ones(m/2,1);
sector_percentage[m/2+1:m,2]=0.5*ones(m/2,1);
sector_percentage[1:m/2,3]=0.25*ones(m/2,1);
//Инициализируем вектор для произведения БПФ
conv_fft=ones(n,1);
for k(1,sectors,1);
//Вычисление вектора числа вероятностей числа дефолтов
// в портфеле
severity=zeros(n,1);
severity[1]=0;
severity[2:m+1]=mu.*sector_percentage[:,k]/
sumc(mu.*sector_percentage[:,k]);
//Вычисление БПФ
tt=zeros(n,1);
tt=fft(severity);
//Вычисление параметров гамма-распределения
alfa=u[k,1]^2./sigma_k[k,1]^2;
beta=sigma_k[k,1]^2./u[k,1];
//Применим безусловную производящую функцию
//частоты и перемножим полученные комплексные числа
conv_fft=conv_fft.*((1-sumc(mu.*sector_percentage[:,k].*beta)*(tt-1)).
^-alfa);
endfor;
//Вычислим БПФ
cr=real(fft(conv_fft)); mean=sumc(x.*cr); "Mean" mean;
sd=sqrt(sumc(((x-mean).^2).*cr)); "SD" sd; cr_acum=cumsumc(cr);
//Вычислим квантили функции распределения убытков
for i(1,rows(percentiles),1);
j=1;

```

```

j=j+1;
endo;
percentiles[i,2]= j;
endfor;

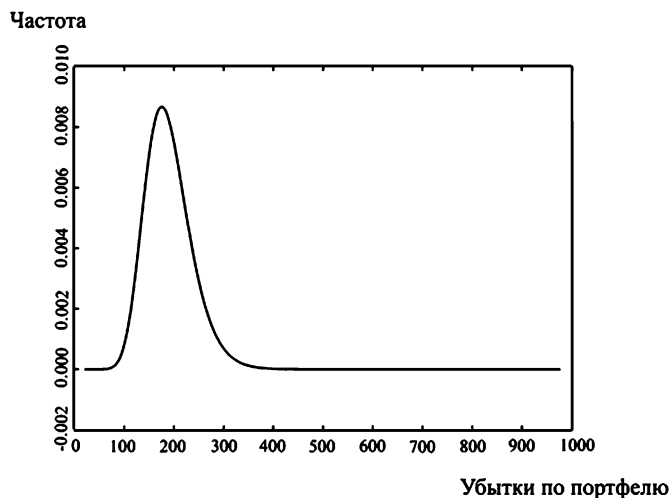
"Квантили:" уровни вероятностей;
//Изобразим функцию распределения убытков
library pgraph; _pdate=0; xlabel("PORTFOLIO LOSSES");
ylabel("Frequency"); xtics(0,1000,100,1);
ytics(-0.002,0.01,0.002,1); xy(x,cr);
    
```

Среднее, стандартное отклонение и квантили функции распределения убытков должны быть равны:

```

Mean: 176.98605   SD: 48.761539
Quantiles:
0.50000000 173.00000
0.75000000 207.00000
0.95000000 266.00000
0.97500000 288.00000
0.99000000 315.00000
0.99500000 335.00000
0.99750000 354.00000
0.99900000 378.00000
    
```

График искомой функции распределения убытков приведен на рис. 7.30.



**Рис. 7.30.** Функция распределения убытков по портфелю, полученная на основании методологии CreditRisk+ с использованием БПФ

### 7.4.18. Методология CreditPortfolioView

Модель CreditPortfolioView (далее — CPV) впервые была представлена в работах [Wilson (1997a, 1997b)]. CPV представляет собой модель

но гибкую многофакторную эконометрическую модель, используемую в качестве достаточно точного инструмента измерения и контроля кредитного риска. Основная идея этой модели заключается в следующем: моделируются совместные распределения числа дефолтов и миграционных вероятностей в различных рейтинговых классах, странах, промышленных секторах в зависимости от основных макроэкономических индикаторов. Моделирование такого рода базируется на предположении о том, что состояние экономики значительно влияет как на вероятности дефолтов, так и на миграционные вероятности переходов из одного рейтингового класса в другой. Существует множество подтверждений тому, что спад в экономике обычно приводит к увеличению числа случаев снижения рейтингов и банкротств (см., например, работу [Crouhy et al. (2000)] и ссылки в ней).

### 1) Базовая модель методологии CreditPortfolioView: CreditPortfolioView Macro

Целью этого раздела является описание того, как с помощью модели CPV Macro определять вероятность дефолта заемщиков из разных промышленных секторов. В начальной версии модели CPV вероятность дефолта заемщика из  $j$ -го сектора в момент времени  $t$  определялась с использованием логит-функций:

$$p_{j,t} = \frac{1}{1 + e^{-Y_{j,t}}}, \quad (7.60)$$

где  $p_{j,t}$  — условная вероятность дефолта заемщика в момент времени  $t$ , принадлежащего  $j$ -му промышленному сектору ( $j = 1, 2, \dots, K$ ), а  $Y_{j,t}$  — значение макроэкономического индикатора  $j$ -го сектора в момент времени  $t$ , который строится как взвешенная сумма прошлых и текущих значений основных макроэкономических факторов:

$$Y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}X_{j,1,t} + \beta_{j,2}X_{j,2,t} + \dots + \beta_{j,M}X_{j,M,t} + v_{j,t}^{36}. \quad (7.61)$$

Здесь  $(X_{j,1,t}, X_{j,2,t}, \dots, X_{j,M,t})$  — вектор значений регрессоров для сектора  $j$  в момент времени  $t$ , а  $v_{j,t}$  — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_j^2$ . Предполагается, что случайные величины  $v_{jt}$  независимы по  $t$  (при фиксированном  $j$ ), а ковариационная матрица  $\Sigma_v$  вектора  $v_t = (v_{1t}, v_{2t}, \dots, v_{Kt})'$  не зависит от  $t$ , так что

$$v_t \in N(0; \Sigma_v).$$

В работе [Wilson (1997a)] предполагается, что каждый макроэкономический фактор описывается одномерной моделью AR(2):

$$X_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1}X_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2}X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}, \quad (7.62)$$

где  $\varepsilon_{j,i,t}$  — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\tilde{\sigma}_i^2$ , для  $i = 1, \dots, M$ .

Поскольку  $\varepsilon_{j,i,t}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , предполагаются независимыми (по  $t$ ), получаем следующее:

$$\varepsilon_t \in N(0; \Sigma_\varepsilon),$$

где  $\varepsilon_t$  — вектор-столбец размерности  $(1 \times M)$ , а  $\Sigma_\varepsilon$  — ковариационная матрица размерности  $(M \times M)$ . Таким образом, суммируя все предположения, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} p_{j,t} &= \frac{1}{1 + e^{-Y_{j,t}}}, \\ Y_{j,t} &= \beta_{j,0} + \beta_{j,1}X_{j,1,t} + \beta_{j,2}X_{j,2,t} + \dots + \beta_{j,M}X_{j,M,t} + v_{j,t}, \\ X_{j,i,t} &= \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1}X_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2}X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, M$ , а  $j = 1, 2, \dots, K$ .

Определим  $E_t$  как случайный вектор-столбец размерности  $1 \times (K + M)$ , компоненты которого — вектора  $v$  и  $\varepsilon_t$ :

$$E_t = \begin{bmatrix} v \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \in N(0; \Sigma),$$

где  $\Sigma$  — матрица размерности  $(K + M) \times (K + M)$ , определяемая следующим образом:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_v & \Sigma_{v,\varepsilon} \\ \Sigma_{\varepsilon,v} & \Sigma_\varepsilon \end{bmatrix},$$

а  $\Sigma_{v,\varepsilon}$ ,  $\Sigma_{\varepsilon,v}$  — соответствующие межковариационные матрицы.

При условии, что оценки всех параметров рассматриваемой модели известны, мы можем использовать представление матрицы  $\Sigma$  в форме разложения Холецкого,

$$\Sigma = AA',$$

на основании которого смоделируем распределение вероятности дефолтов  $p_{j,t}$ . Используя нижнетреугольную матрицу  $A$  и смоделированный из многомерного стандартного нормального распределения случайный вектор,  $z_t \in N(0; \mathbf{I})$ , получим смоделированное значение вектора  $E_t$ .

По смоделированным значениям вектора  $E_t$  получим смоделированные вектора ошибок  $v_{j,t}$  и  $\varepsilon_{j,i,t}$ , которые могут быть использованы для

получения вектора смоделированных значений вероятностей дефолтов  $\mathbf{p}_t = (p_{1,t}, p_{2,t}, \dots, p_{K,t})$ . При использовании так называемого *алгоритма сдвига* этот смоделированный вектор вместе с переходными безусловными вероятностями, отвечающими моменту времени  $t$ , позволяют смоделировать условную переходную матрицу.

Перед тем как приступить к описанию этого алгоритма, коротко рассмотрим модификацию CPV-модели, предложенную через несколько лет после появления базовой CPV-модели.

## 2) Модифицированная модель: CreditPortfolioView Direct

Модель CreditPortfolioView Direct является модификацией базовой модели CreditPortfolioView Macro. Она была предложена в 2001 г. коллективом специалистов компании McKinsey<sup>37</sup>. Ее основной целью являлось получение более простой калибровки модели по сравнению с калибровкой CPV Macro.

В модели CPV Direct вектор вероятностей дефолтов  $\mathbf{p}_t = (p_{1,t}, p_{2,t}, \dots, p_{K,t})$  может быть напрямую получен из многомерного гамма-распределения.

Параметры гамма распределения определяются для каждого сектора  $j$  методом моментов подобно тому, как это делалось в модели CR+ (см. (7.47)–(7.48)). Неизвестно, как оценивается корреляционная матрица многомерного гамма-распределения в этой методологии, но, скорее всего, это делать проще, чем оценивать модель CPV Macro. Отметим, что поскольку вероятности гамма-распределения принимают ненулевые значения только для положительных действительных аргументов, теоретически может случиться, что смоделированное значение  $p_{j,t}$  окажется больше 1, а это значение, очевидно, не может интерпретироваться как вероятность. В некоторой степени это должно напомнить нам об аналогичной проблеме нескольких дефолтов одного заемщика в рамках методологии CreditRisk+. Однако на практике такие сценарии маловероятны и обычно они отбрасываются.

Наконец, после того как смоделирован вектор вероятностей дефолтов, при помощи *алгоритма сдвига* мы можем вычислить матрицу вероятностей условных переходов<sup>38</sup>.

<sup>37</sup>Интересно, что исходная документация, в которой описывалась эта модель, в Интернете более не является общедоступной.

<sup>38</sup>Под условным переходом понимается вероятность перехода заемщика из одной категории в другую при условии, что заемщик принадлежит определенному сектору

### 3) Алгоритм сдвига

В методологии CPV для каждого сектора  $j$  на основании матрицы вероятностей безусловных переходов (полученной от специализированных агентств, — например, от агентства S&P's или Moody's) и с использованием одного из двух описанных выше методов моделируется матрица вероятностей условных переходов в момент времени  $t$  и вероятность дефолта заемщика.

Обозначим через  $\bar{M}_t = (\bar{m}_{sh})$  матрицу вероятностей безусловных переходов в момент времени  $t$ , где  $s, h$  могут меняться от 1 до 8, поскольку число рейтинговых классов равно восьми: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC и дефолт. Так как состояние дефолта является поглощающим, мы положим  $\bar{m}_{8j} = 0$ , при  $j = 1, \dots, 7$ , и  $\bar{m}_{88} = 1$ .

При заданном векторе  $\mathbf{p}_t = (p_{1,t}, p_{1,t}, \dots, p_{8,t})$  алгоритм сдвига состоит из двух шагов.

1. На первом шаге вычисляется так называемый *индекс риска*  $r_{j,t}$ :

$$r_{j,t} = \frac{p_{j,t}}{\bar{p}_j},$$

где  $\bar{p}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_{j,t}$  — безусловная вероятность дефолта заемщика из  $j$ -го сектора. Если индекс риска больше единицы, т. е. экономика находится в состоянии рецессии, тогда матрица вероятностей условных переходов поправляется таким образом, чтобы увеличить вероятности возникновения дефолтов и вероятности понижения рейтингов и при этом уменьшить вероятности повышения рейтингов. В случае экономического подъема поступаем противоположным образом. Поправка должна быть больше для заемщиков из нижних рейтинговых классов, поскольку считается, что их чувствительность к экономической цикличности больше, чем у заемщиков из верхних рейтинговых классов.

2. На втором шаге вычисляется матрица вероятностей условных переходов для каждого сектора в момент времени  $t$ ,  $\mathbf{M}_t^{(j)} = (m_{sh}^{(j)})$ , где  $j = 1, 2, \dots, K$ . Общий вид элементов этой матрицы для сектора  $j$  определяется следующим образом:

$$m_{sh}^{(j)} = \alpha_{sh}^{(j)} (r_{j,t} - 1) + \bar{m}_{sh}, \quad s, h = 1, 2, \dots, 8, \quad (7.63)$$

где  $\alpha_{sh}^{(j)}$  — коэффициенты сдвига, которые должны калибровать

произвольной строки матрицы  $\mathbf{M}_t^{(j)}$ , получим:

$$\sum_{h=1}^8 m_{sh}^{(j)} = (r_{j,t} - 1) \sum_{h=1}^8 \alpha_{sh}^{(j)} + \sum_{h=1}^8 \bar{m}_{sh}.$$

Следовательно, учитывая, что сумма элементов в каждом ряду матрицы  $\mathbf{M}_t^{(j)}$  должна быть равна единице и  $\sum_{h=1}^8 \bar{m}_{sh} = 1$ , имеем:

$$\sum_{h=1}^8 \alpha_{sh}^{(j)} = 0.$$

3. Если правая часть выражения (7.63) оказывается отрицательным числом, то алгоритм корректирует это значение, присваивая соответствующей миграционной вероятности нулевое значение. Кроме того, предполагается, что коэффициенты сдвига должны удовлетворять следующим условиям:

$$\alpha_{sh} \geq 0 \quad \text{для } s < h \quad \text{и} \quad \alpha_{sh} \leq 0 \quad \text{для } s > h.$$

4. Таким образом, мы получим  $K$  матриц вероятностей условных переходов в момент времени  $t$  (по одной матрице в каждом секторе). Более того, мы можем следовать той же процедуре при вычислении  $\mathbf{p}_{t+1} = (p_{1,t+1}, p_{2,t+1}, \dots, p_{K,t+1})$  и получить  $K$  обусловленных матриц  $\mathbf{M}_{t+1}^{(j)}$  на момент времени  $(t + 1)$ . Если умножить  $\mathbf{M}_t^{(j)}$  на  $\mathbf{M}_{t+1}^{(j)}$ , получим матрицу вероятностей миграции из одного рейтингового класса в другой для фиксированного сектора  $j$  на момент времени  $(t + 1)$ .

Подход макромоделирования, описанный выше, рассматривает только одно смоделированное значение для  $\mathbf{p}_t$ , получаемое при единственной симуляции шоков  $v_{j,t}$  и  $\varepsilon_{j,i,t}$ . Этот процесс должен моделироваться большое количество раз (например, 100 000 раз, что позволит сгенерировать 100 000 оценок  $\mathbf{p}_t$  и 100 000 возможных матриц вероятностей условных переходов). Тогда эти смоделированные матрицы переходов  $\mathbf{M}_t^{(j)}$  можно использовать вместо матриц вероятностей безусловных переходов, построенных по историческим данным. Например, при фиксированном текущем рейтинге отдельно взятого займа (скажем,  $BB$ ) функция распределения стоимости этого займа, построенная по макрокорректированным переходным вероятностям из матрицы  $\mathbf{M}_t^{(j)}$ , может быть использована для расчета ГП на один год вперед. Обобщения на случай больших портфелей займов осуществляются подобно тому, как





```

new;cls;
//Мы предположим, что ошибки процессов авторегрессии
//коррелированы, но независимы от ошибок логит процесса. Мы сделали
//такой выбор в пользу упрощения, поскольку оно позволяет нам исполь-
//зовать для оценки параметров модели метод наименьших квадратов.
// Напомним читателю, что это становится невозможным, если ошибки
//логит-модели коррелированы с ошибками процессов авторегрессии:
//в этом случае следует использовать иные методы оценки параметров
//модели. Например, метод максимума правдоподобия.
//Для того чтобы измерить величину отклонений оценок параметров
//от их фактических значений, мы предлагаем читателю произвести
//небольшое количество симуляций методом Монте-Карло для коррели-
//рованных ошибок.
// =====Моделирование данных из генер. процесса=====
scenarios=1000; //Число сценариев T
//Фактическая ковариационная матрица
vcov=0.11 0.07 0.00,
      0.07 0.09 0.00,
      0.00 0.00 1.14;
//Вычислим разложение Холецкого
c_chol=chol(vcov)';
//Вычислив ошибки для всех сценариев,
//мы получим составленную из них матрицу размером 3 на T
err_term =c_chol*rndn(cols(vcov),scenarios);
//Транспонируем эту матрицу ошибок
err_term=err_term';
//Инициализация временных рядов n
x_1=zeros(scenarios,1);
x_2=zeros(scenarios,1);
logit_p=ones(scenarios,1)*-5;
//Сгенерируем временные ряды для макрофакторов x_1 and x_2
//из процесса AR(2)
for i(3,scenarios,1);
x_1[i]= 0.1 + 0.4*x_1[i-1] - 0.2*x_1[i-2] + err_term[i,1];
x_2[i]= 0.1 + 0.5*x_2[i-1] - 0.3*x_2[i-2] + err_term[i,2];
logit_p[i] = -3 - 0.9*x_1[i] + 0.3*x_2[i] + err_term[i,3];
endfor;
//С использованием логит-функции вычислим вероятности
//дефолтов и изобразим их графически
pd=1/(1+exp(-logit_p)); library pgraph; _pdate=0;
ylabel("Probability of Default"); xy( seqa(1,1,rows(pd)) ,pd);
//=====Процесс оценивания=====
//Мы оценим три маргинальные модели с использование МНК.
//Еще раз подчеркнем, что это возможно только в предположении, что
//ошибки логит процесса не зависят от других ошибок.
//Создадим лагированные переменных для макрофакторов.
// Создадим пропущенные наблюдения. Можно поставить
//на месте пропущенных значений нули, либо "выбросить"
//эти пропуски.
reg x1=lagn(x_1,1) lagn(x_1,2);
reg x2=lagn(x_2,1) lagn(x_2,2);

```

```
//Оценим параметры модели методом наименьших квадратов
{nam1,m1,b1,spb1,vc1,std1,sig1,cx1,rsq1,resid1,dbw1}=
= ols(0,x_1,reg_x1);
{nam2,m2,b2,spb2,vc2,std2,sig2,cx2,rsq2,resid2,dbw2}=
=ols(0,x_2,reg_x2);
{nam_p,m_p,b_p,spb_p,vc_p,std_p,sig_p,cx_p,rsq_p,resid_p,dbw_p}=
= ols(0,logit_p,x_1 x_2);
```

На рис. 7.31 дано графическое представление смоделированных вероятностей дефолта для сектора  $j$ , а в табл. 7.34 представлены результаты трех вариантов оценивания модели (7.60)–(7.62).

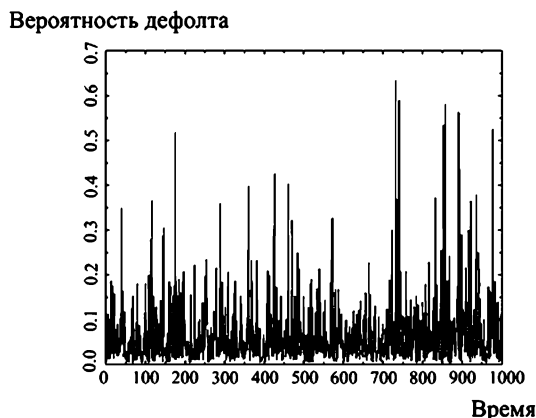


Рис. 7.31. Смоделированные вероятности дефолтов для сектора  $j$

Таблица 7.34. Результаты трех вариантов оценивания модели (7.60)–(7.62)

Variable	Estimate	Standard Error	t-value	Prob > t	Standardized Estimate	Cor. With Dep. Var.
CONSTANT	0.086	0.012	7.432	0.000	—	—
X1	0.354	0.031	11.315	0.000	0.354	0.302
X2	-0.169	0.031	-5.418	0.000	-0.169	-0.062
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
Variable	Estimate	Standard Error	t-value	Prob > t	Standardized Estimate	Cor. With Dep. Var.
CONSTANT	0.089	0.010	8.505	0.000	—	—
X1	0.498	0.030	16.411	0.000	0.498	0.385
X2	-0.293	0.030	-9.649	0.000	-0.293	-0.101
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Таблица 7.34 (окончание)

Variable	Estimate	Standard Error	t-value	Prob > t	Standardized Estimate	Cor. With Dep. Var.
CONSTANT	-3.005	0.036	-83.239	0.000	—	—
X1	-0.916	0.130	-7.052	0.000	-0.300	-0.244
X2	0.260	0.136	1.906	0.057	0.081	-0.127

Во второй ситуации мы рассмотрим временной ряд, составленный из 1000 наблюдений по 318 МСП за период с 1996 г. по 2004 г. Используем два финансовых коэффициента и два макрофактора (ВВП и 12-месячную процентную ставку). Переменная *Solvency* информирует аналитика относительно того, оказалась ли та или иная компания в состоянии дефолта или нет. В целях безопасности информация относительно названий МСП и финансовых коэффициентов не раскрывается.

Перед тем как использовать возможности пакета STATA, удостоверьтесь, что в нем установлена GLLAMM-библиотека. Инсталлировать этот пакет можно при помощи следующей команды:

```
net install gllamm, replace
```

Для получения более подробной информации см. вебсайт [www.gllamm.org](http://www.gllamm.org).

\*Задание пространственных переменных и временных рядов  
tsset id years

\*Оценка логит-функции при помощи команд библиотеки GLLAMM.  
gllamm solvency finratio1 finratio2 macro1 macro2, i(id) l(logit) f(binom)  
number of level 1 units = 999  
number of level 2 units = 318  
Condition Number = 6209.3743  
gllamm model  
log likelihood = -247.17223

solvency	Coef.	Std.Err	z	P> z	[95% Conf. Interval]
finratio1	-2.592	1.473	-1.760	0.078	-5.479 0.295
finratio2	1.029	1.822	0.570	0.572	-2.541 4.600
macro1	0.150	0.067	2.220	0.026	0.018 0.281
macro2	-0.364	0.231	-1.570	0.116	-0.817 0.090
_cons	-15.986	7.424	-2.150	0.031	-30.536 -1.435

Variances and covariances of random effects

```
***level 2 (id)
```

```
var(1): 2.995e-18 (9.672e-10)
```

Если мы хотим смоделировать случайный (random) отклик (т. е. в нашем случае *Solvency*), то для этого мы можем воспользоваться командой `gllasim`:

```
gllasim solvency_simul
```

Смоделированные отклики будут сохранены в *solvency\_simul*. Переоценив модель с учетом смоделированных откликов, мы получим:

```
gllamm solvency finratio1 finratio2 macro1 macro2, i(id) l(logit) f(binom)
number of level 1 units = 999 number of level 2 units = 318
Condition Number = 6253.9837
gllamm model
log likelihood = -265.1514
```

solvency	Coef.	Std.Err	z	P> z	[95% Conf.	Interval]
finratio1	-3.086	1.587	-1.940	0.052	-6.197	0.026
finratio2	1.560	1.928	0.810	0.418	-2.219	5.338
macro1	0.168	0.063	2.640	0.008	0.043	0.292
macro2	-0.464	0.219	-2.120	0.034	-0.893	-0.036
_cons	-17.554	7.046	-2.490	0.013	-31.363	-3.745

Variiances and covariiances of random effects

```
***level 2 (id)
var(1): 2.366e-24 (9.461e-13)
```

### 7.4.19. Сравнительный анализ многомерных моделей кредитного риска

В пунктах 7.4.15–7.4.18 были представлены основные особенности некоторых наиболее известных многомерных моделей кредитного риска. На первый взгляд эти модели представляются весьма разными, что, как кажется, приводит к несовпадению сгенерированных убытков и оценок границ потерь (ГП). Однако аналитически и эмпирически эти модели не столь различны, как это кажется вначале. Подтверждения структурного сходства даны в работах [Gordy (2000)], [Koyluoglu, Hickman (1998)], [Crouhy et al. (2000)].

В табл. 7.35 представлены семь характеристик, по которым осуществлено сравнение описанных ранее многомерных моделей кредитного риска. В первой части этого пункта мы сравним четыре рассмотренные выше модели по этим семи характеристикам, выделив их ключевые отличия и сходства. Вторая часть посвящена сравнительному анализу качества моделей с точки зрения точности оценивания различных характеристик кредитного риска, основанного на этих моделях.

**Таблица 7.35.** Сравнительный анализ различных многомерных моделей кредитного риска

Сравниваемые характеристики	CreditMetrics (J. P. Morgan)	CreditPortfolio-View (McKinsey)	CreditRisk+ (CSFP)	KMV (Moody's)
Корреляция кредитных событий	Многомерное нормальное распределение для цен активов	Факторный анализ корреляции остаточного риска	Предположение о независимости или учет корреляции с ожидаемой вероятностью дефолта	Многомерное нормальное распределение для цен активов
Кредитные события	Кредитная миграция	Кредитная миграция, обусловленная макроэкономическими факторами	Случайная вероятность дефолта	Расстояние до дефолта: структурная и эмпирическая задолженность
Необходимые данные	Историческая матрица переходов, кредитные спреды и кривые доходности, НВП(Д), корреляции, фактическая задолженность	Матрица переходов, макроэкономические переменные, кредитные спреды, НВП(Д), фактическая задолженность	Вероятности дефолтов и волатильность, макрофакторы, НВП(Д), фактическая задолженность	Цены активов, кредитные спреды, корреляции, фактическая задолженность
Численные методы	Моделирование или аналитический подход	Моделирование	Аналитическое решение	Аналитическое решение
Нормы восстановления	Случайные	Случайные	Постоянные	Постоянные или случайные
Определяющие риск факторы	Стоимость активов	Макроэкономические факторы	Ожидаемые вероятности дефолтов	Стоимость активов
Волатильность кредитных событий	Постоянная	Цикличная	Переменная	Переменная

### 1) Сравнение моделей по их ключевым структурным свойствам

**(а) Корреляция кредитных событий.** Структура корреляции во всех четырех моделях может быть соотнесена с систематическими связями кредитов и ключевых факторов-детерминант. Сходства детерминант корреляции кредитного риска будут рассмотрены ниже (см. п. (е)).

**(б) Кредитные события.** Если наблюдаются какие-либо изменения, связанные с кредитоспособностью, отвечающей некоторому долговому обязательству, то говорят, что произошло кредитное событие.

возникает в случае рейтинговой миграции. Тогда как в методологии KMV (Moody's) кредитное событие отвечает изменению расстояния до состояния дефолта, что влечет изменение вероятности дефолта. Хорошо известно, что изменения рейтингов отстают от изменений вероятности дефолта (см., например, [Crouhy et al. (2000)] и ссылки в этой работе). Таким образом, кредитные события возникают чаще, чем в CreditMetrics и CreditPortfolioView. Аналогичные проблемы характеризуют CreditRiskPlus, в которой кредитные события эквивалентны состоянию дефолта. Однако изменения распределения частоты дефолтов можно рассматривать как ухудшение кредитного качества.

**(в) Необходимые данные.** Рассмотренные четыре модели отличаются в том, какие данные в каждой из них используются для оценки мер кредитного риска. Переходные матрицы, оцененные по историческим данным, являются основным входным параметром для CreditMetrics и CreditPortfolioView. В отличие от этих моделей в методологии CreditRiskPlus оценка долей дефолтов строится на основе данных о дефолтах. В результате последнюю методологию можно использовать для оценки кредитных рисков розничных портфелей. В методологии Moody's KMV требуется временной ряд цен следующих ценных бумаг: безрисковой облигации, облигации актива и котировка акции актива. Нет необходимости говорить о том, что эта информация может быть доступна не для всех активов. Все модели используют величину номинальных потерь при дефолте. Наконец, в CreditMetrics и KMV требуется корреляция цен активов, в CreditPortfolioView оценивается корреляция стоимостей активов с использованием некоторых общих макроэкономических факторов риска, а в методологии CreditRiskPlus корреляции вычисляются с использованием вероятностей дефолта при заданных макроэкономических факторах.

**(г) Численные методы.** Величина оценки границы потерь или иных мер риска может различаться в зависимости от используемой модели. Например, при использовании методологии CreditMetrics ГП может быть вычислена аналитически как для отдельного кредитного займа, так и для портфелей кредитных займов. Однако этот подход перестает быть привлекательным по мере того, как число займов в портфеле растет. Как результат, для аппроксимации функции распределения убытков по большим портфелям займов используется техника симуляционного моделирования, после чего вычисляется граница потерь. Аналогично, в методологии CreditPortfolioView используются техника симуляционного моделирования для генерации макроэкономических шоков и аппроксимации функции распределения убытков по портфелю кредитных займов при заданной переходной матрице для кредитных рейтингов. В методологии CreditRisk+ делаются предположения по-

воляющие получить аналитическое выражение для плотности функции распределения убытков. В KMV-модели также можно получить аналитическое решение для плотности функции распределения убытков.

**(д) Нормы восстановления.** Функция распределения убытков и граница потерь зависят не только от вероятности дефолта, но также от ВВП(Д) и НВ. Эмпирические данные свидетельствуют о том, что ВВП(Д) и НВ весьма волатильны во времени, а это увеличивает границу потерь или другие меры риска. CreditMetrics, в контексте вычисления границы потерь, допускает возможность изменения во времени норм восстановления. В частности, предполагается, что нормы восстановления имеют бета-распределение, а граница потерь портфеля вычисляется при помощи симуляционного моделирования. В KMV-модели нормы восстановления предполагаются постоянными во времени. Однако в недавних модификациях этой модели нормы восстановления также полагаются случайными величинами, имеющими бета-распределение. В методологии CreditPortfolioView нормы восстановления моделируются из бета-распределения. Однако в методологии CreditRisk+ нормы восстановления в подпортфелях предполагаются постоянными во времени.

**(е) Определяющие риск факторы (драйверы риска).** CreditMetrics и KMV основаны на модели мертоновского типа, где суммарные активы компании и их волатильность являются ключевыми драйверами риска дефолта. В методологии CreditPortfolioView драйверами риска являются такие макроэкономические факторы, как инфляция, ВВП, кредитные спреды и т.д.). В CreditRisk+, напротив, драйверы риска — средний уровень риска дефолта и его волатильность. Если все рассмотренные четыре модели выразить в терминах многофакторных моделей, то мы увидим некоторое сходство (см. [Gordy (2000)] и ссылки в ней). В частности, изменчивость стоимости активов в CreditMetrics и KMV моделируется как величина, напрямую связанная с капитализацией. Корреляции между доходностями, построенными по ценам активов, капитализация отдельных компаний подвержена влиянию совокупности факторов систематического риска (секторальные факторы, страновые факторы и др.) и факторов несистематического риска. Систематические факторы риска вместе с их корреляциями определяют доходности активов компаний и дефолтную корреляцию между компаниями. Драйверы риска в CreditPortfolioView имеют похожие основания с тем, что мы имеем для CreditMetrics и KMV. В частности, совокупность систематических макроэкономических факторов и несистематических (или идиосинкратических) макроэкономических шоков управляет риском дефолта и корреляцией между рисками дефолтов заемщиков, принадлежащих к однородной рыночной среде. Ключевой драйвер риска

в CreditRisk+ — изменчивая средняя доля дефолтов в экономике. Эта средняя доля дефолтов может быть ассоциирована с состоянием экономики, поскольку, когда состояние экономики ухудшается, средняя доля дефолтов обычно увеличивается, растет и величина убытков. Улучшение экономических условий имеет противоположный эффект. Таким образом, драйверы риска во всех четырех рассмотренных моделях коррелируют в определенной степени с макроэкономическими факторами, описывающими меняющиеся экономические условия.

**(ж) Волатильность кредитных событий.** В рассмотренных методологиях оценки кредитного риска моделируется вероятность дефолта в течение ближайшего года. В CreditMetrics вероятность дефолта (увеличение/уменьшение кредитного рейтинга) оценивается по историческим данным. В KMV-методологии ожидаемая частота дефолтов связана с волатильностью рыночной капитализации компании. В методологии CreditPortfolioView вероятность дефолта — логистическая функция от макроэкономических факторов и шоков, имеющих нормальное распределение. По мере изменения макроэкономического положения вероятность дефолта и переходные матрицы будут меняться. В CreditRisk+ вероятность дефолта каждого отдельного займа предполагается изменчивой; число дефолтов за фиксированный интервал времени описывается пуассоновским распределением со случайным средним, имеющим гамма-распределение. В зависимости от параметров гамма-распределения можно обеспечить возможность того, что функция распределения убытков может иметь хвосты, тяжелее хвостов распределения, полученного в соответствии с методологиями CreditMetrics или CreditPortfolioView.

**Общий взгляд на сравнение структурных свойств моделей.** Международная ассоциация по свопам и деривативам (ISDA) и Международный институт финансов (IIF) опубликовали в 2000 г. результаты совместного проекта, направленного на тестирование моделей измерения кредитного риска в 25 коммерческих банках из 10 стран. Банки различались по своему размеру и специализации. В этом совместном исследовании четыре модели (CreditMetrics, CreditPortfolio View, CreditRisk+ и KMV's Portfolio Manager) сравнивались с внутренними моделями, примененными к стандартизированным портфелям, сформированным так, чтобы охватить четыре рынка: *рынок корпоративных облигаций и займов, рынок займов компаний среднего размера, рынок ипотечных обязательств и рынок розничных кредитов*. Ниже представлены наиболее важные выводы этого исследования<sup>40</sup>.

<sup>40</sup> Полный текст совместного IIF/ISDA-исследования можно приобрести по ссылке <http://www.isda.org>. Основные результаты представлены на рисунке 2.000.04



- Модели дают весьма близкие результаты, когда используются одни и те же входные данные.
- Имеющиеся расхождения возникают в результате различия во входных параметрах, технике обработки, оценки, ошибок использования моделей в процессе тестирования, а также неадекватности моделей при использовании стандартизированных параметров.
- Наиболее существенные отличия могут быть объяснены различиями в методах оценки и процедурами вычисления корреляции.
- Наиболее значимыми драйверами риска являются кредитное качество, корреляция активов и величина номинальных потерь при дефолте.
- Внутренние модели основаны на использовании скоринговых методологий, при которых агрегируются меры дефолта (но не отдельные вероятности дефолта и (или) кредитные миграции).

В работе [Crouhy et al. (2000)] сравнивается методология CreditMetrics и CreditRisk+ с KMV и внутренней моделью CIBC's (Canadian Imperial Bank of Commerce), которую называют Credit VAR1. Изучая диверсифицированный портфель, составленный из более чем 1800 облигаций, номинированных в 13 различных валютах, с широким спектром кредитного качества и сроков до погашения, авторы обнаружили, что неожиданные убытки оказываются в довольно узкой полосе возможных значений.

В работе [Gordy (2000)] показано, что все рассмотренные модели кредитного риска структурно похожи, но различия между этими моделями состоят в предположениях относительно функций распределения и функциональных форм. Например, в методологии CreditMetrics вероятности дефолта предполагаются обусловленными «уровнями отсечки», отвечающими переходным матрицам, оцененным по историческим данным, и макроэкономическими факторами. Аналогично в методологии CreditRisk+ вероятность дефолта обусловлена историческими данными по макроэкономическим факторам. Однако невозможно игнорировать влияние предположений относительно функций распределений и оценок параметров на результаты модели. В методологии CreditMetrics предполагается, что макроэкономические факторы имеют нормальное распределение, тогда как в CreditRisk+ средняя частота возникновения дефолтов за фиксированный интервал времени описывается гамма-распределением. В связи с этим в [Gordy (2000)] показано, что ограниченная форма методологии CreditMetrics дает значения

неожиданных убытков приблизительно равно значению, полученному в соответствии с методологией CreditRisk+, а волатильность  $\sigma_k$  для средней доли дефолтов за заданный интервал равна соответствующей исторической волатильности. Однако для экстремально больших значений волатильности средней доли дефолтов неожиданные убытки для этих двух моделей существенно различаются.

В работе [Koyluoglu, Nickman (1998)] впервые упоминается про важность свойств оценок параметров модели при оценивании кредитного риска. Показано, что в случае, когда оценки параметров несостоятельны, модели дают значимо разные результаты. В работе [Koyluoglu et al. (2002)] показано, что значимые различия в оценках границ потерь возникают, главным образом, в результате использования несостоятельных оценок параметров и неправильной спецификации модели. В частности, потенциальными источниками несостоятельности являются дефекты в калибровке ожидаемой доли дефолтов, норм восстановления, ВВП(Д) и корреляций активов. Например, используя одни и те же данные, в методологиях CreditMetrics и KMV получаем большие корреляции активов, чем в CreditRisk+, что обеспечивает большую величину границы потерь. Эти различия возникают как результат возникновения в CreditRisk+ тенденции переоценивать фактическую волатильность дефолтов. В работе [Koyluoglu et al. (2002)] дается рекомендация сегментировать портфель и переоценивать модели кредитного риска независимо для каждого подпортфеля. В этом случае, как показали авторы, в оценках границы потерь имеются меньшие различия между моделями, чем в случае, когда рассматривается *весь* портфель.

Авторы [Diaz, Gemmill (2001)] опираются на работу [Koyluoglu, Nickman (1998)] и несколько расширяют ее результаты. Они показали, что для портфелей с низким кредитным качеством миграционный риск играет несущественную роль, поскольку для экстремальных значений на хвостах важна только информация относительно дефолтов. Следовательно, в этом случае проблема выбора модели менее актуальна. Но следует отметить, что CreditRisk+ оказывается значительно быстрее при решении задачи вычисления *резервного капитала*. С другой стороны, если целью является оценка резервного капитала *для внутренних целей*, тогда модели, основанные на кредитных миграциях (например, CreditMetrics), обеспечивают значительно большую информацию относительно источников убытков.

**Замечание по поводу определения кредитного риска.** В разных моделях используются различные входные параметры и, соответственно, различные способы оценки кредитного риска. В так называемых *МТМ-моделях* (к которым относится CreditMetrics) допускается

выделен рейтинговый класс, отвечающий состоянию дефолта), на основании которого определяются убытки/доходы по выданным займам и рассчитываются резервы. В *DM-моделях*, к которым относятся *Credit Risk+* и *KMV*, допускается только два состояния: дефолт и недефолт. Ключевым отличием *MTM-моделей* от *DM-моделей* является включение риска кредитной миграции, или риска изменения спреда. Однако риск спреда также включает в себя риск изменения кредитных спредов для заданной рейтинговой категории. Таким образом, изменение в стоимости кредитного портфеля может быть результатом: (i) возникновения дефолтов в портфеле; (ii) изменений кредитного качества (например, рейтинговой миграции); (iii) изменений кредитных спредов, которые не вызваны изменением кредитного качества.

*MTM-модели* учитывают первые два из вышеперечисленных компонентов, влияющие на стоимость портфеля долговых обязательств, тогда как третий компонент отвечает уже рыночному риску (модель *CreditPortfolioView* может быть реализована и как *MTM-*, и как *DM-модель*).

## 2) Сравнительный анализ качества многомерных моделей, бэк-тестирование

Теперь попытаемся дать ответ на вопрос, насколько точные оценки дают эти модели. Например, в работе [Nickell et al. (2001)] впервые представлен сравнительный анализ точности оценок кредитного риска для портфелей, составленных из большого количества еврооблигаций, номинированных в долларах, с использованием методологий *CreditMetrics* и *KMV*. В этой работе показано, что обе эти методологии значительно недооценивают кредитный риск портфеля еврооблигаций.

Задача бэк-тестирования является особенно важной для оценки качества моделей кредитного риска. Поскольку обычно кредитные риски оцениваются на один год вперед, то это сильно ограничивает количество наблюдений для тестирования модели. Например, если мы рассмотрим стандартизированный подход из Базельского соглашения, то нам необходимо будет дожидаться 250 лет для того, чтобы получить столь же много наблюдений, как в стандартных процедурах бэк-тестирования для моделей рыночного риска. Однако существует способ выхода из этого затруднительного положения. Если мы не будем ограничиваться только экстремальными событиями, а рассмотрим прогнозируемую функцию распределения убытков в целом, то мы сможем изучить качество модели оценки кредитного риска с использованием наблюдений за период в пять или десять лет.

**а) Тест Берковица.** Среди многих процедур, предложенных для тестирования качества оценки функции распределения, рассмотрим

тест Берковица, который является достаточно мощным инструментом тестирования как для моделей оценки кредитного риска, так и для моделей рыночного риска (см. [Berkowitz (2001)] и [Frerichs, Löffler (2003)], где представлены некоторые свойства этого теста). Основное внимание в этом тесте уделяется качеству аппроксимации всего распределения убытков. В этом тесте дважды преобразовываются наблюдаемые убытки:

1. Заменяем  $L_t$  (фактические убытки в момент времени  $t$ ) значением прогнозируемой функции распределения убытков в точке  $L_t$ , а именно:

$$p_t = \int_{-\infty}^{L_t} \hat{f}(u) du = \hat{F}(L_t).$$

Если мы используем корректную модель оценки кредитных рисков в терминах функции распределения убытков, то временной ряд наблюдаемых вероятностей  $p_t$  должен отвечать реализации н.о.р.с.в., имеющих  $U(0, 1)$ -распределение. Это преобразование впервые было представлено в работе [Rosenblatt (1952)]. Более того, это свойство справедливо вне зависимости от функции распределения убытков портфеля долговых обязательств, и даже в условиях, когда эта функция распределения меняется во времени.

2. К сожалению, тестирование гипотезы о независимости и одинаковой распределенности случайных величин, имеющих равномерное распределение, представляется довольно громоздким в силу ограниченности области определения равномерного распределения. Используя обращение гауссовской функции распределения, преобразуем  $p_t$  в  $z_t$  следующим образом:

$$z_t = \Phi^{-1}(p_t).$$

Это простая модификация преобразования Розенблатта, и она позволяет нам использовать тесты на гауссовость.

В работе [Berkowitz (2001)] предлагается тестировать гипотезы о нулевом среднем и единичной дисперсии для  $z_t$ . Дополнительно к этому можно тестировать нормальность ( $z_t$ ), но известные нам тесты на нормальность не очень мощны в условиях, когда имеется малая выборка наблюдений.

Удобным и достаточно мощным тестом проверки сложной гипотезы о нулевом среднем и единичной дисперсии является тест отношения правдоподобия. Можно показать, что для некоторых классов моделей

тест отношения правдоподобия является равномерно наиболее мощным: т. е. тест отношения правдоподобия имеет большую мощность, чем любой другой тест. Кроме того, даже когда этот тест нельзя считать равномерно наиболее мощным, он часто имеет желаемые статистические свойства даже в условиях малых выборок (более детальное описание см. [Hogg, Craig (1965), p. 253–265]).

В общем виде тест имеет следующий вид. Предположим, существует переменная  $X_{t-1}$ , которая может помочь спрогнозировать  $z_t$ . Тогда мы можем записать:

$$z_t = \beta_0 + \beta_1' X_{t-1} + \sigma \xi_t, \quad \xi_t \sim i.i.d. N(0, 1).$$

Логарифмическая функция правдоподобия для выборки, составленной из  $T$  наблюдений, может быть записана в виде:

$$\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^T \left( \frac{(z_t - \beta_0 - \beta_1' X_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right).$$

Для получения оценок вышеуказанной линейной регрессии мы можем использовать метод наименьших квадратов:  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}^2$ . Статистика теста логарифма отношения правдоподобия имеет вид:

$$LR = -2 \left( \ln L(0, \mathbf{0}, 1) - \ln(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}^2) \right) \sim \chi_{K+2}^2,$$

где степени свободы для  $\chi^2$ -распределения зависят от числа компонент вектора  $\beta_1$  равного  $K$ . Если относительно выбора  $X_{t-1}$  нет определенности, тогда приемлемым может быть выбор лаговых значений  $z_t$  в качестве предиктора  $z_t$ . В работе [Berkowitz (2001)] показано, что если это допускает размер выборки, то в качестве предикторов можно также включать лаговые значения  $z_t^2$  и (или)  $z_t$  в степенях больших, чем 2.

Этот тест можно использовать как для измерения качества оценки рыночного риска для портфеля фондовых активов, так и для оценки качества кредитного риска для портфеля долговых обязательств. В последнем случае, при ограниченном числе наблюдений  $T$ , наилучшей практикой является тестирование гипотезы о  $\beta_0 = 0$  и  $\sigma^2 = 1$  без использования  $X_t$ . В этом случае LR-статистика будет иметь асимптотически хи-квадрат-распределение с двумя степенями свободы.

**б) Тест Берковица в условиях малых выборок.** Однако мы не можем полагаться на вышеупомянутые асимптотические свойства в условиях малых выборок. Один из способов разрешения этой проблемы — моделирование критических значений в предположении, что модель прогнозирования корректна. Если мы повторим этот процес

большое количество раз, то мы получим смоделированное распределение тестовой статистики, которое можно использовать при проверке гипотез по актуальным данным.

Таким образом, в нашем случае мы можем смоделировать  $p_t$  из равномерного распределения, взять от них обратную функцию для гауссовского распределения. Далее, вычислим статистику отношения правдоподобия. Для удобства поместим в табл. 7.36 критические значения для различных  $T$  и вероятностных уровней  $\alpha$ , полученных по функции распределения LR-статистики, построенной по смоделированным 100 000 симуляциям (см. также пример эмпирического анализа в пункте г)).

**Таблица 7.36.** Критические значения для теста Берковица в условиях малых выборок

$\alpha$	5 лет	6 лет	7 лет	8 лет	9 лет	10 лет	15 лет	20 лет	Асимптотические значения
0,1	5,68	5,44	5,31	5,19	5,12	5,08	4,90	4,83	4,61
0,05	7,39	7,11	6,91	6,77	6,68	6,63	6,39	6,27	5,99
0,01	11,26	10,85	10,53	10,39	10,26	10,20	9,77	9,70	9,21

Однако следует высказать некоторые слова предостережения. При симуляции критических значений в соответствии с представленной выше процедурой мы предполагаем, что фактическая функция распределения убытков и прогнозируемая плотность, используемые для преобразования непрерывны. Хотя это предположение, как правило, адекватно в случаях крупных банковских портфелей, составленных из тысяч кредитных займов, но оно не вполне корректно в случае небольших портфелей. В последнем случае модель при нулевой гипотезе должна отвечать предположению о дискретном распределении убытков: например, можно смоделировать  $(L_t)$  из структурной KMV-модели с заданной вероятностью дефолта и корреляцией активов. Затем воспользоваться эмпирической функцией распределения для того, чтобы вычислить  $p_t$  (первый шаг в преобразовании Берковица).

**Учет кросс-секционной информации с использованием подпортфелей.** Выше был представлен тест Берковица применительно к распределению убытков по всему портфелю долговых обязательств, что дает возможность проверить корректность некоторых предположений в среднем. Однако, модель для всего портфеля может давать агрегированный прогноз, который согласуется с фактическими данными даже в условиях, когда предположения не соответствуют какой-то отдельной части долговых обязательств в портфеле. Для одних заемщиков корреляции активов могут быть довольно большими, тогда как для других заемщиков корреляции могут быть малыми. Если эти ошибки усредняются по всему портфелю в целом, то тест вряд ли даст свидетельства о неадекватности спецификации. С другой стороны, тест для некоторых

подпортфелей обнаруживает неправильную спецификацию модели, поскольку она влечет неадекватную оценку убытков по этому подпортфелю: например, мы можем сгруппировать заемщиков в две группы одинакового размера, где подпортфель 1 включает заемщиков с большей корреляцией активов, а подпортфель 2 включает заемщиков с меньшей корреляцией активов. Затем мы вычисляем прогноз функции распределения убытков по каждому из этих подпортфелей и преобразовываем наблюдаемые убытки по подпортфелям так, как мы это делали выше.

Очевидно, что не существует универсального правила формирования подпортфелей. Хорошая стратегия формирования подпортфелей такова, что разница между спрогнозированными рисками для каждого из подпортфелей максимальна. Во многих ситуациях это легко разрешаемая задача для специалистов-практиков. Для наглядности, мы рассмотрим двумерный случай, но такая процедура может быть обобщена на  $N$ -мерный случай.

После того как мы вычислили две последовательности преобразованных убытков по каждому из подпортфелей,  $(z_{t,1})$  и  $(z_{t,2})$ , мы должны учесть тот факт, что убытки вероятнее всего коррелированы. Предположим, что совместное распределение  $(z_{t,1}, z_{t,2})$  — двумерное нормальное распределение. Тогда:

$$\begin{aligned} \ln L = & -T \ln 2\pi - T \ln \sigma_1 - T \ln \sigma_2 - \frac{T}{2} \ln(1 - \rho_{12}^2) - \frac{1}{2(1 - \rho_{12}^2)} \times \\ & \times \sum_{t=1}^T \left[ \left( \frac{z_{t,1} - \beta_{01}}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12} \left( \frac{z_{t,1} - \beta_{01}}{\sigma_1} \right) \left( \frac{z_{t,2} - \beta_{02}}{\sigma_2} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{z_{t,2} - \beta_{02}}{\sigma_2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7.64)$$

где  $\rho_{12}$  — корреляция между  $z_{t,1}$  и  $z_{t,2}$ ;  $\beta_{0i}$  и  $\sigma_i^2$  обозначают математическое ожидание и дисперсию для  $z_{t,i}$  соответственно ( $i = 1, 2$ ). Оценки максимального правдоподобия для математических ожиданий, стандартных отклонений и коэффициента корреляции представлены ниже:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{0i} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_{t,i} \quad i = 1, 2 \\ \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z_{t,i} - \hat{\beta}_{0i})^2 \quad i = 1, 2 \\ \hat{\rho}_{12} &= \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z_{t,1} - \hat{\beta}_{01})(z_{t,2} - \hat{\beta}_{02})}{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2} \end{aligned}$$





**Таблица 7.37.** Критические значения для теста Берковица в условиях малых выборок при 1%-ном уровне значимости, различных уровнях корреляции и временных горизонтов  $T$

$\rho_{12}$	5 лет	6 лет	7 лет	8 лет	9 лет	10 лет	15 лет	20 лет	Асимптотические значения
0,0	19,08	17,71	16,74	16,08	15,63	15,31	14,45	14,09	13,28
0,1	18,98	17,60	16,52	16,08	15,55	15,32	14,52	14,14	13,28
0,2	19,19	17,64	16,47	16,12	15,57	15,50	14,58	14,18	13,28
0,3	19,20	17,56	16,55	16,14	15,74	15,31	14,55	14,16	13,28
0,4	19,26	17,70	16,64	16,07	15,76	15,32	14,49	14,23	13,28
0,5	19,11	17,62	16,98	16,00	15,90	15,31	14,58	14,20	13,28
0,6	19,02	17,59	16,77	16,37	15,92	15,54	14,70	14,34	13,28
0,7	19,36	17,88	16,99	16,34	15,84	15,52	14,72	14,37	13,28
0,8	19,38	17,76	16,94	16,36	15,77	15,67	14,81	14,29	13,28
0,9	19,57	17,91	17,06	16,41	15,89	15,71	14,75	14,32	13,28

**в) Оценка мощности теста Берковица.** Мощностью теста называют вероятность того, что тест отклонит нулевую гипотезу при условии, что она ложная. Поскольку существует много неопределенности относительно того, какая практика управления кредитными рисками является правильной, проверка того, отклоняет ли тест Берковица неправильную модель, является важной задачей.

Если в банке используется модель  $M_1$ , но рассматриваются несколько других моделей в качестве возможных альтернатив, то можно использовать симуляционное моделирование для оценки вероятности того, что модель  $M_1$  отклоняется, если одна из альтернативных моделей оказывается наиболее адекватной. Процедура вычисления мощности теста состоит из следующих шагов:

- сгенерируем случайный вектор смоделированных убытков из альтернативной модели  $M_2$ ;
- используя данные из шага 1, вычислим статистику отношения правдоподобия изначально используемой модели  $M_1$ ;
- повторим шаги 1 и 2 большое количество раз;
- вычислим мощность как относительную частоту того, что статистика отношения правдоподобия оказалась значимой при заданном уровне значимости.

Отметим, что мощность увеличится, если мы будем использовать менее строгие уровни значимости (скажем, 5% вместо 1%).

Тест Берковица обеспечивает весьма гибкий инструмент и представляет собой обычно достаточно мощный тест (как это показано в работе [Ergens, Löffler (2003)]). Тем не менее этот тест можно критиковать по



```

    lr_all[rr,cc]=lr_stat;
endfor;
endifor;

// Quantile levels at different confidence levels (1-alpha)
e = 0.90, 0.95, 0.99 ;
//Compute the quantile levels and show them
qq = quantile(lr_all,e); qq;

```

Смоделированные критические значения должны быть довольно близки к значениям, представленным в табл. 7.36. Теперь мы разберем случай 2 подпортфелей при различных значениях  $\rho_{12}$  (сравните со значениями из табл. 7.37).

```

new;cls;
//Number of replications
replications=100000;
//Time dimension
tt={5,6,7,8,9,10,15,20};
//All possible rho levels
rho_all=seqa(0,0.1,10);
//Initalize vector that will contain the simulated LR statistics
qq_all=zeros(rows(rho_all),rows(tt));

for qqf(1,rows(rho_all),1);
    //True correlation matrix
    vcov=1~rho_all[qqf]
    rho_all[qqf]~1;
    //I compute the Cholesky decomposition
    c_chol=chol(vcov)';
    //Initalize vector that will contain the simulated LR statistics
    lr_all=zeros(replications,rows(tt));

    for cc(1,rows(tt),1);
        for rr(1,replications,1);
            //I compute the stacked vector of error terms, one for every
            //scenarios so that we have a 2 X T vector
            zz =c_chol*rndn(cols(vcov),tt[cc]);
            //I put them in time series format: T X 2
            zz=zz';

            //Compute sigma^2_i by unrestricted ML
            sig2i=( sqrt((tt[cc]-1)/tt[cc])*stdc(zz) )^2;
            //Compute the means by unrestricted ML
            beta0i=meanc(zz);
            //Compute the correlation by unrestricted ML
            //"corrX" gives me the full correlation matrix. I extract rho12
            rho12=corrX(zz);rho12=rho12[2,1];
            //Compute the unrestricted Log lik

```

```

- (tt[cc]/2)*ln(1-rho12^2)-1/(2*(1-rho12^2))*
*sumc( ((zz[.,1]-beta0i[1])/sig2i[1]^0.5)^2 -
- 2*rho12*((zz[.,1]-beta0i[1])/sig2i[1]^0.5).
.*( (zz[.,2]-beta0i[2])/sig2i[2]^0.5) +
+ ((zz[.,2]-beta0i[2])/sig2i[2]^0.5)^2 );
//Compute the correlation by restricted ML and the corresponding
//log-lik. See the procedure "rho_linesearch" below.
ll_res, rho12_res= rho_linesearch(tt[cc],zz[.,1],zz[.,2]);

//Compute the LR statistics
lr_stat=-2*(ll_res - ll_unres);
//I collect the computed LR
lr_all[rr,cc]=lr_stat;
endfor;

//Compute the quantile and show it
qq = quantile(lr_all,0.99);
//I collect the computed quantile
qq_all[qqf,.]=qq;save qq_all;
endfor;
endfor;
//Show quantiles for small samples;
qq_all;

//=====PROCEDURES=====
//Procedure to perform a line search for rho12 by using the restricted
//bivariate normal likelihood
proc(2)=rho_linesearch(t,z1,z2);
local rho_s,lnl,rho_max,ll_max;
//I compute a column vector of possible rho values between -0.9999 and 0.9996
rho_s=seqa(-0.9999,0.0005,4000);
//I compute the log-lik for each rho
lnl= -(t/2)*ln(1 - rho_s^2) - (1/(2*(1 - rho_s^2)))* ( sumc(z1^2)-
- 2*rho_s.*sumc(z1.*z2) +sumc( z2^2 ) );
//I extract the rho which delivers the maximized log-lik and the
corresponding log-lik
rho_max=rho_s[maxindc(lnl)];
ll_max=lnl[maxindc(lnl)];
retp(ll_max,rho_max);
endp;

```

## Выводы

**1. Управление рисками** представляет собой одну из ключевых сфер деятельности финансовых организаций и один из центральных разделов финансовой эконометрики.

В этой главе мы представили определение **когерентных мер риска** и их свойства, показав, что граница потерь (ГП или VaR) и дисперсия не являются адекватными мерами риска в случае, когда доходности имеют распределение неэллиптического типа.

Для простоты и финансовой целесообразности мы ограничились анализом изменения цены некоторого финансового актива за один шаг  $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$  (мы предпочитаем использовать  $\Delta P_t$ , а не  $P_t$ , поскольку понятие риска интуитивно ассоциируется с доходами и убытками).

**2. Согласованная (когерентная) мера риска  $\Psi(\Delta P_t)$**  определяется как мера, имеющая следующие свойства.

- *Трансляционная инвариантность*: пусть даны случайная величина  $\Delta P_t$ , безрисковая процентная ставка  $\Delta G$  и некоторая константа  $\theta_G \in \mathbb{R}$ , тогда  $\Psi(\Delta P_t + \theta_G \Delta G) = \Psi(\Delta P_t) - \theta_G$ .
- *Субаддитивность*: пусть даны изменения цен двух финансовых активов  $\Delta P_{t,1}$  и  $\Delta P_{t,2}$ , тогда имеет место неравенство:  $\Psi(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) \leq \Psi(\Delta P_{t,1}) + \Psi(\Delta P_{t,2})$ .
- *Положительная однородность*: при заданном неотрицательном  $\lambda$  справедливо следующее:  $\Psi(\lambda \Delta P_t) = \lambda \Psi(\Delta P_t)$ .
- *Монотонность*: для заданных двух изменений цен (или доходностей)  $\Delta P_{t,1}$  и  $\Delta P_{t,2}$  таких, что  $\Delta P_{t,1} \leq \Delta P_{t,2}$ , будет выполняться неравенство  $\Psi(\Delta P_{t,1}) \leq \Psi(\Delta P_{t,2})$ .
- Дисперсия не является согласованной (когерентной) мерой риска.

**3. Среднее ожидаемых потерь уровня  $\alpha$  ( $ES_\alpha$ )** представляет собой математическое ожидание всех потерь доли  $\alpha$  худших результатов для доходностей, которые мы можем получить от инвестиций.

А именно:  $ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(\Delta P_t) d\Delta P_t$ .

**4. Граница потерь уровня  $\alpha$  ( $ГП_\alpha$  или  $VaR_\alpha$ )** — это минимальные потери в доле  $\alpha$  всех худших результатов для доходностей. А именно:  $VaR_\alpha = -\int_0^1 \text{Dirac}(\Delta P_t - \alpha) F^{-1}(\Delta P_t) d\Delta P_t = -F^{-1}(\alpha)$ .

**5. Стандартные методологии для оценки рыночного риска** могут быть разделены на два семейства: *семейство аналитических методов* и *семейство имитационных методов* (см. п. 7.2.2).

**6. Аналитические методы** позволяют вычислять текущую стоимость портфеля в зависимости от текущих значений факторов риска на основании некоторой параметрической модели, в которой обуславливается воздействие изменений факторов риска на стоимость портфеля.

- *дисперсионно-ковариационный метод (ДКМ)*: идея, лежащая в основе этого метода, состоит в том, чтобы оценивать распределение доходностей (или изменений цен), линеаризируя доходность портфеля и предполагая, что факторы риска имеют нормальное распределение;
- *дельта-гамма-аппроксимации для нелинейных портфелей*: если в наш портфель включены нелинейные инструменты, такие как опционы, то предыдущий метод использовать уже нельзя. Один из возможных подходов к решению такой задачи состоит в том, чтобы измерять влияние локального изменения факторов риска на стоимость портфеля с помощью среднего производных, т.е. использовать приближения к нелинейным ценам опциона. Если использовать приближение первого порядка, то мы имеем *дельта-подход*, а если использовать приближение второго порядка, тогда мы имеем *гамма-подход*.

**7. Имитационные методы:** используются при оценивании стоимости портфеля для каждого сценария из некоторого диапазона сценариев изменений факторов риска. В зависимости от условий факторами рыночного риска могут быть курсы акций, индексы, процентные ставки, обменные курсы, цены на драгоценные металлы, цены на сырьевые товары и т.д. В результате получим ряд из стоимостей портфеля, по которому построим эмпирическую функцию распределения, используя которую можно оценивать меры риска. Среди имитационных методов выделим:

- *историческое моделирование*: идея, лежащая в основе этого метода, состоит в том, что распределение доходностей (или изменений цены) портфеля необходимо оценивать с помощью эмпирической функции распределения без использования каких-либо параметрических моделей;
- *моделирование методом Монте-Карло*: идея, лежащая в основе моделирования методом Монте-Карло, состоит в том, что распределение доходностей (или изменений цен) портфеля необходимо оценивать по некоторой явной параметрической модели. В отличие от метода вариации-ковариации в данном подходе нет необходимости представлять задачу в аналитически удобном виде;
- *модели полной оценки*: много раз моделируются будущие (гипотетические) цены базового актива и, используя модели ценообразования опционов, для каждой смоделированной цены базового актива рассчитываются цены опционов.



ка, используемые для оценки вероятности дефолта заемщика, а также многомерные модели измерения риска кредитного портфеля.

**12.** Ключевыми компонентами кредитного риска являются *вероятность дефолта (ВД), доля невозвращенных при дефолте по кредиту средств (ДНС(Д)), величина номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д))*, которая представляет собой сумму всех кредитных обязательств заемщика в случае его банкротства в результате реализации некоторого кредитного события (дефолта или миграции), *дефолтная зависимость и (или) миграционная зависимость* (см. п. 7.4.1).

**13.** Специфические для управления кредитным риском задачи: *данные*, недостаток публичной информации, касающейся кредитного качества заемщиков; *более длинные временные горизонты* прогнозирования (обычно не менее одного года). *Функции распределения убытков обычно сильно скошены*, имеют «длинный правый хвост», что указывает на частые малые убытки и редкие большие убытки. *Моделирование зависимости в кредитном портфеле более важно, чем при управлении рыночным риском*, поскольку на хвост функции распределения убытка сильно влияет спецификация зависимости между дефолтами.

**14.** Одномерные модели кредитного риска (см. п. 7.4.4):

- *экспертный подход*. Решение о том, выдавать или не выдавать кредит, выносится локальным или отраслевым инспектором по кредитам, локальным или отраслевым менеджером по связям с клиентами. Он может учитывать разные факторы риска, но обычно концентрирует внимание на следующих пяти: характер, капитал, способность погашать задолженность, обеспечение, экономические условия (циклы);
- *системы кредитного скоринга*. Основной принцип функционирования этой системы заключается в идентификации ключевых факторов, определяющих вероятность дефолта, и путем их комбинированного взвешивания получение количественной оценки действия совокупности этих факторов. Эта количественная оценка может быть использована в системе классификации. В некоторых случаях полученная количественная оценка может быть буквально истолкована как вероятность дефолта. Существуют четыре методологические формы многомерных моделей кредитного скоринга: (1) линейная модель вероятности, (2) логит-модель, (3) пробит-модель и (4) модели, полученные на основе дискриминантного анализа;
- *модели панельных данных*, которые сочетают в себе данные как



- *внешние и внутренние рейтинговые системы*, где системы построения кредитных рейтингов основаны, как правило, на качественных и количественных оценках. Рейтинг представляет собой категорию, которая описывает правдоподобность дефолта, но при его использовании всегда надо иметь в виду, что может быть выбран другой критерий присвоения того или иного рейтинга;
- *одномерные структурные модели*. При помощи моделей мертоновского типа (или структурных моделей) оцениваются ценные бумаги, выпущенные той или иной компанией. Эти модели основаны на использовании структурных переменных компании (т. е. на значениях, отражающих состояние активов и пассивов компании).

Сравнительно недавно предложен алгоритм оценки вероятности нулевой цены (ВНЦ), который представляет собой подход, использующий только цены активов. ВНЦ-алгоритм допускает возможность моделирования распределения доходностей цены при помощи распределения, отличного от нормального. В нем не используются данные из балансовых отчетов, которые могут дать неправильные ориентиры и которые могут не отвечать фактическому финансовому положению компании.

**15.** Важными инструментами оценки эффективности модели прогнозирования вероятностей являются таблица «факт–прогноз» и кривая соотношений правильной и ложной классификации объектов (так называемая *оперативная кривая (ОК)*), см. п. 7.4.5. При условии, что нам задана таблица «факт–прогноз» и пороговое значение (для отнесения к тому или иному классу), оперативная кривая строится на основе совместных частот правильных прогнозов и фактических событий, совместных частот неправильных прогнозов и фактических событий, а именно:

- *чувствительность*:  $a/(a + b)$  доля случаев, в которых спрогнозирована неплатежеспособность компании, при условии, что в действительности компания была неплатежеспособной;
- *специфичность*:  $d/(d + c)$  доля случаев, в которых спрогнозирована платежеспособность компании, при условии, что в действительности она и была платежеспособной;
- *ложная позитивность*:  $c/(c + d)$  или *1-специфичность*, доля случаев, в которых спрогнозирована неплатежеспособность компании, при условии, что компания была платежеспособной (ошибка

- *ложная негативность*:  $b/(a + b)$  или *1-чувствительность*, доля случаев, в которых спрогнозирована платежеспособность компании, при условии, что компания была неплатежеспособной (ошибка I рода).

ОК строится следующим образом: каждому фиксированному пороговому значению ставится в соответствие точка на декартовой плоскости, на которой ось  $x$  отвечает значениям ложной позитивности (или 1-специфичности), также называемой нормой ложной тревоги, а ось  $y$  отвечает значениям чувствительности, также называемой нормой попадания. Следовательно, каждая точка на этой кривой будет отвечать некоторому фиксированному пороговому значению. А значит, ОК может быть использована для выбора порогового значения, балансирующего чувствительность и специфичность. В терминах сравнения моделей, наилучшей из двух кривых признаем ту, которая расположена левее (в идеальном случае эта кривая совпадает с осью  $y$ ).

**16. В модели Мертона** (см. п. 7.4.7) предполагается, что стоимость активов  $V_t$  хорошо описывается броуновским движением, а компания финансируется из своего собственного капитала  $S$  и своих долговых обязательств номиналом  $B$  со сроком погашения в момент времени  $T$  (могут быть в форме, например, облигаций или банковских кредитов). Кредит, выданный какой-либо компании, создает для кредитора кредитный риск, а именно риск того, что стоимость активов компании в момент времени  $T$  упадет ниже уровня  $B$ , т. е.  $V_T \leq B$ . В этом случае мы говорим, что фирма находится в состоянии дефолта.

**17. Алгоритм оценивания ВНЦ** (см. п. 7.4.8) позволяет вычислить вероятность дефолта и состоит из следующих шагов: 1) рассматривается условная модель для разностей в уровнях цен  $X_t = P_t - P_{t-1}$ , (без логарифмического преобразования), при условии, что мы располагаем всей информацией  $\mathcal{F}_t$  до момента времени  $t$ ; 2) моделируется большое число  $N$  траекторий цен до момента времени  $(t + T)$  с использованием оцененной на первом шаге модели временных рядов; 3) оценивается вероятность дефолта как отношение  $n/N$ , где  $n$  – количество смоделированных траекторий из  $N$ , которые касаются или пересекают барьер нулевой цены.

**18. Существуют четыре основных типа многомерных моделей кредитных портфелей:**

- *модели кредитной миграции*: подход CreditMetrics, предложенный J.P. Morgan в 1997 г., основан на анализе кредитной миграции, т. е. вероятности перемещения из одного рейтингового класса в другой, включая дефолт, являющийся поглощающим состоянием)

за заданный период времени, который обычно берется равным одному году. В подходе CreditMetrics оценивается функция распределения на один год вперед для стоимости кредитного портфеля, которая меняется в результате кредитной миграции. Этот подход предполагает, что матрица переходов, оцененная по историческим данным нескольких тысяч рейтингуемых облигаций, достаточно точно описывает вероятность миграции из одного рейтингового класса в другой (см. п. 7.4.15);

- *структурные модели* (см. п. 7.4.16). Прародителем большинства из этих моделей является модель Мертона, которая постулирует механизм дефолта с точки зрения его связи со стоимостью активов компании и ее обязательств. Наиболее известная в этом классе KMV-модель, которая строится на основе так называемой ожидаемой частоты дефолтов для каждого эмитента, а не на основе средних частот переходов, построенных по историческим данным, как это делается в модели CreditMetrics;
- *актуарные модели*. CreditRisk+-модель основана на результатах актуарной науки (см. п. 7.4.17). В этом подходе уделяется основное внимание описанию вероятности дефолта, а не кредитной миграции. Кроме того, в отличие от KMV- и CreditMetrics-подходов в CreditRisk+ игнорируются причины дефолта. Однако это единственный подход, в котором можно получить решения в аналитическом виде, а не с помощью методов стохастического моделирования, что позволяет значительно уменьшить объем необходимых вычислительных ресурсов;
- *макроэкономические модели*. CreditPortfolioView (см. п. 7.4.18) представляет собой улучшенный подход кредитной миграции путем допущения того, что вероятности миграций могут меняться в зависимости от кредитных циклов. В этом подходе вероятности дефолтов являются функциями макропеременных, таких как безработица, уровень процентных ставок и др., которые предполагаются факторами, определяющими кредитные циклы.

**19. Тест Берковица** (см. п. 7.4.19) представляет собой мощный инструмент тестирования как моделей кредитного риска, так и моделей рыночного риска. Он дает надежные результаты и в условиях малых выборок и состоит из трех шагов: 1) наблюдаемые в момент времени  $t$  убытки, сумма которых равна  $L_t$ , заменяется на вероятность наблюдения этих или меньших убытков; для расчета этой вероятности используется прогнозируемая на момент времени  $t$  плотность распределения суммарных убытков на этот момент времени. Т.е. оценивается

кумулятивная функция распределения в точке суммарного убытка на момент времени  $t$ , а именно:  $p_t = \hat{F}(L_t)$ . Если используется корректная модель риска для прогнозирования распределения суммарного убытка, то временной ряд наблюдаемых  $p_t$  должен представлять реализацию н.о.р.с.в, имеющих равномерное распределение на отрезке  $[0; 1]$ ; 2) временной ряд  $p_t$  преобразуется в ряд  $z_t = \Phi^{-1}(p_t)$ ; 3) с помощью теста отношения правдоподобия тестируются ограничения, состоящие в том, что  $z_t$  имеет условное нулевое среднее и единичную дисперсию.

**20.** В главе представлена также методология количественного анализа **операционного риска** (п. 7.3), который является относительно недавней областью изучения, возникшей в рамках количественного управления рисками. Проблема изучения операционного риска возникла в момент, когда было обнаружено, что ни управление рыночным риском, ни управление кредитным риском не позволяет хеджировать все возможные события, влияющие на экономические и финансовые результаты работы финансовых организаций. Изложение в главе начинается с базовых подходов, используемых для оценки операционного риска и резервного капитала под этот риск в банках и финансовых организациях с небольшой капитализацией, а завершается описанием сравнительно недавно предложенных моделей канонической агрегации, основанных на понятии копула-функций и байесовских методах, используемых в финансовых организациях с большой капитализацией, где операционным риском, как правило, занимается специально отведенное подразделение.

**21.** В Базель II-соглашении введено понятие операционного риска как нового класса риска, под который финансовые учреждения обязаны отложить резервный капитал. Базель II определяет операционный риск следующим образом: *«Операционный риск определяется как риск убытков в результате неадекватной или ошибочной работы процессов, персонала, систем или в результате внешних воздействий. Это определение включает юридический риск, но исключает стратегический и репутационный риск»*. В Базель II-соглашении для классификации всех возможных источников операционного риска было определено восемь бизнес-направлений (БН) и семь типов событий (ТС).

**22. Подход распределения убытков** (см. п. 7.3.5) позволяет, используя внутренние данные, рассчитать для каждой комбинации БН/ТС вероятностное распределение частоты возникновения убытков, так же как и ее влияние (степень влияния) на определенном промежутке времени. Сворачивая функцию распределения частоты с функцией распределения величины убытка, аналитически или численно можно получить вероятностное распределение суммарного убытка. Итоговая величина резервного капитала будет равна процентной точке этого рас-

пределения. Данный подход использует два типа распределений: один тип распределений описывает *частоту возникновения рисков* ситуаций, а другой описывает функцию распределения *величины убытка*, возникающего для каждой рассматриваемой рискованной ситуации. Частота возникновения убытков за некоторый временной период моделируется при помощи пуассоновского или отрицательного биномиального распределения. Для моделирования величины убытка можно использовать экспоненциальное распределение, Парето-распределение, гамма-распределение или обобщенное Парето-распределение, полученное из теории экстремальных значений. Если у нас есть функция распределения суммарного операционного убытка для любого пересечения между бизнес-направлениями (БН) и типами событий (ТС), то по ней можно оценить такие меры риска, как граница потерь (ГП), среднее ожидаемых потерь (СОП), и на основании этих оценок определить величину резервного капитала для этого пересечения на следующий период. После того как оценены ГП для каждого пересечения БН/ТС, рассчитывается граница потерь для всей совокупности операционных рисков (совокупная граница потерь), которая обычно вычисляется как сумма ГП всех пересечений БН/ТС, а тем самым предполагается, что суммарные убытки  $S_{it}$  комонотонны.

**23. Каноническая агрегация при помощи копула-функций** (п. 7.3.6). В этом подходе для описания структуры зависимости между суммарными убытками  $S_i$  используются копула-функции. Отметим, что их использование приводит к объективно оправданному уменьшению величины полной ГП. Каноническая агрегация при помощи копула-функций предполагает агрегацию убытков за какой-то временной период, после чего оценивается зависимость этих суммарных убытков.

Написание на заказ студенческих и аспирантских работ  
<http://учебники.информ2000.ru/> <https://право.информ2000.ru/>

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ МЕЖСТРАНОВОГО И МЕЖРЕГИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА КЖН

## П1.1. Исходные данные и результаты межстранового анализа

№ пп	Страна	Частные критерии									
		$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$	$x^{(7)}$	$x^{(8)}$	$x^{(9)}$	$x^{(10)}$
1	Австралия	34935	17,36	25063	1	7,00	4,4	82	6	521,6	2,09
2	Австрия	37913	39,24	26229	1	4,40	3,2	80	4	225,5	2,56
3	Аргентина	13775	44,71	4662	2,4	17,87	8,1	75	17	698,6	0,51
4	Бельгия	35183	48,08	25260	1	4,87	4,5	79	5	293	1,87
5	Болгария	11923	12,06	4423	1,7	4,40	12,3	73	12	1501,8	0,48
6	Бразилия	10041	11,01	4983	9,5	21,82	5,6	72	20	305,1	1,1
7	Великобритания	35347	39,08	28011	1	7,21	3,7	79	6	220,4	1,76
8	Венгрия	18868	25,31	10066	1,1	3,84	6,1	73	7	498,9	0,97
9	Венесуэла	12197	14,40	7142	7	15,79	30,6	74	21	808,6	0,23
10	Германия	34907	41,26	25009	1	4,34	2,6	80	5	282,8	2,53
11	Гон-Конг	43040	36,13	18702	1,7	14,72	4,3	82,3	2	220,7	0,81
12	Греция	29280	39,93	22580	2,9	6,19	4,2	80	4	351,4	0,57
13	Дания	35677	39,51	30495	1	4,31	3,4	79	4	201,4	2,55
14	Израиль	26642	35,78	15613	2,9	7,88	4,6	81	5	435,6	4,68
15	Индонезия	3888	4,09	1362	8,6	5,15	10,3	68	34	923,3	0,35
16	Иордания	5088	11,65	2777	6,9	6,91	14,9	71	25	1233,2	0,75
17	Ирландия	42993	49,63	30262	1	5,68	4,2	80	4	201,9	1,31
18	Испания	31053	38,62	19865	2,6	6,00	4,1	81	4	265,8	1,2
19	Италия	30057	41,47	22776	1,1	6,46	3,3	81	4	240,4	1,13
20	Казахстан	11000	10,96	3575	1	4,67	17	64	29	2244,7	0,28
21	Канада	35669	37,33	25161	1	5,54	2,4	81	6	421,4	1,89
22	Катар	54779	33,86	12206	9,8	7,16	15,1	77	11	698,8	0,31
23	КНР	5825	4,70	928	8,4	12,07	5,9	73	24	2109,4	1,49
24	Колумбия	8716	9,59	3440	6,4	25,08	7	74	21	365,3	0,16
25	Литва	18266	21,91	9300	1	6,35	11,1	71	9	454,4	0,82
26	Люксембург	79379	59,45	36014	1	4,63	3,4	80	4	263,3	1,63
27	Малайзия	13538	16,51	3613	8,1	12,34	5,4	72	12	984,8	0,57
28	Мексика	13986	14,37	6613	7,6	12,81	5,2	74	35	437,3	0,46
29	Нидерланды	39215	45,74	24429	1	5,09	2,5	80	5	263,2	1,7
30	Новая Зеландия	26985	29,50	16922	1	6,84	4	80	6	348,5	1,18
31	Норвегия	53481	57,23	36689	1	3,88	3,8	80	4	109,3	1,57
32	Перу	8374	7,36	2834	9,5	15,32	7,3	73	25	302,6	0,15

## П1.1 (окончание)

33	Польша	16747	21,39	8348	1	5,63	4,2	75	7	895,8	0,56
34	Португалия	22781	25,84	15273	5,1	7,91	2,6	79	4	288,7	1,18
35	Россия	15524	17,95	5780	1	8,65	14,1	66	13	1604,2	1,12
36	Румыния	13271	15,90	6100	2,4	4,84	7,9	73	16	771,7	0,53
37	Сингапур	47646	36,36	15416	5,6	9,80	6,5	80	3	309,9	2,27
38	Словакия	21302	25,57	9917	1	3,95	4,6	74	8	670,1	0,46
39	Словения	27941	31,39	13879	1	4,14	5,7	78	4	405,8	1,53
40	США	45017	47,78	32564	1	8,48	3,8	78	8	432,3	2,67
41	Таиланд	8013	6,76	2251	5,9	7,78	5,4	72	8	1049,7	0,2
42	Тайвань	30254	29,70	10462	2,4	6,03	3,5	77,9	7	740	2,62
43	Турция	13526	21,06	7161	11,3	7,28	10,4	73	26	452,3	0,58
44	Украина	7075	8,69	2353	1	4,08	25,3	67	24	2879,6	0,85
45	Филиппины	3400	4,22	1287	6,6	11,00	9,3	68	32	565,7	0,1
46	Финляндия	34750	43,12	26437	1	3,82	3,8	79	3	318,8	3,47
47	Франция	33693	50,14	25738	1	5,58	3,3	81	5	166,5	2,08
48	Хорватия	16760	20,90	9433	1,3	4,77	6,1	76	6	422	0,81
49	Чехия	24688	27,44	10179	1	3,49	6,3	77	4	850	1,54
50	Чили	14176	16,26	5992	3,5	15,79	8,7	78	9	410,3	0,68
51	Швейцария	41068	36,59	37219	1	5,43	2,5	82	5	113,5	2,9
52	Швеция	36180	40,48	24068	1	4,02	3,4	81	4	122,8	3,64
53	Эстония	19638	21,82	9482	1	5,53	10,4	73	6	920,5	1,14
54	Южная Африка	9887	17,32	3443	12	17,77	10,6	51	69	1326,1	0,92
55	Южная Корея	25268	25,33	10142	2	4,75	4,7	79	5	500,6	3,01
56	Япония	33403	37,28	21747	1	3,37	1,4	83	4	278,2	3,4

## П1.2. Унифицированные исходные статистические данные

NN пп (i)	Страны	Унифицированные значения частных критериев										$y_i$
		$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$	$x^{(7)}$	$x^{(8)}$	$x^{(9)}$	$x^{(10)}$	
1	Австралия	6,00	6,35	6,65	10,00	8,52	8,30	9,57	8,86	8,12	9,12	9,28
2	Австрия	6,56	7,34	6,97	10,00	9,55	8,98	8,70	9,43	9,47	8,91	9,64
3	Аргентина	1,97	2,40	8,97	8,73	0,47	6,19	6,52	5,71	7,31	2,48	4,58
4	Бельгия	6,04	7,95	6,70	10,00	9,90	8,24	8,26	9,14	9,16	8,19	8,71
5	Болгария	1,62	1,44	0,96	9,36	9,56	3,81	5,65	7,14	3,64	2,35	3,53
6	Бразилия	1,26	1,25	1,12	2,27	0,30	7,61	5,22	4,86	9,11	4,96	4,79
7	Великобритания	6,07	6,32	7,46	10,00	8,36	8,69	8,26	8,86	9,49	7,73	7,16
8	Венгрия	2,94	3,83	2,52	9,91	9,14	7,33	5,65	8,57	8,22	4,41	5,25
9	Венесуэла	1,67	1,86	1,71	4,55	2,01	0,00	6,09	4,57	6,81	1,30	2,44
10	Германия	5,99	6,71	6,64	10,00	9,51	9,32	8,70	9,14	9,21	9,03	8,89

П1.2 (продолжение)

11	Гон-Конг	7,54	5,79	4,90	7,27	2,80	8,35	9,70	10,00	9,49	3,74	6,59
12	Греция	4,92	6,47	5,97	8,27	9,12	8,41	8,70	9,43	8,89	2,73	6,18
13	Дания	6,14	6,40	8,15	10,00	9,49	8,86	8,26	9,43	9,58	8,95	8,98
14	Израиль	4,42	5,72	4,05	8,27	7,87	8,18	9,13	9,14	8,51	0,00	6,91
15	Индонезия	0,09	0,00	0,12	3,09	9,89	4,94	3,48	0,86	6,28	1,81	4,26
16	Иордания	0,32	1,37	0,51	4,64	8,58	2,33	4,78	3,43	4,87	3,49	5,66
17	Ирландия	7,53	8,23	8,08	10,00	9,50	8,41	8,70	9,43	9,58	5,84	8,39
18	Испания	5,26	6,24	5,22	8,55	9,26	8,47	9,13	9,43	9,29	5,38	7,71
19	Италия	5,07	6,75	6,02	9,91	8,92	8,92	9,13	9,43	9,40	5,08	6,86
20	Казахстан	1,44	1,24	0,73	10,00	9,76	1,14	1,74	2,29	0,25	1,51	4,45
21	Канада	6,13	6,00	6,68	10,00	9,60	9,43	9,13	8,86	8,58	8,28	9,27
22	Катар	9,77	5,38	3,11	2,00	8,40	2,22	7,39	7,43	7,31	1,64	8,13
23	КНР	0,46	0,11	0,00	3,27	4,76	7,44	5,65	3,71	0,87	6,60	4,72
24	Колумбия	1,01	0,99	0,69	5,09	0,00	6,82	6,09	4,57	8,83	1,01	4,82
25	Литва	2,83	3,22	2,31	10,00	9,00	4,49	4,78	8,00	8,42	3,78	5,22
26	Люксембург	10,00	10,00	9,67	10,00	9,73	8,86	8,70	9,43	9,30	7,18	9,21
27	Малайзия	1,93	2,24	0,74	3,55	4,56	7,73	5,22	7,14	6,00	2,73	7,43
28	Мексика	2,01	1,86	1,57	4,00	4,21	7,84	6,09	0,57	8,50	2,27	4,63
29	Нидерланды	6,81	7,52	6,48	10,00	9,93	9,38	8,70	9,14	9,30	7,48	8,91
30	Новая Зеландия	4,48	4,59	4,41	10,00	8,63	8,52	8,70	8,86	8,91	5,29	8,91
31	Норвегия	9,52	9,60	9,85	10,00	9,17	8,64	8,70	9,43	10,00	6,93	9,16
32	Перу	0,95	0,59	0,53	2,27	2,35	6,65	5,65	3,43	9,12	0,97	4,33
33	Польша	2,54	3,13	2,04	10,00	9,54	8,41	6,52	8,57	6,41	2,69	4,26
34	Португалия	3,68	3,93	3,95	6,27	7,84	9,32	8,26	9,43	9,18	5,29	6,12
35	Россия	2,30	2,50	1,34	10,00	7,30	2,78	2,61	6,86	3,18	5,04	2,89
36	Румыния	1,88	2,13	1,43	8,73	9,88	6,31	5,65	6,00	6,98	2,56	2,68
37	Сингапур	8,41	5,83	3,99	5,82	6,44	7,10	8,70	9,71	9,08	9,87	8,89
38	Словакия	3,40	3,88	2,48	10,00	9,23	8,18	6,09	8,29	7,44	2,27	6,30
39	Словения	4,67	4,93	3,57	10,00	9,37	7,56	7,83	9,43	8,65	6,76	6,81
40	США	7,91	7,89	8,72	10,00	7,42	8,64	7,83	8,29	8,53	8,45	8,53
41	Таиланд	0,88	0,48	0,36	5,55	7,94	7,73	5,22	8,29	5,71	1,18	5,93
42	Тайвань	5,11	4,63	2,63	8,73	9,24	8,81	7,78	8,57	7,12	8,66	5,84
43	Турция	1,93	3,07	1,72	0,64	8,31	4,89	5,65	3,14	8,43	2,77	5,00
44	Украина	0,70	0,83	0,39	10,00	9,32	1,14	3,04	3,71	0,00	3,91	2,73
45	Филиппины	0,00	0,02	0,10	4,91	5,56	5,51	3,48	1,43	7,92	0,76	4,81
46	Финляндия	5,96	7,05	7,03	10,00	9,13	8,64	8,26	9,71	9,04	5,08	8,12
47	Франция	5,76	8,32	6,84	10,00	9,57	8,92	9,13	9,14	9,74	9,08	8,17
48	Хорватия	2,54	3,04	2,34	9,73	9,83	7,33	6,96	8,86	8,57	3,74	5,58
49	Чехия	4,05	4,22	2,55	10,00	8,88	7,22	7,39	9,43	6,62	6,81	7,59
50	Чили	2,05	2,20	1,40	7,73	2,01	5,85	7,83	8,00	8,63	3,19	6,68
51	Швейцария	7,16	5,87	10,00	10,00	9,68	9,38	9,57	9,14	9,98	9,97	9,97



## П1.2 (окончание)

52	Швеция	6,23	6,57	6,38	10,00	9,28	8,86	9,13	9,43	9,94	4,37	9,08
53	Эстония	3,09	3,20	2,36	10,00	9,60	4,89	5,65	8,86	6,30	5,13	6,20
54	Южная Африка	1,23	2,39	0,69	0,00	0,54	4,77	0,00	0,00	4,45	4,20	5,08
55	Южная Корея	4,16	3,84	2,54	9,09	9,81	8,13	8,26	9,14	8,21	7,02	6,18
56	Япония	5,70	6,00	5,74	10,00	8,79	10,00	10,00	9,43	9,23	5,38	6,90

## П1.3. Результаты построения ИИ КЖН и ранжирования стран по данным [WCU (2009)]

NN пп (i)	Страна	Значения ИИ КЖ			Ранги стран по КЖ		
		$\hat{y}_i$ (б.о)	$y_{i_s}$	$\hat{y}_i$ (об)	по $\hat{y}_i$ (б.о)	по $y_{i_s}$	по $\hat{y}_i$ (об)
1	Австралия	8,023	9,28	9,29	13	3	3
2	Австрия	8,451	9,64	8,88	6	2	8
3	Аргентина	5,134	4,58	6,13	37	47	27
4	Бельгия	8,234	8,71	8,28	11	13	12
5	Болгария	4,320	3,53	2,48	40	52	45
6	Бразилия	3,507	4,79	3,27	45	44	38
7	Великобритания	8,006	7,16	8,41	14	22	11
8	Венгрия	5,973	5,25	3,85	30	38	35
9	Венесуэла	2,967	2,44	2,61	51	56	44
10	Германия	8,252	8,89	8,80	10	11	9
11	Гон-Конг	6,934	6,59	6,68	24	28	21
12	Греция	7,151	6,18	6,19	21	31	26
13	Дания	8,399	8,98	9,13	7	8	5
14	Израиль	6,362	6,91	4,65	29	23	30
15	Индонезия	2,567	4,26	0,79	54	50	53
16	Иордания	3,117	5,66	2,26	49	36	47
17	Ирландия	8,479	8,39	8,18	5	15	13
18	Испания	7,427	7,71	7,11	19	19	20
19	Италия	7,700	6,86	7,32	18	25	17
20	Казахстан	2,852	4,45	0,00	53	48	56
21	Канада	8,094	9,27	8,76	12	4	10
22	Катар	5,432	8,13	3,97	36	17	34
23	КНР	3,015	4,72	3,68	50	45	36
24	Куба	3,243	4,82	2,10	47	46	49

П1.3 (окончание)

25	Литва	5,433	5,22	3,07	35	39	40
26	Люксембург	9,339	9,21	9,30	1	5	2
27	Малайзия	3,945	7,43	2,30	43	21	46
28	Мексика	3,503	4,63	2,91	46	46	42
29	Нидерланды	8,320	8,91	8,16	9	9	14
30	Новая Зеландия	6,998	8,91	6,53	23	9	23
31	Норвегия	9,227	9,16	9,28	2	6	4
32	Перу	2,893	4,33	1,79	52	49	50
33	Польша	5,692	4,26	3,49	34	50	37
34	Португалия	6,443	6,12	6,12	28	33	28
35	Россия	4,287	2,89	2,01	41	53	49
36	Румыния	4,795	2,68	2,74	38	55	43
37	Сингапур	7,377	8,89	8,07	20	11	15
38	Словакия	5,859	6,3	3,27	32	29	39
39	Словения	7,034	6,81	6,29	22	26	24
40	США	8,378	8,53	8,94	8	14	7
41	Таиланд	3,993	5,93	1,57	42	34	51
42	Тайвань	6,853	5,84	6,60	25	35	22
43	Турция	3,690	5	2,93	44	41	41
44	Украина	3,132	2,73	1,45	48	54	52
45	Филиппины	2,542	4,81	0,39	55	43	54
46	Финляндия	7,896	8,12	7,25	15	18	18
47	Франция	8,499	8,17	9,12	4	16	6
48	Хорватия	5,960	5,58	4,22	31	37	31
49	Чехия	6,494	7,59	5,67	27	20	29
50	Чили	4,686	6,68	4,11	39	27	32
51	Швейцария	8,726	9,71	10,00	3	1	1
52	Швеция	7,862	9,08	7,19	16	7	19
53	Эстония	5,694	6,2	4,05	33	30	33
54	Южная Африка	1,680	5,08	0,06	56	40	55
55	Южная Корея	6,700	6,18	6,21	26	31	25
56	Япония	7,828	6,9	7,78	17	24	16

ВЕКТОР  $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3)$  коэффициентов модели множественной регрессии

**2,4177 0,228339 0,308022 0,216314**

Коэффициенты ранговой корреляции: соответственно, между ранжировками по  $y_s$  и по  $\hat{y}$ (об) и между ранжировками по  $y_s$  и по  $\hat{y}$ (б.о).

**0,8545 0,8517**

**П1.2. Результаты межрегионального анализа СЛК КЖН****П1.2.1. Блочные и сводный ИИ по каждой из четырех синтетических категорий КЖН****П1.2.1а. Качество населения**

NN пп (i)	Регион	Блочный ИИ (его вес)			Рассто- яние до эта- лона	$y_i^{(1)}$ сводный ИИ «Ка- чества населе- ния»	Ранг регио- на по КН
		$y_i^{(1)}$ (1) (0,409)	$y_i^{(1)}$ (2) (0,407)	$y_i^{(1)}$ (3) (0,184)			
1	Респ. Карелия	3,41	2,66	2,56	7,063	2,94	70
2	Респ. Коми	3,65	7,33	1,48	5,725	4,28	46
3	Архангельская обл.	4,04	4,70	2,12	6,112	3,89	51
4	Вологодская обл.	3,41	2,31	2,07	7,304	2,70	71
5	Мурманская обл.	6,67	7,96	2,68	4,013	5,99	19
6	г. Санкт-Петербург	7,83	1,75	9,71	5,443	4,56	40
7	Ленинградская обл.	3,12	1,27	1,86	7,912	2,09	75
8	Новгородская обл.	2,06	0,61	3,61	8,314	1,69	77
9	Псковская обл.	2,03	0,89	2,22	8,420	1,58	78
10	Брянская обл.	5,35	2,48	4,18	6,168	3,83	53
11	Владимирская обл.	4,96	1,53	6,22	6,497	3,50	59
12	Ивановская обл.	3,28	1,76	5,66	7,040	2,96	69
13	Калужская обл.	5,36	2,25	4,45	6,235	3,77	56
14	Костромская обл.	3,71	1,76	1,46	7,566	2,43	73
15	г. Москва	8,78	2,49	10,00	4,854	5,15	29
16	Московская обл.	5,90	2,51	8,46	5,486	4,51	41
17	Орловская обл.	5,71	2,46	8,09	5,596	4,40	43
18	Рязанская обл.	4,47	1,19	6,57	6,801	3,20	65
19	Смоленская обл.	3,48	1,60	3,67	7,312	2,69	72
20	Тверская обл.	2,14	1,45	2,94	8,009	1,99	76

П1.2.1а (продолжение)

21	Тульская обл.	3,42	1,06	2,11	7,854	2,15	74
22	Ярославская обл.	3,89	2,01	4,71	6,813	3,19	66
23	Респ. Марий Эл	4,48	5,77	6,84	4,645	5,35	27
24	Респ. Мордовия	7,62	3,23	8,18	4,642	5,36	26
25	Чувашская Респ.	5,40	7,14	6,56	3,766	6,23	15
26	Кировская обл.	4,06	3,50	4,28	6,138	3,86	52
27	Нижегородская обл.	4,67	1,50	6,23	6,607	3,39	61
28	Белгородская обл.	8,97	3,77	5,22	4,516	5,48	25
29	Воронежская обл.	8,00	3,81	8,75	4,187	5,81	22
30	Курская обл.	6,15	2,51	7,38	5,491	4,51	42
31	Липецкая обл.	7,30	2,94	3,36	5,600	4,40	44
32	Тамбовская обл.	5,52	1,35	3,73	6,772	3,23	63
33	Респ. Калмыкия	6,58	8,57	6,99	2,702	7,30	2
34	Респ. Татарстан	8,11	6,65	6,70	2,834	7,17	5
35	Астраханская обл.	6,35	6,55	5,09	3,837	6,16	17
36	Волгоградская обл.	6,21	3,74	5,65	5,029	4,97	33
37	Пензенская обл.	5,90	4,03	6,01	4,929	5,07	31
38	Самарская обл.	6,97	5,57	8,44	3,492	6,51	10
39	Саратовская обл.	6,60	4,87	7,77	4,044	5,96	20
40	Ульяновская обл.	6,08	3,42	5,06	5,328	4,67	38
41	Респ. Адыгея	7,51	5,03	6,58	3,841	6,16	18
42	Респ. Дагестан	8,30	8,86	1,70	3,793	6,21	16
43	Кабардино-Балкарская Респ.	7,55	8,81	4,98	2,769	7,23	3
44	Карачаево-Черкесская Респ.	7,91	6,98	5,02	3,170	6,83	6
45	Респ. Сев.Осетия — Алания	7,69	7,30	6,58	2,701	7,30	1
46	Краснодарский край	7,57	5,07	3,57	4,461	5,54	24
47	Ставропольский край	7,94	5,28	6,03	3,700	7,30	13
48	Ростовская обл.	7,22	3,85	7,78	4,412	5,59	23

## П1.2.1а (окончание)

49	Респ. Башкортостан	7,51	7,61	3,74	3,473	6,53	8
50	Удмуртская Респ.	3,69	7,19	5,29	4,854	5,15	30
51	Курганская обл.	3,52	5,28	1,79	6,215	3,88	55
52	Оренбургская обл.	5,63	4,82	3,67	5,113	4,89	36
53	Пермская обл.	2,44	4,54	2,02	6,876	3,12	68
54	Свердловская обл.	4,13	4,36	4,98	5,627	4,37	45
55	Челябинская обл.	4,72	5,02	6,71	4,848	5,15	28
56	Респ. Алтай	1,93	6,74	5,64	5,873	4,13	48
57	Алтайский край	6,02	4,80	3,79	4,958	5,04	32
58	Кемеровская обл.	2,32	4,77	3,22	6,611	3,39	62
59	Новосибирская обл.	6,20	5,65	8,81	3,722	6,28	14
60	Омская обл.	6,32	5,44	5,76	4,159	5,84	21
61	Томская обл.	5,46	7,01	9,44	3,483	6,52	9
62	Тюменская обл.	7,83	9,17	4,39	2,830	7,17	4
63	Респ. Бурятия	2,42	7,34	3,15	5,916	4,08	49
64	Респ. Тыва	0,55	8,23	3,09	6,825	3,17	67
65	Респ. Хакасия	1,34	5,50	5,32	6,556	3,44	60
66	Красноярский край	3,26	6,59	6,66	5,040	4,96	34
67	Иркутская обл.	1,40	6,44	6,90	6,102	3,90	50
68	Читинская обл.	1,43	6,72	2,06	6,788	3,21	64
69	Респ. Саха (Якутия)	6,37	9,35	4,76	3,258	6,74	7
70	Еврейская АО	2,75	6,25	1,31	6,412	3,59	58
71	Чукотский АО	3,15	9,39	3,30	5,259	4,74	37
72	Приморский край	3,52	6,32	6,10	5,050	4,95	35
73	Хабаровский край	2,52	5,99	9,08	5,440	4,56	39
74	Амурская обл.	2,42	6,74	4,29	5,820	4,18	47
75	Камчатская обл.	5,27	8,53	5,95	3,613	6,39	11
76	Магаданская обл.	5,23	8,15	5,96	3,700	6,30	12
77	Сахалинская обл.	2,94	6,15	1,52	6,298	3,70	57
78	Калининградская обл.	2,30	5,31	4,66	6,202	3,80	54

### П1.2.16. Уровень благосостояния

NN пп (i)	Регион	Блочный ИИ (его вес)		Рассто- яние до эталона	$y_i^{(II)}$ сводный ИИ «Уров- ня благосо- стояния»	Ранг реги- она по УБ
		$y_i^{(1)}$ (1) (0,595)	$y_i^{(1)}$ (2) (0,405)			
1	Респ. Карелия	7,38	3,09	4,840	5,16	36
2	Респ. Коми	8,67	2,23	5,053	4,95	39
3	Архангельская обл.	6,35	1,57	6,062	3,94	58
4	Вологодская обл.	7,15	4,30	4,239	5,76	20
5	Мурманская обл.	7,51	3,32	4,665	5,33	30
6	г. Санкт-Петербург	8,05	9,29	1,572	8,43	2
7	Ленинградская обл.	3,09	6,15	5,864	4,14	53
8	Новгородская обл.	6,00	5,27	4,310	5,69	21
9	Псковская обл.	4,84	5,76	4,812	5,19	35
10	Брянская обл.	4,47	6,98	4,676	5,33	31
11	Владимирская обл.	3,39	6,61	5,532	4,47	50
12	Ивановская обл.	1,08	5,49	7,451	2,55	74
13	Калужская обл.	4,24	5,49	5,288	4,71	45
14	Костромская обл.	3,30	4,19	6,354	3,65	63
15	г. Москва	9,09	9,27	0,842	9,16	1
16	Московская обл.	6,68	9,45	2,585	7,41	7
17	Орловская обл.	5,85	6,86	3,775	6,22	15
18	Рязанская обл.	5,13	6,61	4,330	5,67	22
19	Смоленская обл.	6,22	7,48	3,324	6,68	9
20	Тверская обл.	3,07	6,10	5,891	4,11	54
21	Тульская обл.	5,98	4,88	4,500	5,50	25
22	Ярославская обл.	7,23	4,93	3,869	6,13	16
23	Респ. Марий Эл	1,45	6,12	7,040	2,96	68
24	Респ. Мордовия	2,52	6,50	6,184	3,82	61
25	Чувашская Респ.	3,35	8,35	5,231	4,77	43
26	Кировская обл.	3,07	3,22	6,865	3,13	66
27	Нижегородская обл.	6,98	6,12	3,392	6,61	10
28	Белгородская обл.	6,66	8,73	2,699	7,30	8
29	Воронежская обл.	5,03	8,33	3,980	6,02	17

## П1.2.16 (продолжение)

30	Курская обл.	3,85	8,36	4,859	5,14	37
31	Липецкая обл.	7,83	8,70	1,871	8,13	4
32	Тамбовская обл.	6,55	6,02	3,677	6,32	13
33	Респ. Калмыкия	1,91	4,90	7,037	2,96	67
34	Респ. Татарстан	8,49	7,85	1,800	8,20	3
35	Астраханская обл.	6,73	4,02	4,566	5,43	26
36	Волгоградская обл.	7,11	4,63	4,083	5,92	19
37	Пензенская обл.	3,03	5,97	5,956	4,04	57
38	Самарская обл.	8,71	6,84	2,243	7,76	6
39	Саратовская обл.	4,97	4,60	5,186	4,83	42
40	Ульяновская обл.	3,91	5,72	5,431	4,57	48
41	Респ. Адыгея	2,71	7,11	5,917	4,08	55
42	Респ. Дагестан	1,07	3,94	7,892	2,11	76
43	Кабардино-Балкарская Респ.	3,51	6,54	5,466	4,53	49
44	Карачаево-Черкесская Респ.	2,14	5,96	6,586	3,41	64
45	Респ. Сев. Осетия — Алания	4,74	7,60	4,337	5,66	23
46	Краснодарский край	6,35	6,91	3,433	6,57	11
47	Ставропольский край	4,44	6,57	4,810	5,19	34
48	Ростовская обл.	6,68	5,66	3,768	6,23	14
49	Респ. Башкортостан	8,48	7,44	2,008	8,99	5
50	Удмуртская Респ.	4,41	5,58	5,152	4,85	41
51	Курганская обл.	1,83	2,77	7,800	2,20	75
52	Оренбургская обл.	4,85	4,90	5,130	4,87	40
53	Пермская обл.	7,83	3,23	4,622	5,38	29
54	Свердловская обл.	8,47	4,88	3,467	6,53	12
55	Челябинская обл.	5,10	5,94	4,575	5,42	27
56	Респ. Алтай	1,85	2,12	8,040	2,96	77
57	Алтайский край	3,95	4,47	5,843	4,16	52
58	Кемеровская обл.	7,22	3,29	4,782	5,22	32
59	Новосибирская обл.	4,94	4,47	5,256	4,74	44
60	Омская обл.	6,94	4,85	4,040	5,96	18
61	Томская обл.	6,31	2,91	5,335	4,66	46
62	Тюменская обл.	9,35	3,00	4,484	5,52	24
63	Респ. Бурятия	2,82	2,38	7,363	2,64	73
64	Респ. Тыва	1,07	0,94	8,984	1,02	78

П1.2.16 (окончание)

65	Респ. Хакасия	4,42	3,23	6,093	3,91	60
66	Красноярский край	7,26	3,22	4,808	5,19	33
67	Иркутская обл.	5,49	1,82	6,258	3,74	62
68	Читинская обл.	3,13	2,43	7,164	2,84	70
69	Респ. Саха (Якутия)	7,85	2,53	5,038	4,96	38
70	Еврейская АО	4,03	1,29	7,207	2,79	71
71	Чукотский АО	3,65	5,21	5,768	4,23	51
72	Приморский край	2,81	3,09	7,076	2,93	69
73	Хабаровский край	6,41	2,74	5,391	4,61	47
74	Амурская обл.	3,13	2,02	7,342	2,66	72
75	Камчатская обл.	4,83	1,50	6,725	3,23	65
76	Магаданская обл.	7,45	1,22	5,926	4,07	56
77	Сахалинская обл.	6,68	1,35	6,076	3,92	59
78	Калининградская обл.	4,58	6,90	4,622	5,38	28

П1.2.1в. Качество социальной сферы

NN пп (i)	Регион	Блочный ИИ (его вес)				Рас- сто- яние до эта- лона	$y_i^{(III)}$ сводный ИИ «Ка- чества соци- альной сферы»	Ранг ре- ги- она по КСС
		$y_i^{(1)}(1)$ (0,260)	$y_i^{(1)}(2)$ (0,452)	$y_i^{(1)}(3)$ (0,156)	$y_i^{(1)}(4)$ (0,132)			
1	Респ. Каре- лия	6,05	2,93	7,59	6,93	5,36	4,64	44
2	Респ. Коми	2,73	1,76	4,77	7,70	7,02	2,97	70
3	Архангель- ская обл.	4,76	4,27	8,49	6,57	4,88	5,12	32
4	Вологодская обл.	7,78	3,37	6,40	7,45	4,90	5,10	33
5	Мурманская обл.	3,24	5,49	3,68	6,57	5,37	4,63	45
6	г. Санкт- Петербург	8,86	7,73	2,37	8,15	3,49	6,51	6
7	Ленинградс- кая обл.	7,67	4,27	4,24	4,37	5,05	4,95	38
8	Новгородс- кая обл.	7,41	4,28	4,34	4,98	4,98	5,02	36



## П1.2.1в (продолжение)

9	Псковская обл.	5,53	5,21	8,05	6,18	4,24	5,74	16
10	Брянская обл.	4,56	6,42	7,40	4,82	4,24	5,75	17
11	Владимирская обл.	5,00	5,41	7,78	5,93	4,35	5,65	19
12	Ивановская обл.	6,11	4,10	6,17	3,20	5,29	4,71	41
13	Калужская обл.	7,40	6,51	6,51	3,99	3,72	6,23	10
14	Костромская обл.	5,91	4,53	6,18	5,66	4,75	5,25	30
15	г. Москва	9,36	8,52	1,91	8,21	3,42	6,58	4
16	Московская обл.	8,89	6,59	3,94	8,01	3,43	6,57	5
17	Орловская обл.	5,54	6,79	5,88	5,00	3,96	6,03	11
18	Рязанская обл.	6,29	7,48	6,90	4,06	3,54	6,46	7
19	Смоленская обл.	4,53	5,43	5,76	5,73	4,73	5,27	29
20	Тверская обл.	6,58	4,29	5,90	4,56	4,92	5,08	34
21	Тульская обл.	7,56	6,10	5,30	6,96	3,61	6,38	8
22	Ярославская обл.	8,26	4,13	5,84	9,05	4,37	5,62	22
23	Респ. Марий Эл	2,82	4,10	6,18	2,42	6,24	3,76	58
24	Респ. Мордовия	4,19	6,36	7,74	5,42	4,27	5,72	18
25	Чувашская Респ.	5,27	5,92	7,79	3,50	4,42	5,57	23
26	Кировская обл.	5,89	4,80	9,29	4,62	4,52	5,48	26
27	Нижегородская обл.	8,25	6,16	5,35	7,63	3,39	6,60	3
28	Белгородская обл.	7,28	8,16	8,14	6,70	2,32	7,67	1
29	Воронежская обл.	4,62	7,72	5,16	5,27	4,05	5,94	13
30	Курская обл.	5,11	6,47	8,15	3,79	4,17	5,83	14
31	Липецкая обл.	7,70	6,68	6,90	5,59	3,21	6,78	2
32	Тамбовская обл.	2,90	8,10	5,62	5,02	4,57	5,42	28
33	Респ. Калмыкия	0,76	5,18	5,66	3,88	6,37	3,63	62
34	Респ. Татарстан	7,33	6,94	2,81	6,21	3,99	6,00	12

П1.2.1в (продолжение)

35	Астраханская обл.	3,88	5,01	4,30	5,83	5,32	5,68	42
36	Волгоградская обл.	5,93	5,35	5,09	5,71	4,49	5,50	25
37	Пензенская обл.	4,44	7,89	6,18	3,51	4,22	5,78	15
38	Самарская обл.	7,65	5,86	0,31	7,87	4,93	5,06	35
39	Саратовская обл.	4,88	6,51	3,83	5,50	4,57	5,43	27
40	Ульяновская обл.	4,11	5,45	2,15	5,36	5,54	4,45	48
41	Респ. Адыгея	2,70	7,83	5,81	1,75	5,25	4,74	40
42	Респ. Дагестан	1,00	9,51	6,53	0,72	5,85	4,14	53
43	Кабардино-Балкарская Респ.	1,20	9,31	7,08	2,83	5,33	4,66	43
44	Карачаево-Черкесская Респ.	1,26	7,50	5,69	1,25	5,97	4,03	55
45	Респ. Сев. Осетия – Алания	2,53	8,65	5,07	4,28	4,84	5,16	31
46	Краснодарский край	6,23	8,12	2,20	4,32	4,36	5,64	20
47	Ставропольский край	5,76	7,76	6,55	3,76	3,72	6,27	9
48	Ростовская обл.	5,71	7,14	3,12	5,06	4,36	5,64	21
49	Респ. Башкортостан	6,24	6,32	4,04	4,03	4,47	5,43	24
50	Удмуртская Респ.	5,94	3,18	7,17	3,92	5,59	4,40	49
51	Курганская обл.	3,24	3,49	2,47	2,48	6,87	3,12	67
52	Оренбургская обл.	4,55	4,64	4,09	4,98	5,42	4,57	47
53	Пермская обл.	5,54	1,53	1,92	5,60	7,09	2,91	72
54	Свердловская обл.	7,13	2,61	1,73	5,31	6,35	3,65	61
55	Челябинская обл.	6,47	3,14	2,63	5,20	6,00	4,00	56
56	Респ. Алтай	2,60	1,96	6,24	1,89	7,36	2,73	75
57	Алтайский край	2,46	3,59	2,50	2,85	6,98	3,01	69
58	Кемеровская обл.	4,93	2,56	1,50	8,07	6,59	3,41	63
59	Новосибирская обл.	3,62	3,95	3,49	3,48	6,26	3,73	60
Скопировано с сайта <a href="http://участки.информ2000.рф/">http://участки.информ2000.рф/</a>		4,31	4,69	3,67	6,47	5,39	4,61	60
Разработка электронных библиотек <a href="http://прав.информ2000.рф/">http://прав.информ2000.рф/</a>								

## П1.2.1в (окончание)

61	Томская обл.	3,57	3,95	2,40	5,26	6,26	3,74	59
62	Тюменская обл.	6,84	3,62	0,52	8,69	5,93	4,07	54
63	Респ. Бурятия	2,73	1,71	4,19	4,76	7,32	2,67	74
64	Респ. Тыва	0,81	1,42	5,39	4,58	7,90	2,10	77
65	Респ. Хакасия	3,68	2,44	5,85	2,90	6,74	3,26	65
66	Красноярский край	3,04	3,71	1,61	5,09	6,67	3,32	64
67	Иркутская обл.	2,93	2,09	0,49	2,99	7,86	2,14	76
68	Читинская обл.	0,92	1,43	4,93	1,47	8,25	1,75	78
69	Респ. Саха (Якутия)	4,21	2,68	5,86	6,22	6,12	3,88	57
70	Еврейская АО	4,81	1,44	7,27	1,16	7,17	2,83	73
71	Чукотский АО	6,56	3,19	6,78	7,25	5,16	4,84	39
72	Приморский край	4,17	2,67	2,83	2,05	7,03	2,97	71
73	Хабаровский край	5,29	1,39	3,08	6,29	6,96	3,04	68
74	Амурская обл.	2,58	2,94	5,61	3,03	6,79	3,20	66
75	Камчатская обл.	2,35	4,24	5,99	7,08	5,81	4,18	51
76	Магаданская обл.	3,39	3,76	5,00	7,63	5,79	4,20	50
77	Сахалинская обл.	5,31	2,82	4,58	7,87	5,84	4,15	52
78	Калининградская обл.	6,30	4,98	4,15	3,74	5,03	4,96	37

### П1.2.1г. Качество экологической ниши

NN пп (i)	Регион	Блочный ИИ (его вес)				Рас- стоя- ние до эта- лона	$y_i^{(III)}$ сводный ИИ «Ка- чества экологи- ческой ниши»	Ранг ре- ги- она по КЭН
		$y_i^{(1)}(1)$ (0,392)	$y_i^{(1)}(2)$ (0,276)	$y_i^{(1)}(3)$ (0,185)	$y_i^{(1)}(4)$ (0,147)			
1	Респ. Каре- лия	5,61	6,60	7,26	8,02	3,55	6,44	3
2	Респ. Коми	4,99	3,98	9,10	9,57	4,46	5,54	12
3	Архангель- ская обл.	5,86	5,24	3,88	0,97	5,64	4,35	40
4	Вологодская обл.	2,12	4,97	5,48	8,48	5,94	4,06	49
5	Мурманская обл.	5,84	2,25	6,61	0,94	6,12	3,88	59
6	г. Санкт-Пе- тербург*)							
7	Ленинград- ская обл.	2,02	7,08	3,45	9,62	5,93	4,06	48
8	Новгород- ская обл.	4,15	5,37	7,85	8,94	4,50	5,50	13
9	Псковская обл.	6,71	4,19	5,47	4,47	4,67	5,33	14
10	Брянская обл.	7,01	6,65	2,94	3,28	4,73	5,26	17
11	Владимир- ская обл.	4,13	7,40	8,35	6,45	4,20	5,80	10
12	Ивановская обл.	4,65	7,20	0,00	2,23	6,38	3,61	65
13	Калужская обл.	6,45	5,19	8,20	6,11	3,75	6,24	6
14	Костромская обл.	8,04	6,92	0,00	8,36	4,80	5,19	18
15	г. Москва*)							
16	Московская обл.	0,84	3,71	2,57	1,65	8,01	1,99	75
17	Орловская обл.	4,06	2,52	7,75	5,00	5,81	4,19	44
18	Рязанская обл.	5,79	6,53	8,28	6,86	3,49	6,50	2

## П1.2.1г (продолжение)

19	Смоленская обл.	6,28	3,95	7,33	1,50	5,23	4,76	31
20	Тверская обл.	5,88	3,41	2,59	6,16	5,56	4,44	38
21	Тульская обл.	1,14	3,39	0,00	4,23	8,13	1,86	76
22	Ярославская обл.	4,05	5,46	6,02	3,88	5,28	4,71	32
23	Респ. Марий Эл	6,70	7,29	6,83	8,17	2,93	7,06	1
24	Респ. Мордовия	6,43	6,97	6,94	4,82	3,63	6,37	5
25	Чувашская Респ.	2,42	8,82	5,98	8,99	5,09	4,92	24
26	Кировская обл.	5,85	6,94	1,49	7,47	4,86	5,13	20
27	Нижегородская обл.	3,09	5,72	3,93	3,63	6,04	4,95	55
28	Белгородская обл.	3,60	4,69	1,71	6,20	6,21	3,78	62
29	Воронежская обл.	3,88	6,42	3,43	2,80	5,81	4,19	45
30	Курская обл.	4,84	5,76	1,91	5,32	5,54	4,46	37
31	Липецкая обл.	1,51	6,79	2,28	2,42	7,10	2,89	71
32	Тамбовская обл.	4,03	5,60	2,68	5,39	5,68	4,32	42
33	Респ. Калмыкия	9,22	7,37	5,48	2,12	3,88	6,12	8
34	Респ. Татарстан	4,00	9,43	3,11	7,90	4,86	5,14	19
35	Астраханская обл.	5,91	7,07	6,11	4,42	4,03	5,96	9
36	Волгоградская обл.	5,32	7,28	0,00	3,17	6,00	3,00	53
37	Пензенская обл.	5,27	6,98	3,37	5,74	4,69	5,30	16
38	Самарская обл.	2,24	6,29	7,33	6,96	5,47	4,53	35
39	Саратовская обл.	2,91	8,87	2,25	2,21	6,33	3,67	63
40	Ульяновская обл.	5,59	7,80	1,65	4,55	5,12	4,87	26
41	Респ. Адыгея	7,68	5,54	9,54	3,88	3,62	6,38	4
42	Респ. Дагестан	8,14	9,20	3,07	2,77	4,26	5,74	11
43	Кабардино-Балкарская Респ.	3,11	3,31	9,61	2,92	6,19	3,81	61
44	Карачаево-Черкесская Респ.	3,00	3,60	9,21	3,57	6,05	3,95	57
45	Респ. Сев. Осетия — Алания	2,77	3,87	9,48	5,32	5,83	4,17	46
46	Краснодарский край	2,93	4,42	8,79	7,50	5,41	4,59	34

П1.2.1г (продолжение)

47	Ставропольский край	5,97	8,15	0,00	6,74	5,23	4,76	30
48	Ростовская обл.	3,25	7,25	1,65	5,26	6,01	3,99	54
49	Респ. Башкортостан	1,39	8,22	7,01	3,37	6,16	3,84	60
50	Удмуртская Респ.	3,84	8,33	3,50	7,75	4,91	5,08	21
51	Курганская обл.	7,40	4,27	0,00	4,77	5,85	4,14	47
52	Оренбургская обл.	1,39	5,78	2,00	5,78	6,95	3,05	70
53	Пермская обл.	3,90	6,39	5,66	8,84	4,67	5,33	15
54	Свердловская обл.	1,65	6,23	4,31	8,56	6,12	3,88	58
55	Челябинская обл.	0,28	4,89	6,58	6,58	6,92	3,07	69
56	Респ. Алтай	9,10	2,25	9,50	1,92	5,14	4,85	27
57	Алтайский край	4,08	6,71	2,19	2,64	5,99	4,00	52
58	Кемеровская обл.	0,76	4,90	9,35	8,87	6,38	3,61	64
59	Новосибирская обл.	5,14	3,24	0,00	3,64	6,80	3,19	68
60	Омская обл.	2,66	3,76	0,00	6,77	7,20	2,80	73
61	Томская обл.	5,08	2,08	0,00	1,04	7,55	2,44	74
62	Тюменская обл.	4,30	2,97	5,52	0,40	6,60	3,39	66
63	Респ. Бурятия	8,74	1,22	9,09	1,66	5,67	4,32	41
64	Респ. Тыва	8,97	1,54	7,97	1,84	5,54	4,46	36
65	Респ. Хакасия	5,91	4,05	8,51	1,55	5,21	4,79	29
66	Красноярский край	3,27	2,34	8,35	7,27	5,95	4,05	50
67	Иркутская обл.	4,83	3,29	6,38	5,64	5,29	4,70	33
68	Читинская обл.	4,67	1,87	4,58	7,55	5,96	4,03	51
69	Респ. Саха (Якутия)	9,02	1,56	4,21	7,96	5,17	4,82	28
70	Еврейская АО	6,44	4,60	6,83	9,44	3,85	6,14	7
71	Чукотский АО	8,84	0,27	0,00	3,88	7,11	2,88	72
72	Приморский край	2,21	2,07	8,37	6,08	6,61	3,38	67
73	Хабаровский край	5,74	3,29	6,37	1,14	5,78	4,21	43
74	Амурская обл.	8,89	1,48	5,00	9,43	5,01	4,99	22
75	Камчатская обл.	7,95	1,10	7,49	0,98	6,04	3,95	56
76	Магаданская обл.	6,21	0,90	6,07	9,68	5,59	4,41	39
77	Сахалинская обл.	5,17	3,98	4,03	8,90	5,08	4,91	23
78	Калининградская обл.	5,73	7,01	3,27	2,57	5,11	4,89	25

\*) Специфика мегаполисов Москвы и Санкт-Петербурга обусловила их исключение из числа регионов, для которых рассчитывались блочные и сводный ИИ «Качество библиографической ниши».

Скопировано с сайта <http://www.право.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.ru>

### П1.2.2. Значения единого (сводного) ИИ КЖ и соответствующих рангов для регионов РФ

NN пп (i)	Регион	$\hat{y}_i^{св}$	Ранг
1	Респ. Карелия	4,72	37
2	Респ. Коми	4,60	42
3	Архангельская обл.	4,39	52
4	Вологодская обл.	4,27	55
5	Мурманская обл.	5,39	13
6	г. Санкт-Петербург*)	5,31	–
7	Ленинградская обл.	3,58	71
8	Новгородская обл.	4,41	51
9	Псковская обл.	4,54	45
10	Брянская обл.	5,04	26
11	Владимирская обл.	4,72	36
12	Ивановская обл.	3,26	79
13	Калужская обл.	5,21	21
14	Костромская обл.	3,84	67
15	г. Москва*)	6,00	–
16	Московская обл.	5,14	24
17	Орловская обл.	5,31	16
18	Рязанская обл.	5,41	11
19	Смоленская обл.	5,23	18
20	Тверская обл.	3,83	68
21	Тульская обл.	3,78	69
22	Ярославская обл.	4,99	28
23	Респ. Марий Эл	4,68	39
24	Респ. Мордовия	5,26	17
25	Чувашская Респ.	5,17	22
26	Кировская обл.	4,07	60

П1.2.2 (продолжение)

27	Нижегородская обл.	5,10	25
28	Белгородская обл.	5,88	4
29	Воронежская обл.	5,45	10
30	Курская обл.	4,81	34
31	Липецкая обл.	5,53	8
32	Тамбовская обл.	4,73	35
33	Респ. Калмыкия	5,22	19
34	Респ. Татарстан	6,66	1
35	Астраханская обл.	5,69	5
36	Волгоградская обл.	5,01	27
37	Пензенская обл.	4,83	32
38	Самарская обл.	6,05	2
39	Саратовская обл.	4,81	33
40	Ульяновская обл.	4,54	44
41	Респ. Адыгея	5,52	9
42	Респ. Дагестан	4,51	46
43	Кабардино-Балкарская Респ.	5,15	23
44	Карачаево-Черкесская Респ.	4,59	43
45	Респ. Сев. Осетия — Алания	5,63	7
46	Краснодарский край	5,63	6
47	Ставропольский край	5,36	14
48	Ростовская обл.	5,22	20
49	Респ. Башкортостан	6,00	3
50	Удмуртская Респ.	4,69	38
51	Курганская обл.	3,19	74
52	Оренбургская обл.	4,11	59
53	Пермская обл.	4,26	56
54	Свердловская обл.	4,61	41



## П1.2.2 (окончание)

55	Челябинская обл.	4,33	54
56	Респ. Алтай	3,92	63
57	Алтайский край	3,99	62
58	Кемеровская обл.	3,90	65
59	Новосибирская обл.	4,50	47
60	Омская обл.	4,67	40
61	Томская обл.	4,48	48
62	Тюменская обл.	5,34	15
63	Респ. Бурятия	4,00	61
64	Респ. Тыва	3,17	75
65	Респ. Хакасия	4,17	57
66	Красноярский край	4,45	49
67	Иркутская обл.	3,73	70
68	Читинская обл.	3,03	76
69	Респ. Саха (Якутия)	5,40	12
70	Еврейская АО	3,85	66
71	Чукотский АО	4,36	53
72	Приморский край	3,54	72
73	Хабаровский край	4,41	50
74	Амурская обл.	3,91	64
75	Камчатская обл.	4,95	29
76	Магаданская обл.	4,92	30
77	Сахалинская обл.	4,13	58
78	Калининградская обл.	4,84	31

\*) Специфика мегаполисов Москвы и Санкт-Петербурга обусловила их исключение из числа регионов, сравниваемых по единому (сводному) ИИ КЖН.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В БАЙЕСОВСКОМ ПОДХОДЕ

## П2.1а. Обобщенное одномерное распределение Стьюдента с $\nu$ степенями свободы, параметром сдвига $\theta_0$ и параметром точности $c(t(\nu|\theta_0; c)$ – распределение)

Как известно (см., например, [Айвазян, Мхитарян (2001)], п. 3.2.2), *стандартный* з.р.в. Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы (ст. св.) описывает распределение случайной величины

$$t(\nu) = \frac{\xi_0^2}{\sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2}}, \quad (\text{П2.1})$$

где  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\nu$  – статистически взаимонезависимые  $(0; \sigma^2)$  – нормально распределенные случайные величины. Значение соответствующей функция плотности вероятности  $f_{t(\nu)}(x)$  в точке  $x$  задается соотношением

$$f_{t(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (\text{П2.2})$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ , а среднее значение и дисперсия случайной величины  $t(\nu)$  равны соответственно:  $\mathbf{E}t(\nu) = 0$  и  $\mathbf{D}(\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}$  ( $\nu > 2$ ).

Введем в рассмотрение случайную величину  $t(\nu|\theta_0; c)$ , являющуюся линейной функцией от  $t(\nu)$ , а именно:

$$t(\nu|\theta_0; c) = \frac{1}{\sqrt{c}} t(\nu) + \theta_0. \quad (\text{П2.3})$$

Легко показать, что функция плотности вероятности  $f_{t(\nu|\theta_0; c)}(x)$  случайной величины  $t(\nu|\theta_0; c)$  в точке  $x$  имеет вид:

$$f_{t(\nu|\theta_0; c)}(x) = \frac{\sqrt{c} \cdot \Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{c(x - \theta_0)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (\text{П2.4})$$

причем  $\mathbf{E}t(\nu|\theta_0; c) = \theta_0$  и  $\mathbf{D}t(\nu|\theta_0; c) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\nu}{\nu-2}$  ( $\nu > 2$ ).

Распределение, задаваемое плотностью (П2.4), называют *обобщенным распределением Стьюдента* (или  $t(\nu|\theta_0; c)$ -распределением) с параметром сдвига  $\theta_0$  и параметром точности  $c$ . Отметим, что в данном

случае параметр точности  $c$  не есть величина, обратная к дисперсии случайной величины  $t(\nu|\theta_0; c)$ : дисперсия может и не существовать (при  $\nu \leq 2$ ).

### П2.16. Обобщенное $k$ -мерное ( $k \geq 2$ ) распределение

Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы, параметром сдвига  $\Theta_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_k^0)'$  и  $(k \times k)$  — матрицей точности  $\mathbf{B}$  (или так называемое  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ -распределение)

*Стандартный  $k$ -мерный з.р.в. Стьюдента с  $\nu$  ст. св. описывает распределение  $k$ -мерной случайной величины*

$$\bar{t}(\nu) = (t^{(1)}(\nu), t^{(2)}(\nu), \dots, t^{(k)}(\nu))', \quad (\text{П2.5})$$

где каждая из компонент  $t_j(\nu)$  — стандартная стьюдентовская случайная величина (П2.1), и все компоненты  $t_j(\nu)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) взаимнонекоррелированы. Функция плотности вероятности  $f_{\bar{t}(\nu)}(X)$  в точке  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})'$  задается соотношением

$$f_{\bar{t}(\nu)}(X) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+k}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \left(1 + \frac{1}{\nu} X' \cdot X\right)^{-\frac{\nu+k}{2}}, \quad (\text{П2.6})$$

причем  $\mathbf{E}\bar{t}(\nu) = \mathbf{0}_k$  и ковариационная матрица  $\Sigma_{\bar{t}(\nu)} = \frac{\nu}{\nu-2} \cdot \mathbf{I}_k$  где  $\mathbf{0}_k$  обозначает  $k$ -мерный вектор-столбец из нулей, а  $\mathbf{I}_k$  — единичная матрица размерности  $k$ .

*Обобщенное  $k$ -мерное распределение Стьюдента (или  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ -распределение) с  $\nu$  ст. св., параметром сдвига  $\Theta_0$  и матрицей точности  $\mathbf{B}$  описывает распределение случайной величины*

$$\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) = C \cdot \bar{t}(\nu) + \Theta_0, \quad (\text{П2.7})$$

где  $C$  — некоторая невырожденная  $(k \times k)$ -матрица,  $\mathbf{B} = (CC')^{-1}$ ,  $\Theta_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_k^0)$ , а  $\bar{t}(\nu)$  — стандартная стьюдентовская  $k$ -мерная случайная величина (П2.5), подчиняющаяся з.р.в. с плотностью (П2.6). Значение функции плотности вероятности  $f_{\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})}(X)$  случайной величины  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  в точке  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})'$  задается соотношением

$$f_{\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})}(X) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+k}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \times \\ \times |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} (X - \Theta_0)' \mathbf{B} (X - \Theta_0)\right)^{-\frac{\nu+k}{2}}, \quad (\text{П2.8})$$

причем  $\mathbf{E}\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) = \Theta_0$  и ковариационная матрица  $\Sigma_{\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})} = \frac{\nu}{\nu-2} \times$

Именно этим з.р.в. описывается сопряженное априорное (а следовательно, и апостериорное) частное распределение вектора  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)'$  коэффициентов регрессии в нормальной КЛММР, а также условное (при фиксированных  $\mathbf{X}, Y$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$ ) апостериорное распределение вектора  $\tilde{Y} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+q})'$  прогнозных значений зависимой переменной в этой модели (см. пример 3.9 и задачу 5 в п. 3.5).

При построении байесовских интервальных оценок и доверительных областей для параметров  $\Theta$ , так же как и при построении байесовских интервальных оценок и доверительных областей для прогнозных значений  $\tilde{Y}$ , используются следующие свойства  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ -распределения.

**Свойство (А).** Пусть анализируемая  $k$ -мерная случайная величина  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  разбита на два подвектора  $\bar{t}^{(1)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  и  $\bar{t}^{(2)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  соответственно размерностей  $k_1$  и  $k_2$  ( $k_1 + k_2 = k$ ), т. е.

$$\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \bar{t}^{(1)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) \\ \bar{t}^{(2)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) \end{pmatrix}.$$

Соответственно этому разобьются на блоки вектор средних значений  $\Theta_0$  и матрица точности  $\mathbf{B}$ :

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} \Theta_0(1) \\ \Theta_0(2) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда частное (маргинальное) распределение вектора  $\bar{t}^{(1)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  является  $k_1$ -мерным обобщенным распределением Стьюдента  $\bar{t}(\nu|\Theta_0(1); \mathbf{B}(1))$  с параметром сдвига  $\Theta_0(1) = (\theta_1^0, \dots, \theta_{k_1}^0)'$  и матрицей точности  $\mathbf{B}(1) = \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{21}$ .

При построении интервальных оценок нас интересует частное распределение отдельной ( $j$ -й) компоненты  $t^{(j)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  анализируемой  $k$ -мерной обобщенной стьюдентовской случайной величины  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ . Соответственно, при этом используется частный случай данного свойства, когда в роли  $\bar{t}^{(1)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$  выступает компонента  $t^{(j)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ . Тогда:

$$k_1 = 1; \quad \Theta_0(1) = \theta_j^0; \quad B(1) = b_{jj} - B_{j \cdot} \cdot \mathbf{B}(j) \cdot B_{\cdot j}, \quad (\text{П2.9})$$

где  $b_{jj}$  —  $j$ -й диагональный элемент матрицы точности  $\mathbf{B}$ ,  $B_{j \cdot} = (b_{j1}, \dots, b_{j, j-1}, b_{j, j+1}, \dots, b_{jk})$  —  $(k-1)$ -мерная строка,  $B_{\cdot j} = (b_{1j}, \dots, b_{j-1, j}, b_{j+1, j}, \dots, b_{kj})'$  —  $(k-1)$ -мерный столбец, а  $\mathbf{B}(j)$  — это  $(k-1) \times (k-1)$ -матрица, получающаяся из матрицы  $\mathbf{B}$  вычеркиванием из нее  $j$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Заметим, что в данном случае  $B(1)$  — это *числовой параметр точности* в частном обобщенном одномерном стьюдентовском распределении компоненты  $t^{(j)}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ .

**Свойство (В)** используется при построении *доверительных областей* для неизвестных значений параметров КЛММР или одновременно для нескольких прогнозных значений зависимой переменной и *заключается в том, что статистика*

$$\gamma = \frac{1}{k} (\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) - \Theta_0)' \mathbf{B} (\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) - \Theta_0)$$

*асимптотически (по  $\nu \rightarrow \infty$ ) подчиняется  $F(k; \nu)$ -распределению.*

Поэтому, определяя из таблиц по заданной доверительной вероятности  $P_0$  значение  $100(1 - P_0)\%$ -ной точки  $F_{1-P_0}(k; \nu)$  соответствующего  $F$ -распределения, мы можем с помощью неравенства

$$\frac{1}{k} (\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) - \Theta_0)' \mathbf{B} (\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B}) - \Theta_0) < F_{1-P_0}(k; \nu) \quad (\text{П2.10})$$

определить  $k$ -мерную область, в которую попадает  $100P\%$  наблюдений случайной величины  $\bar{t}(\nu|\Theta_0; \mathbf{B})$ .

## П2.2а. Двумерное гамма-нормальное распределение и его свойства

*Совместное двумерное распределение случайной величины  $(\theta; h)$  называется гамма-нормальным, если его функция плотности вероятности  $p(\theta; h)$  задается (с точностью до нормирующего множителя) соотношением*

$$p(\theta; h) \sim (\lambda_0 h)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_0 h}{2}(\theta - \theta_0)^2} \cdot h^{\alpha-1} e^{-\beta h}, \quad (\text{П2.11})$$

где  $\lambda_0, \theta_0, \alpha$  и  $\beta$  — некоторые числовые значения параметров этого семейства распределений.

### Свойства двумерного гамма-нормального распределения

(I) *Частное распределение параметра  $\theta$*  есть одномерное обобщенное распределение Стьюдента (П2.4) с  $2\alpha$  ст. св., параметром сдвига  $\theta_0$  и параметром точности  $c = \lambda_0 \cdot \alpha/\beta$ , т. е.

$$\theta = t \left( 2\alpha | \theta_0; \lambda_0 \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Отсюда, в частности, следует, что случайная величина  $\sqrt{\lambda_0 \frac{\alpha}{\beta}}(\theta - \theta_0)$  подчиняется стандартному распределению Стьюдента с  $2\alpha$  ст. св.

(II) *Частное распределение параметра  $h$*  есть гамма-распределение с параметрами  $(\alpha, \beta)$  и, следовательно,  $Eh = \frac{\alpha}{\beta}$  и  $Dh = \frac{\alpha}{\beta^2}$ .

$\in [\gamma_{1-\varepsilon}(\alpha; \beta); \gamma_{\varepsilon}(\alpha; \beta)]$  с вероятностью  $P_0 = 1 - 2\varepsilon$ , где  $\gamma_q(\alpha, \beta)$  — это 100q%-ная точка гамма-распределения с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Отметим, что при  $\alpha$ , кратном 0,5, справедлива формула:

$$\gamma_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\beta} \chi_q^2(2\alpha), \quad (\text{П2.12})$$

где  $\chi_q^2(m)$  — это 100q%-ная точка «хи квадрат»-распределения с  $m$  ст. св.

(III) *Условное распределение параметра  $\theta$*  (при условии заданности значения параметра  $h$ , т. е. при  $h = h_0$ , где  $h_0$  — заданное число) является  $(\theta_0; 1/\lambda_0 h_0)$  — нормальным распределением (вытекает из (П2.11) при подстановке в правую часть этого соотношения заданного значения  $h = h_0$ ).

### П2.26. Многомерное $((k + 1)$ -мерное, $k > 1$ ) гамма-нормальное распределение и его свойства.

Совместное  $(k + 1)$ -мерное распределение параметров  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \dots, \theta_k)'$  и  $h$  называется **многомерным гамма-нормальным**, если его функция плотности вероятности  $p(\Theta; h)$  задается (с точностью до нормирующего множителя) соотношением:

$$p(\Theta; h) \sim h^{\frac{k}{2}} |\Lambda_0|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{h}{2}(\Theta - \Theta_0)' \Lambda_0 (\Theta - \Theta_0)} \cdot h^{\alpha - 1} e^{-\beta h}, \quad (\text{П2.13})$$

где заданные численные значения векторного параметра сдвига  $\Theta_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_k^0)'$ , элементов  $(k \times k)$ -матрицы точности  $\Lambda_0$ , а также — параметров  $\alpha$  и  $\beta$  однозначно определяют з.р.в. параметров  $\Theta$  и  $h$ .

### Свойства многомерного гамма-нормального распределения

(I) *Частное распределение векторного параметра  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \dots, \theta_k)'$*  есть многомерное обобщенное распределение Стьюдента (ПЗ.8) с  $2\alpha$  ст. св., параметром сдвига  $\Theta = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_k^0)'$  и матрицей точности  $B = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \Lambda_0$ .

(II) *Частное распределение скалярного параметра  $h$*  есть гамма-распределение (3.23) с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

(III) *Условное распределение векторного параметра  $\Theta$*  (при условии заданности значения параметра  $h$ , т. е. при  $h = h_0$ , где  $h_0$  — заданное значение) является  $k$ -мерным  $(\Theta_0; (h_0 \Lambda_0)^{-1})$  — нормальным распределением.

### П2.3. Некоторые сведения об априорных з.р.в., сопряженных по отношению к наблюдаемым генеральным совокупностям, зависящим от единственного неизвестного параметра

№№ пп	З.р.в. наблюдаемой генеральной совокупности	Сопряженный априорный з.р.в. $p(\theta)$ , выражения для $E\theta$ и $D\theta$	Апостериорный з.р.в. $p(\theta x_1, x_2, \dots, x_n)$ , выражения для его параметров
1	$(\theta; \sigma^2)$ -нормальный, $f(x \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$ (значение дисперсии $\sigma^2$ известны)	$(\theta_0; \sigma_0^2)$ -нормальный; $E\theta = \theta_0$ ; $D\theta = \sigma_0^2$ ( $\theta_0$ и $\sigma_0^2$ — заданы)	$(\theta'_0; \sigma'^2_0)$ -нормальный, где $\tilde{\theta}_0 = \frac{\bar{x} + \gamma\theta_0}{1 + \gamma}$ и $\tilde{\sigma}^2_0 = \sigma^2/n(1 + \gamma)$ , а $\gamma = \sigma^2/n\sigma_0^2$
2	Экспоненциальный $f(x \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$	$p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$ ( $\theta > 0$ ), — гамма-распределение; $E\theta = \alpha/\beta$ ; $D\theta = \alpha/\beta^2$ ( $\alpha$ и $\beta$ — заданы)	Гамма-распределение с параметрами $\tilde{\alpha} = \alpha + n$ ; $\tilde{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n x_i$
3	$[0; \theta]$ -равномерный: $f(x \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{для } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0 & \text{для } x \notin [0; \theta] \end{cases}$	$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & \text{при } \theta \geq \theta_0; \\ 0 & \text{при } \theta < \theta_0; \end{cases}$ ( $\theta > 0$ ), распределение Парето: $E\theta = \frac{\alpha\theta_0}{\alpha-1}$ ; $D\theta = \frac{\alpha\theta_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ ( $\alpha$ и $\theta_0$ — заданы)	Распределение Парето с параметрами $\tilde{\alpha} = \alpha + n, \tilde{\theta}_0 = \max\{\theta_0; x_1, x_2, \dots, x_n\}$
4	Распределение Пуассона: $P\{\xi = x\} = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}$ $x = 0, 1, 2, \dots$	$p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$ ( $\theta > 0$ ), — гамма-распределение; $E\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ ; $D\theta = \frac{\alpha}{\beta^2}$ ( $\alpha$ и $\beta$ — заданы)	Гамма-распределение с параметрами $\tilde{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n x_i$ $\tilde{\beta} = \beta + n$
5	Биномиальное распределение: $P\{\xi = x\} = C_N^x \theta^x (1-\theta)^{N-x}$ (значение параметра $N$ известно)	$p(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} \times (1-\theta)^{b-1}$ ( $0 \leq \theta \leq 1$ ), — бета-распределение; $E\theta = \frac{a}{a+b}$ ; $D\theta = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ ( $a$ и $b$ — заданы)	Бета-распределение с параметрами $\tilde{a} = a + \sum_{i=1}^n x_i$ $\tilde{b} = b + nN - \sum_{i=1}^n x_i$
6	Отрицательное биномиальное распределение $P\{\xi = x\} = C_{x-1}^{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}$ (значение целочисл. параметра $k$ известно) $x = k, k+1, \dots$	$p(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} \times (1-\theta)^{b-1}$ ( $0 \leq \theta \leq 1$ ), — бета-распределение; $E\theta = \frac{a}{a+b}$ ; $D\theta = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ ( $a$ и $b$ — заданы)	Бета-распределение с параметрами $\tilde{a} = a + kn$ $\tilde{b} = b + \sum_{i=1}^n x_i - kn$
7	Распределение Парето $f(x \theta) = \begin{cases} \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}} & \text{при } x \geq x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases}$ (значение параметра $x_0$ — известно), $x_0 \leq x < +\infty$	$p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \times e^{-\beta\theta}$ ( $\theta > 0$ ), — гамма-распределение; $E\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ ; $D\theta = \frac{\alpha}{\beta^2}$ ( $\alpha$ и $\beta$ — заданы)	Гамма-распределение с параметрами $\tilde{\alpha} = \alpha + n$ ; $\tilde{\beta} = \beta + n \ln\left(\frac{g_n}{x_0}\right)$ , где $g_n = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

- Айвазян С.А.* (2012). Анализ качества и образа жизни населения (эконометрический подход). М.: Наука.
- Айвазян С.А.* (1974). Об опыте применения экспертно-статистического метода построения неизвестной целевой функции // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. М.: Наука.
- Айвазян С.А.* (2008). Роль социально-экономической политики и институционального развития в повышении качества жизни: результаты межстранового эконометрического анализа // Россия в глобализирующемся мире. М.: Наука.
- Айвазян С.А.* (2010). Методы эконометрики. М.: Магистр.
- Айвазян С.А., Бежаева З.И., Староверов О.В.* (1974). Классификация многомерных наблюдений. М.: Статистика.
- Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* (1985). Прикладная статистика: исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика.
- Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* (2001). Прикладная статистика и основы эконометрики. Том 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. М.: ЮНИТИ.
- Бард Й.* (1979). Нелинейное оценивание параметров / Пер. с англ. М.: Статистика.
- Берндт Э.* (2005). Практика эконометрики: классика и современность / Пер. с англ. М.: ЮНИТИ.
- Благовещенский Ю.Н.* (2012). Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика. № 2 (26). С. 113–130.
- Вапник В.Н.* (1979). Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука.
- Вересков А.И., Левин В.Е., Федоров В.В.* (1981). Регуляризованный м.н.к. без производных // Линейная и нелинейная параметризация в задачах планирования экспериментов. М. С. 20–27.
- Васильев Ф.П.* (1980). Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука.
- Де Гроот М.* (1974). Оптимальные статистические решения / Пер. с англ. М.: Мир.



Демиденко Е.З. (1981). Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика.

Доклад Комиссии по оценке экономических результатов и социального прогресса // Вопросы статистики. 2010. № 11–12; 2011. № 2–3. (Полные англоязычная и франкоязычная версии доклада размещены на сайте: [www.stiglitz-sen-fitoussi.fr](http://www.stiglitz-sen-fitoussi.fr).)

Доманский В.К., Крепс В.Л., Калягина Л.В. (2006). Построение целевой функции для оценки экономических событий на основе экспертного ранжирования // Вестник КрасГАУ. № 11.

Дрейпер П., Смит Г. (1986). Прикладной регрессионный анализ / Пер. с англ. Книга 1. М.: Финансы и статистика.

Зельнер А. (1980). Байесовские методы в эконометрике / Пер. с англ. М.: Статистика.

Каплинский А.И., Руссман И.Б., Умывакин В.М. (1991). Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем. Воронеж: Изд-во Воронежского университета.

Киселев Н.И. (1980). Экспертно-статистический метод определения функции предпочтения по результатам парных сравнений объектов // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. М.: Наука.

Муркин Б.Г. (1976). Анализ качественных признаков. М.: Статистика.

Мостеллер Ф., Тьюки Дж. (1982). Анализ данных и регрессия / Пер. с англ. Вып. 1 и 2. М.: Финансы и статистика.

Полещук Л.И. (1989). Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. Новосибирск: Наука.

Поляк Б.Т. (1967). Методы минимизации функций многих переменных // Экономика и математические методы. Т. 3. № 6. С. 881–902.

Поляк Б.Т. (1969). Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 9. № 4. С. 807–821.

Поляк Б.Т. (1971). Сходимость методов возможных направлений в экстремальных задачах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 11. № 4. С. 855–869.

Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. (1975). Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука.

Росси Э. (2010). Одномерные GARCH-модели: обзор / Электронный журнал «Квартальник», № 8. С. 1–67.  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru> Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>

- Сен А. (2004). Развитие как свобода. М.: Новое издательство.
- Слуцкий Е.Е. (1963). К теории сбалансированного бюджета потребителя // Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М.: Изд-во АН СССР.
- Танган А.С. (1980). Практическое построение аддитивной целевой функции. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Успенский А.Б., Федоров В.В. (1975). Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. М.: МГУ.
- Фишберн П. (1978). Теория полезности для принятия решений. М.: Наука.
- Химмельблау Д. (1975). Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. М.: Мир.
- Хованов Н.В. (1996). Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета.
- Ширяев А.Н. (2004). Основы стохастической и финансовой математики. Т. 2. М.: Фазис.
- Aas K., Czado C., Frigessi A. and Bakken H. (2009). Pair-copula Constructions of Multiple Dependence, *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198.
- Abramowitz M. and Stegun I. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York.
- Acerbi C. (2002). Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion, *Journal of Banking and Finance*, 26, 1505–1518.
- Acerbi C. (2004). Coherent Representations of Subjective Risk-Aversion, in G. Szego (Ed), *Risk Measures for the 21st Century*, Wiley, New York, pp. 147–207.
- Acerbi C. and Tasche D. (2002). On the Coherence of Expected Shortfall, *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Acharya V., Bharath S. and Srinivasan A. (2007). Does Industry-wide Distress Affect Defaulted Firms? – Evidence from Creditor Recoveries, *Journal of Financial Economics*, 85(3), 787–821.
- ADEH (1999). Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. and Heath D. (1999). Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 9, 203–228.

- Ahn S.K.* (1988). Distribution for Residual Autocovariances in Multivariate Autoregressive Models with Structured Parameterization, *Biometrika*, 75, 590–593.
- Aït-Sahalia Y., Mykland P.A. and Zhang L.* (2005). How Often to Sample a Continuous Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise, *Review of Financial Studies*, 18, 351–416.
- Aït-Sahalia Y., Mykland P.A. and Zhang L.* (2006). Ultra High Frequency Volatility Estimation with Dependent Microstructure Noise. Working Paper, w11380, NBER.
- Akaike H.* (1974). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, *Second Interantional Symposium on Information Theory*, 267–281.
- Alexander C.* (2001). *A Primer on the Orthogonal GARCH Model*, ISMA Centre, Mimeo.
- Alexander C.O. and Chibumba A.M.* (1997). Multivariate Orthogonal Factor GARCH, University of Sussex Discussion Papers in Mathematics
- Allen, L., Delong, G. and Saunders, A.* (2003). Issues in the Credit Risk Modeling of Retail Markets, NYU Stern School of Business Working Paper No. FIN-03-007.
- Alsina M., Frank J. and Schweizer B.* (2005). Problems on Associative Functions, *Aequationes Mathematicae*, 66, 128–140.
- Altman E.I.* (1968). Financial Ratios, Discriminant Analysis and Prediction of Corporate Bankruptcy, *Journal of Finance*, 23(4), 589–609.
- Altman E.I. and Kishore V.M.* (1996). Almost Everything You Wanted to Know About Recoveries on Defaulted Bonds, *Financial Analysts Journal*, 57II64.
- Altman E.I., Fanjul G.* (2004). Defaults and Returns in High Yield Bond Market: Analysis through 2003, NY Stern School of Business, Salomon Center Working Paper, January 2004.
- Altman E. and Sabato G.* (2007). Modeling Credit Risk for SMEs: Evidence from the U.S. Market, *ABACUS*, 43(3), 332–357.
- Altman E.I., Resti A. and Sironi A.* (2001). Analyzing and Explaining Default Recovery Rates. Report submitted to ISDA, London.
- Altman E.I., Brady B., Resti A. and Sironi A.* (2005). The Link Between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence, and Implications, *Journal of Business*, 78(6), 2203–2227.

- Andersen T.G. and Bollerslev T. (1998). ARCH and GARCH Models. Глава в *Encyclopedia of Statistical Sciences* (ed. S. Kotz, C. Read & D. Banks), 2. John Wiley and Sons.
- Andersen T.G., T. Bollerslev, P. Christoffersen and Diebold F.X. (2006). Volatility and Correlation Forecasting. Глава в *Handbook of Economic Forecasting* (ed. C.W.J. Granger, G.Elliott & A. Timmermann), 777–878, North-Holland.
- Andersen T.G. and Bollerslev T. (1997). Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns. *Journal of Finance* 52, 975–1005.
- Andersen T.G., T. Bollerslev and Diebold F.X. (2009). Parametric and Nonparametric Volatility Measurement. Глава в *Handbook of Financial Econometrics* (под редакцией Y. Ait-Sahalia & L. Hansen). North-Holland.
- Anderson H., K. Nam and Vahid F. (1999). Asymmetric Nonlinear Smooth Transition GARCH Models. Глава в *Nonlinear Time Series Analysis of Economic and Financial Data* (под редакцией P. Rothman), 191–207. Kluwer.
- Andersen T.G., Bollerslev T. (1997). Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets, *Journal of Empirical Finance*, 4, 115–158.
- Andersen T.G. and Bollerslev T. (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review*, 39, 885–905.
- Andersen T.G., Bollerslev T. and Diebold F.X. (2007). Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling and Forecasting of Return Volatility, *Review of Economics and Statistics*, 89, 701–720.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (2000a). Exchange Rate Returns Standardized by Realized Volatility Are (Nearly) Gaussian, *Multinational Finance Journal*, 4, 159–179.
- Andersen T., Bollerslev T., Diebold F.X. and Labys P. (2000b). Great Realizations, *Risk*, 13, 105–108.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X. and Ebens H. (2001a). The Distribution of Realized Stock Return Volatility, *Journal of Financial Economics*, 61(1), 43–76.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (2001b). The Distribution of Exchange Rate Volatility, *Journal of the American Statistical*

- Andersen T.G., L. Benzoni and Lund J. (2002). Estimating Jump-Diffusions for Equity Returns, Journal of Finance, 57, 1239–1284.*
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (2003). Modeling and Forecasting Realized Volatility, Econometrica, 71, 529–626.*
- Anderson T.W. and Darling D.A. (1954). A Test of Goodness of Fit, Journal of the American Statistical Association, 49, 765–769.*
- Andrews D.W.K. (1991). Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation, Econometrica, 59, 817–858.*
- Andrews D.W.K. (1993). Tests for Parameter Stability and Structural Change with Unknown Change Point, Econometrica, 61, 821–856.*
- Ang A. and Chen J. (2002). Asymmetric Correlations of Equity Portfolios, Journal of Financial Economics, 63(3), 443–494.*
- Areal N.M.P.C. and Taylor S.J. (2002). The Realized Volatility of FTSE-100 Futures Prices, Journal of Futures Markets, 22, 627–648.*
- Asarnow E. and Marker J. (1995). Historical Performance of the U.S. Corporate Loan Market: 1988–1993, Commercial Lending Review, Spring, 13–32.*
- Bai J. (1997). Estimating Multiple Breaks One at a Time, Econometric Theory, 13, 315–352.*
- Baillie R. T., Bollerslev T. and Mikkelsen H.O. (1996). Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 74, 3–30.*
- Balke N.S. and Fomby T.B. (1997). International Economic Review, 38, 627–645.*
- Balcombe K., A. Bailey and Brooks J. (2007). Threshold Effects in Price Transmission: The Case of Brazilian Wheat, Maize, and Soya Prices, American Journal of Agricultural Economics, 89(2), 308–323.*
- Bamber D. (1975). The Area Above the Ordinal Dominance Graph and the Area Below the Receiver Operating Characteristic Graph, Journal of Mathematical Psychology, 12, 387–415.*
- Bandi F.M., Russell J.R. (2005a). Microstructure Noise, Realized Volatility, and Optimal Sampling. Unpublished Paper. Graduate School of Business, University of Chicago.*
- Bandi F.M., Russell J.R. (2006a). Volatility. In: Birge, J. R., Linetsky V.,*

- Bandi F.M., Russell J.R.* (2006b). Separating Market Microstructure Noise from Volatility. *Journal of Financial Economics* 79, 655–692.
- Banerjee A., J. Dolado and Mestre R.* (1998). Error Correction Mechanism Tests For Cointegration In A Single Equation Framework, *Journal of Time Series Analysis*, 3(9), 267–83.
- Barbe P., Genest C., Ghoudi K., Remillard B.* (1996). On Kendall's Process, *Journal of Multivariate Analysis*, 58, 197–229.
- Bard Y.* (1970). Comparison of Gradient Methods for the Solution of Non-linear Parametric Estimation Problems. — *SIAM J. Numerical Analysis*, vol. 7, 157–186.
- Barndorff-Nielsen O.E. and Shephard N.* (2002). Econometric Analysis of Realised Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 64, 253–280.
- Barndorff-Nielsen O.E. and Shephard N.* (2004a). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps, *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 1–37.
- Barndorff-Nielsen O.E. and Shephard N.* (2005b). How Accurate is the Asymptotic Approximation to the Distribution of Realised Volatility? In: Andrews, D. W. K., Stock, J. H., (eds), *Identification and Inference for Econometric Models. A Festschrift for Tom Rothenberg*. Cambridge University Press, 306–331.
- Barndorff-Nielsen O.E. and Shephard N.* (2006). Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation, *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), 1–30.
- Bates D.S.* (2000). Post-'87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market, *Journal of Econometrics*, 94, 181–238.
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.* (2006). Multivariate GARCH Models: a Survey, *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 79–109.
- Bauwens L., Laurent S.* (2005). A New Class of Multivariate Skew Densities, with Application to GARCH Models. — *Journal of Business and Economic Statistics*, N 23(3), 346–354.
- BCBS* (1998). Basel Committee on Banking Supervision. *A Mendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, BASEL.
- BCBS* (2003a). *Range of Practice in Banks' Internal Ratings Systems*.  
Скопировано с сайта <http://учебники.информ2000.ru>      Разработка электронных библиотек <https://право.информ2000.рф>  
BaseL Committee on Banking Supervision, Document No. 99

- BCBS (2003b). The 2002 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk : Summary of the Data Collected*, Bank for International Settlementment document.
- BCBS (2005). Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework*, Bank for International Settlementment document.
- Beale E.M.L. (1974). The Scope of Jordan Estimation in Statistical Computing. — Journ. Inst. Math. Appl., vol. 10, 138–140.*
- Bec F., Salem M.B., Carrasco M. (2004). Tests for Unit-Root Versus Threshold Specification with an Application to the Purchasing Power Parity Relationship, Journal of Business and Economic Statistics, 22, 382–395.*
- Bedford T. and Cooke R.M. (2001). Probability Density Decomposition for Conditionally Dependent Random Variables Modeled by Vines, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 32, 245–268.*
- Bedford T. and Cooke R.M. (2002) Vines — a New Graphical Model for Dependent Random Variables, Annals of Statistics, 30, 1031–1068.*
- Ben-Kaabia M. and Gil J.M. (2006). Asymmetric Price Transmission in the Spanish Lamb Sector, European Review of Agricultural Economics, 34, 53–80*
- Bera A. and Higgins M. (1993). ARCH Models: Properties, Estimation and Testing. Journal of Economic Surveys 7, 305–362.*
- Berben R.P. and D. van Dijk (1999). Unit Root Tests and Asymmetric Adjustment: A Reassessment, Working paper, Tinbergen Institute, Erasmus University of Rotterdam*
- Berg D., Bakken H. (2007). Copula Goodness-of-Fit Testing: an Overview and Power Comparison. Technical Report, University of Oslo, Statistical Research Report no. 10.*
- Berg D. (2009). Copula Goodness-of-Fit Testing: An Overview and Power Comparison, The European Journal of Finance, forthcoming.*
- Berkes I. and Horvath L. (2003). The Rate of Consistency of the Quasi-Maximum Likelihood Estimator. Statistics and Probability Letters 61, 133–143.*
- Berkes I. and Horvath L. (2004). The Efficiency of the Estimators of the Parameters in GARCH Processes. Annals of Statistics 32, 633–655.*
- Berkes I., L. Horvath and Kokoszka P. (2003). GARCH Processes: Structure and Estimation, Bernoulli 9, 201–227.*

- Berkowitz, J.* (2001). Testing Density Forecasts with Applications to Risk Management, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19, 465-474.
- Bernardo J.M. and Smith A.F.M.* (1994). *Bayesian Theory*, Wiley.
- Biais B., Glosten L., Spatt C.* (2005). Market Microstructure: A Survey of Microfoundations, Empirical Results, and Policy Implications, *Journal of Financial Markets*, 8, 217-264.
- Bharath S. and Shumway T.* (2008). Forecasting Default with the Merton Distance to Default Model, *Review of Financial Studies*, 21(3), 1339-1369.
- Biais B., Glosten L. and Spatt C.* (2005). Market Microstructure: a Survey of Microfoundations, Empirical Results and Policy Implications, *Journal of Financial Markets*, 8(2), 217-264.
- Bielecki T. and Rutkowski M.* (2002). *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer-Verlag.
- Black F.* (1976). Studies in Stock Price Volatility Changes. Глава в Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, 177-181.
- Black F. and Scholes M.* (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Blanchard O. and Quah D.* (1989). The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Aggregate Supply Disturbances, *American Economic Review*, 79, 655-673.
- Bollerslev T.* (2009). Glossary to ARCH (GARCH). Глава в *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honour of Robert F. Engle* (под редакцией Т. Bollerslev, J.R. Russell & М. Watson). Oxford University Press.
- Bollerslev T., Chou R. and Kroner K.* (1992). ARCH Modeling in Finance: a Selective Review of the Theory and Empirical Evidence. *Journal of Econometrics* 52, 5-59.
- Bollerslev T., Engle R.F. and Nelson D.B.* (1994). ARCH Models. Глава в *Handbook of Econometrics* (под редакцией R. Engle & D. McFadden), oii 4. Elsevier Science.
- Bollerslev T.* (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bollerslev T.* (1988). On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process, *Journal of Time Series Analysis*, 9, 121-131.



- Bollerslev T.* (1990). Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model, *The Review of Economics and Statistics*, **72(3)**, 498–505.
- Bollerslev T. and Mikkelsen H.O.* (1996). Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility, *Journal of Econometrics*, **73**, 151–184.
- Bollerslev T., Engle R. and Wooldridge J.* (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, *Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.
- Bollerslev T., Uta Kretschmer U., Pigorsch C. and Tauchen G.* (2009). A Discrete-Time Model for Daily S&P500 Returns and Realized Variations: Jumps and Leverage Effects *Journal of Econometrics*, **150(2)**, 151–166.
- Bougerol P. and Picard N.* (1992a). Stationarity of GARCH Processes and of Some Nonnegative Time Series. *Journal of Econometrics* **52**, 115–127.
- Bougerol P. and Picard N.* (1992b). Strict Stationarity of Generalized Autoregressive Process. *The Annals of Probability* **20**, 1714–1730.
- Bouyé E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G. and Roncalli T.* (2000). Copulas for Finance a Reading Guide and Some Applications, Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, Working Paper.
- Brandt M. and Diebold F.* (2006) A No-Arbitrage Approach to Range-Based Estimation of Return Covariances and Correlations, *Journal of Business*, **79**, 61–74.
- Brandt M. and Jones* (2006). Volatility Forecasting With Range-Based EGARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **24**, 470–486.
- Breidt F., Crato N. and de Lima P.* (1998). The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility, *Journal of Econometrics*, **83**, 325–348.
- Breslow N.E. and Clayton D.G.* (1993). Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models, *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 9–25.
- Breymann W., Dias A. and Embrechts P.* (2003). Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance, *Quantitative Finance*, **3**, 1–14.
- Brooks S.P.* (1997). Markov Chain Monte Carlo Method and Its Application, *The Statistician*, **47(1)**, 69–100.

- Brummer B., von Cramon-Taubadel S. and Zorya S. (2006). Vertical Price Transmission Between Wheat and Flour in Ukraine: A Markov-Switching Vector Error Correction Approach, 2006 Annual Meeting, August 12-18, 2006, Queensland, Australia, International Association of Agricultural Economists.*
- Buckland S.T., Burnham K.P. and Augustin N.H. (1997). Model Selection: an Integral Part of Inference, Biometrics, 53, 603–618.*
- Burnham K.P. and Anderson D.R. (1998). Model Selection and Inference: a Practical Information-Theoretic Approach, Springer-Verlag, New York.*
- Cai J. (1994). A Markov Model of Switching-Regime ARCH. Journal of Business & Economic Statistics 12, 309–316.*
- Cai B. and Dunson D.B. (2006). Bayesian Covariance Selection in Generalized Linear Mixed Models, Biometrics, 62(2), 446–457.*
- Camacho M. (2005). Markov-Switching Stochastic Trends and Economic Fluctuations, Journal of Economic Dynamics and Control, 29, 135–158.*
- Cameron C., Li T., Trivedi P. and Zimmer D. (2004). Modelling the Differences in Counted Outcomes Using Bivariate Copula Models with Application to Mismeasured Counts, Econometrics Journal, 7, 566–584.*
- Cameron C., Li T., Trivedi P. (2005). Microeconometrics: Methods and Applications. — New York, Cambridge University Press.*
- Campbell J., Lo A. and MacKinlay C. (1997). The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press: New Jersey.*
- Caner M. and Hansen B.E. (1998). Threshold Autoregressions with a Unit Root, Working paper, University of Wisconsin, Madison.*
- Castri S. and Benedetto F. (2006). There is Something about Parmalat (On Directors and Gatekeepers), Discussion paper, Bocconi University, Milan.*
- Carty L. and Lieberman D. (1996). Defaulted Bank Loan Recoveries. Moody's Special Report, November 1996.*
- Chambers J. (1973). Fitting Nonlinear Models: Numerical Techniques. — Biometrika, vol. 60, 1–13.*
- Chan K.S. (1993). Consistency and Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of a Threshold Autoregressive Model, Annals of Statistics, 21, 520–533*
- Chan W.H. and Maheu J.M. (2002). Conditional Jump Dynamics in Stock Market Returns, Journal of Business and Economic Statistics, 20, 377–*

- Chen X. and Fan Y.* (2006). Estimation and Model Selection of Semiparametric Copula-Based Multivariate Dynamic Models Under Copula Misspecification, *Journal of Econometrics*, 135, 125–154.
- Chen X., Fan Y. and Patton A.* (2004). Simple Tests for Models of Dependence Between Multiple Financial Time Series, with Applications to U.S. Equity Returns and Exchange Rates, London Economics Financial Markets Group Working paper n. 483.
- Chen K., Fan J. and Jin Z.* (2006). Design-Adaptive Minimax Local Linear Regression for Longitudinal/Clustered Data. *to appear in Statistica Sinica*.
- Chernov M., Gallant A.R., Ghysels E. and Tauchen G.* (2003). Alternative Models for Stock Price Dynamics, *Journal of Econometrics*, 116, 225–257.
- Cherubini U., Vecchiato W. and Luciano E.* (2004). *Copula Methods in Finance*, Wiley.
- Cheung Y.W. and Lai K.S.* (1993). Finite-sample Sizes of Johansen's Likelihood Ratio Tests for Cointegration, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55, 313–328.
- Choi I.* (2001). Unit Root Tests for Panel Data, *Journal of International Money and Finance*, 20, 249–272.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C.L.* (1999). Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and to What End?, Chapter 2 in J. B. Taylor and M. Woodford, (eds.), *Handbook of Macroeconomics, Volume 1A*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Christoffersen P.* (2003). *Elements Of Financial Risk Management*, Academic Press.
- Clayton D.G.* (1978). A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence, *Biometrika*, 65, 141–151.
- Clemen M.N. and Jouini R.T.* (1996). Copula Models for Aggregating Expert Opinions, *Operations Research*, 44, 444–457.
- Clements M.P. and Krolzig H.M.* (1998) Acomparision of the Forecast Performance of Markov-Switching and Threshold Autoregressive Models of US GNP, *Econometrics Journal*, 1, 47–75.
- Cochrane J.* (2005). *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- Cohen K. J., Hawanini G.A., Maier S.F., Schwartz R.A., Whitcomb D.K.* (1983) Friction in the Trading Process and the Estimation of Systematic Risk, *Journal of Financial Economics*, 12, 263–278.

- Coleman A.M.G.* (1995). Arbitrage, Storage and the 'Law of One Price': New Theory for the Time Series Analysis of an Old Problem. Working paper, Princeton University, USA.
- Coleman A.M.G.* (2004). Storage, Slow Transport, and the Law of One Price: Evidence from the Nineteenth Century U.S. Corn Market. Discussion Paper No. 502, University of Michigan, USA.
- Coles S., Heffernan J. and Tawn J.* (1999). Dependence Measures for Extreme Value Analyses, *Extremes*, 2(4), 339–365.
- Conover W.J.* (1999). *Practical Nonparametric Statistics*, 3rd ed. Wiley.
- Corsi F.* (2009). A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility, *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
- Corsi F., Zumbach G., Müller U. and Dacorogna M.* (2001). Consistent High-Precision Volatility from High Frequency Data, *Economic Notes*, 30, 183–204.
- Corsi F., Mittnik S., Pigorsch C., Pigorsch U.* (2008a). The Volatility of Realized Volatility, *Econometric Reviews*, 27, 46–78.
- Corsi F., Pirino D. and Reno' R.* (2008b) Volatility Forecasting: the Jumps do Matter, Discussion paper, Quaderni del Dipartimento Di Economia Politica, Universita' Degli Studi Di Siena.
- Credit Suisse Financial Products* (1997). *CreditRisk+ : A Credit Risk Management Framework*, Technical document.
- Christoffersen P.* (2003). Elements of Financial Risk Management. Academic Press.
- Crouhy M., Galai D. and Mark R.* (2000). A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models, *Journal of Banking and Finance*, 24(1-2), 59–117.
- Crosbie P. and Bohn J.* (2001-2003). *Modeling Default Risk*. Moody's KMV, Technical document.
- Crowder M.J.* (1978). Beta-Binomial Anova for Proportions, *Applied Statistics*, 27, 34–37.
- Gruz M.G.* (2002). Modelling, Measuring and Hedging Operational Risk.- New York, Wiley.
- Curci G. and Corsi F.* (2004). Discrete Sine Transform Approach for Realized Volatility Measurement. Working Paper, University of Southern Switzerland

- Dacorogna M.M., Muller U.A., Nagler R.J., Olsen R.B. and Pictet O.V.* (1993). Geographical Model for the Daily and Weekly Seasonal Volatility in the Foreign Exchange Market. *Journal of International Money and Finance* 12, 413–438.
- Dacorogna M., Gencay R., Müller U., Olsen R.B., Pictet O.V.* (2001). *An Introduction to High-Frequency Finance*. Academic Press: London.
- D'Agostino R.B. and Stephens M.A.* (1986). *Goodness-of-Fit Techniques*, Marcel Dekker Inc.: New York.
- Dalla Valle L. and Giudici P.* (2008). A Bayesian Approach to Estimate the Marginal Loss Distributions in Operational Risk Management, *Computational Statistics and Data Analysis*, 52, 3107–3127.
- Dalla Valle L.* (2008). Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management, *Methodology and Computing in Applied Probability*, forthcoming.
- Daniélsson J. and de Vries C.G.* (2000). Value-at-Risk and Extreme Returns, *Annales d'Économie et de Statistique*, 60, 239–270.
- Daul S., De Giorgi E., Lindskog F. and McNeil A.* (2003). The Grouped *t*-Copula with an Application to Credit Risk, *Risk*, 1, 73–76.
- David H.A.* (1981) *Order Statistics*, 2 ed., Wiley.
- Davidson J.E.H., Hendry D.F., Srba F. and Yeo S.* (1978). Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship Between Consumer's Expenditure and Income in the United Kingdom, *Economic Journal*, 88, 661–692
- Davies R.B.* (1987). Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative. *Biometrika* 75, 33–43.
- Davies N., Triggs C.M. and Newbold P.* (1977). Significance Levels of the Box-Pierce Portmanteau Statistic in Finite Samples, *Biometrika*, 64, 517–522.
- Degiannakis S. and Xekalaki E.* (2004). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) Models: a Review. *Quality Technology and Quantitative Management* 1, 271–324.
- Deheuvels P.* (1979). La Fonction de Dépendance Empirique et ses Propriétés: Un Test Non Paramétrique d'Indépendance, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, 5e série*, 65, 274–292.
- Deheuvels P.* (1984). The characterization of distributions by order statistics and record values — a unified approach. *Journal of Applied Probability*,

- DeLong E.R., DeLong D. M. and Clarke-Pearson D.L.* (1988). Comparing the Areas under Two or More Correlated Receiver Operating Characteristic Curves: A Non-parametric Approach, *Biometrics*, **44(3)**, 837–845.
- Demarta S. and McNeil A.* (2005). The t Copula and Related Copulas, *International Statistical Review*, **73**, 111–129.
- Dempster A.P., N.M. Laird and Rubin D.B.* (1977). Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **39**, 1–38.
- Denker M. and Keller G.* (1983). On U-Statistics and V. Mises' Statistics for Weakly Dependent Processes, *Zeitschrift fuer Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **64**, 505–522.
- Denuit M. and Lambert P.* (2005). Constraints on Concordance Measures in Bivariate Discrete Data, *Journal of Multivariate Analysis*, **93**, 40–57.
- Deo R., Hurvich C. and Lu Y.* (2006), Forecasting Realized Volatility Using a Long-Memory Stochastic Volatility Model: Estimation, Prediction and Seasonal Adjustment, *Journal of Econometrics*, **131(1–2)**, 29–58.
- Dias A. and Embrechts P.* (2004). Change-Point Analysis for Dependence Structures in Finance and Insurance. In: *Risk Measures for the 21st Century*, ed. by Giorgio Szegoe, 321–335, Wiley Finance Series.
- Diaz D. and Gemmill G.* (2001). A Comparison of Two Credit-Risk Models, Presented at the Australasian Finance Conference 2001.
- Di Clemente A. and Romano C.* (2004). A Copula-Extreme Value Theory Approach for Modelling Operational Risk. In: M.G. Cruz (ed.), *Operational Risk Modelling and Analysis: Theory and Practice*, Risk Books, London.
- Diebold F.* (1986). Modeling the Persistence of Conditional Variances: a Comment. *Econometric Reviews* **5**, 51–56.
- Diebold F.* (2004). The Nobel Memorial Prize for Robert F. Engle. *Scandinavian Journal of Economics* **106**, 165–185.
- Diebold F. and Inoue A.* (2001). Long Memory and Regime Switching. *Journal of Econometrics* **105**, 131–159.
- Diebold F. and Lopez J.* (1995). Modeling Volatility Dynamics. Глава в *Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects* (под редакцией К. Hoover), 427–472. Kluwer Academic Press.
- Diebold F.X., Lee JH. and Weinbach G.* (1994) Regime Switching with Time-Varying Transition Probabilities, in C.P. Hargreaves (ed), *Nonstationary time series analysis and cointegration*, chapter 10, Oxford University Press, Oxford, UK.

- Dietsch M. and Petey J.* (2007). The Impact of Size, Sector and Location on Credit Risk in SME Loans Portfolios, Working Paper, Université Robert Schuman de Strasbourg
- Ding Z., Granger C.W.J. and Engle R.F.* (1993). A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83–106.
- Dobrić J. and Schmid F.* (2007). Testing Goodness-of-Fit for Parametric Families of Copulas with an Application to Financial Data, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 34(4), 1053–1068.
- Dobrić J. and Schmid F.* (2007). A Goodness of Fit Test for Copulas Based on Rosenblatt's Transformation, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(9), 4633–4642.
- Dobson A.J.* (2002). Introduction to Generalized Linear Model. — Chapman and Hall.
- Doornik J.A.* (2002) *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, Timberlake Consultants Press: London, and <http://www.doornik.com/index.html>, Oxford, UK.
- Dueker J.* (1997). Markov Switching in GARCH Processes and Mean-Reverting Stock Market Volatility. *Journal of Business & Economic Statistics* 15, 26–34.
- Dufour J.M.* (1997). Some Impossibility Theorems in Econometrics with Applications to Structural and Dynamic Models, *Econometrica*, 65(6), 1365–1388.
- Dumas B.* (1992). Dynamics Equilibrium and the Real Exchange Rate in a Spatially Separated World, *Review of Financial Studies*, 5, 153–180.
- Eberhart A.C. and Weiss L.A.* (1998). The Importance of Deviations from the Absolute Priority Rule in Chapter 11 Bankruptcy Proceedings, *Financial Management*, 27(4), 106–110.
- Edgerton D. and Shukur G.* (1999). Testing Autocorrelation in a System Perspective, *Econometric Reviews*, 18, 343–386.
- Efron B.* (1979) Computer and the Theory of Statistics: Thinking the Unthinkable. — SIAM Review.
- Efron B. and Tibshirani R.* (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, London.
- Efron B. and Tibshirani R.* (1998). The Problem of Regions, *Annals of Statistics*, 16, 1687–1718.

- Elliott G., Rothenberg T., Stock J.* (1996). Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root, *Econometrica*, **64**, 813–836.
- Embrechts P., McNeil A. and Straumann D.* Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In M.A.H. Dempster (ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press: Cambridge.
- Embrechts P. and Puccetti G.* (2007). Aggregating Risk Across Matrix Structures Loss Data: the Case of Operational Risk. Working Paper, ETH Zurich. 2007.
- Emery K., Cantor R. and Avner R.* (2004). Recovery Rates on North American Syndicated Bank Loans 1989–2003, *Moody's Investors Service*, March 2004.
- Enders W. and Granger C.W.J.* (1998). Unit-Root Tests and Asymmetric Adjustment with an Example Using the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, **16**, 304–311.
- Engle R.F.* (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1007.
- Engle R.F.* (1990). Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of 87. *Review of Financial Studies* **3**, 103–106.
- Engle R.F.* (2001). GARCH 101: The use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives* **15**, 157–168.
- Engle R.F.* (2004). Nobel Lecture. Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice. *American Economic Review* **94**, 405–420.
- Engle R.F. and Gonzalez-Rivera G.* (1991). Semiparametric ARCH Models. *Journal of Business & Economic Statistics* **19**, 3–29.
- Engle R.F. and Patton A.J.* (2001). What Good is a Volatility Model? *Quantitative Finance* **1**, 237–245.
- Engle R.F.* (2002a). Dynamic Conditional Correlation — A Simple Class of Multivariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 339–350.
- Engle R.F.* (2002b). New Frontiers for Arch Models, *Journal of Applied Econometrics*, **17**, 425–446.
- Engle R.F. and Bollerslev T.* (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances. *Econometric Reviews*, **5**, 1–50.



- Engle R. F. and Granger C.W.J. (1987). Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, 55, 251–276.
- Engle R.F. and Yoo C.W.J. (1991). Cointegrated Economic Time Series: An Overview with New Results, in R.F. Engle and C.W.J. Granger (eds.), *Long-run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Oxford University Press, New York.
- Engle R.F. and Ng V.K. (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, *Journal of Finance*, 48, 1749–1778.
- Engle R. and Kroner F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory*, 11, 122–150.
- Engle R.F., Sheppard K. (2001). Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, NBER Working Papers, n. 8554.
- Engle R.F., Lilien D.M. and Robbins R.P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model, *Econometrica*, 55, 391–407.
- Engle R.F., Ng V.K. and Rothschild M. (1990). Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills, *Journal of Econometrics*, 45, 213–238.
- Eraker B., Johannes M.S. and Polson N.G. (2003). The Impact of Jumps in Volatility, *Journal of Finance*, 58, 1269–1300.
- Erb C., Harvey C. and Viskanta T. (1994). Forecasting International Equity Correlations, *Financial Analysts Journal*, 50, 32–45.
- Fang. Y. (1996). Volatility Modeling and Estimation of High-Frequency Data with Gaussian Noise, Unpublished doctoral thesis, MIT, Sloan School of Management.
- Fang K., Kotz S. and Hg K. (1987). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman Hall: London.
- Fantazzini D. (2008). Dynamic Copula Modelling for Value at Risk, *Frontiers in Finance and Economics*, 5(2), 1–36.
- Fantazzini D. (2009a). Forecasting Default Probability without Accounting Data: Evidence from Russia, In: G. Gregoriou (ed.), *Stock Market Volatility*, 527–548, Chapman Hall-CRC/Taylor and Francis: London.
- Fantazzini D. (2009b). The Effects of Misspecified Marginals and Copulas on Computing the Value at Risk: A Monte Carlo Study, *Computational Data Analysis*, 53(6), 2168–2188.

- Fantazzini D.* (2009c). A Dynamic Grouped-T Copula Approach For Market Risk Management, In: G. Gregoriou (Ed.), *A VaR Implementation Handbook*, 253–282, McGraw-Hill: New York.
- Fantazzini D.* (2010). Three-Stage Semi-parametric Estimation of T-Copulas: Asymptotics, Finite-Sample Properties and Computational Aspects *Computational Statistics and Data Analysis*, forthcoming.
- Fantazzini D. and Figini S.* (2009a). Random Survival Forest Models for SME Credit Risk Measurement, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(1), 29–45.
- Fantazzini D. and Figini S.* (2009b). Default Forecasting for Small-Medium Enterprises: Does Heterogeneity Matter? *International Journal of Risk Assessment and Management*, 11(1/2), 138–163.
- Fantazzini D., Dalla Valle L. and Giudici P.* (2007). Empirical Studies with Operational Loss Data: DallaValle, Fantazzini and Giudici Study. In: *Operational Risk: A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis*, pp. 274–277. Wiley, New Jersey.
- Fantazzini D., Degiuli E. and Maggi M.* (2008a). A new Approach for Firm Value and Default Probability Estimation beyond the Merton Models *Computational Economics*, **31(2)**, 161–180.
- Fantazzini D., Dalla Valle L. and Giudici P.* (2008b). Copulae and Operational Risks, *International Journal of Risk Assessment and Management*, 9(3), 238–257.
- Felsenstein J.* (1985). Confidence Limits on Phylogenies: an Approach Using the Bootstrap, *Evolution*, 39, 783–791.
- Ferguson S.T., Genest C. and Hallin M.* (2000). Kendall's Tau for Serial Dependence, *Canadian Journal of Statistics*, 28, 587–604.
- Fermanian J. and Scaillet O.* (2003). Nonparametric Estimation of Copulas for Time Series, *Journal of Risk*, 5, (2003), 25–54.
- Fermanian J.* (2005). Goodness of Fit Tests for Copulas, *Journal of Multivariate Analysis*, 95, 119–152.
- Fidrmuc J., Hainz C., Malesich A.* (2007). Default Rates in the Loan Market for SMEs: Evidence from Slovakia. — William Davidson Institute — University of Michigan (Working Paper).
- Fielding A.H. and Bell J.F.* (1997). A Review of Methods for the Assessment of Prediction Errors in Conservation Presence/Absence Models, *Environmental Conservation*, 24, 38–49.

- Fletcher R.* (1965). Function Minimization without Evaluating Derivatives. — a Review, *Comput. J.*, vol. 8, 33–41.
- Fons J.S.* (1994). Using Default Rates to Model the Term Structure of Credit Risk, *Financial Analysts Journal*, September-October, 25–32.
- Franqc C., Roussignol M. and Zako ian J.* (2001). Conditional Heteroskedasticity Driven by Hidden Markov Chains. *Journal of Time Series Analysis* 22, 197–220.
- Franqc C. and Zako ian J.* (2005). The L2-Structures of Standard and Switching-Regime GARCH Models. *Stochastic Processes and their Applications* 115, 1557–1582.
- Franqc C. and Zako ian J.* (2009). A Tour in the Asymptotic Theory of GARCH Estimation. Глава в *Handbook of Financial Time Series* (под редакцией Т. Andersen, R.A. Davis, J.-P. Kreiss and Т. Mikosch). Springer.
- Frank M.J.* (1979). On the Simultaneous Associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ , *Aequationes Mathematicae*, 19, 194–226.
- Frees E.W. and Valdez E.* (1998). Understanding Relationship Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, 2, 1–25.
- French K.R. and Roll R.* (1986). Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders, *Journal of Financial Economics*, 17(1), 5–26.
- Frerichs H. and Löffler G.* (2003). Evaluating Credit Risk Models Using Loss Density Forecasts, *Journal of Risk*, 5, 1-23.
- Frey G. and Manera M.* (2007). Econometric Models Of Asymmetric Price Transmission, *Journal of Economic Surveys*, Blackwell Publishing, vol. 21(2), pages 349–415, 04.
- Fuertes A.M. and Kalotychou E.* (2006). Early Warning Systems for Sovereign Debt Crises: The Role of Heterogeneity, *Computational Statistics and Data Analysis* 51, 1420–1441.
- Gamerman D.* (1997a). Sampling from the Posterior Distribution in Generalized Linear Mixed Models, *Statistics and Computing*, 7, 57–68.
- Gamerman D.* (1997b). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Chapman and Hall, London.
- Gelfand A.E. and Sahu S.* (1999). Gibbs Sampling, Identifiability and Improper Priors in Generalized Linear Mixed Models, *Journal American Statistical Association*, 94, 247–253.

- Gelman A., Carlin J.C., Stern H., Rubin D.B.* (1995). *Bayesian Data Analysis*. — New York, Chapman and Hall.
- Gelman A., Carlin J.C., Stern H. and Rubin D.B.* (2004). *Bayesian Data Analysis*. Second edition. Chapman and Hall, New York.
- Genest C.* (1987). Frank's Family of Bivariate Distributions, *Biometrika*, 74, 549–555.
- Genest C. and MacKay J.* (1986). The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals, *American Statistics*, 40, 280–285.
- Genest C. and Rivest L.* (1993). Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas, *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1034–1043.
- Genest C. and Favre A.C.* (2007). Everything you Always Wanted to Know About Copula Modeling but were Afraid to Ask, *Journal of Hydrologic Engineering*, 12, 347–368.
- Genest C. and Rémillard B.* (2008) Validity of the Parametric Bootstrap for Goodness-of-Fit Testing in Semiparametric Models, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 44(6), 1096–1127.
- Genest C., Ghoudi K. and Rivest L.* (1995). A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions, *Biometrika*, 82, 543–552.
- Genest C., Quessy J.F. and Rémillard B.* (2006a) Goodness-of-Fit Procedures for Copula Models Based on the Probability Integral Transform, *Scandinavian Journal of Statistics*, 33, 337–366.
- Genest C., Quessy J.F. and Rémillard B.* (2006b). On the Joint Asymptotic Behavior of Two Rank-Based Estimators of the Association Parameter in the Gamma Frailty Model, *Statistics and Probability Letters*, 76, 10–18.
- Genest C., Rémillard B. and Beaudoin D.* (2009) Omnibus Goodness-of-Fit Tests for Copulas: A Review and a Power Study, *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 199–213.
- Geweke J. and Porter-Hudak S.* (1984). The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221–238.
- Ghaddar D.K. and Tong H.* (1981). Data Transformation and Self-Exciting Threshold Autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society, C*, 30, 238–248.
- Gine E. and Zinn J.* (1990). Bootstrapping General Empirical Measures, *The Annals of Probability*, 18(2), 851–869.

- Giot P., Laurent S.* (2003). Value-at-Risk for Long and Short Positions, *Journal of Applied Econometrics*, **18**, 641–664.
- Giraitis L., Kokoszka P. and Leipus R.* (2000). Stationary ARCH Models: Dependence Structure and Central Limit Theorem. *Econometric Theory* **16**, 3–22.
- Giraitis L., Leipus R. and Surgailis D.* (2007). Recent Advances in ARCH Modelling. Глава в *Long Memory in Economics* (под редакцией G. Teyssiére and A.P. Kirman). Springer.
- Giudici P.* (2003). *Applied Data Mining, Statistical Methods for Business and Industry*, Wiley.
- Glen A.G., Leemis L.M., and Barr D.R.* (2001). Order Statistics in Goodness-of-Fit Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **50**(2), 209–213.
- Glosten L.R., Jaganathan R. and Runkle D.* (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Goin J.E.* (1982). ROC Curve Estimation and Hypothesis Testing: Applications to Breast Cancer Detection, *The Journal of the Pattern Recognition Society*, **15**, 263–269.
- Goldfeld S.M. and Quandt R.E.* (1973). A Markov Model for Switching Regressions, *Journal of Econometrics*, **1**, 3–16.
- Gonçalves S. and Meddahi N.* (2005). Bootstrapping Realized Volatility. Working Paper, Université de Montreal.
- Gonçalves S. and Meddahi* (2008). Edgeworth Corrections for Realized Volatility, *Econometric Reviews*, **27**, 139–162
- González M. and Gonzalo J.* (1997). Threshold Unit Root Models, Working paper n. 97–50, Universidad Carlos III de Madrid.
- Gonzalez-Rivera G.* (1998). Smooth Transition GARCH Models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* **3**, 61–78.
- Gonzalo J. and Pitarakis J.Y.* (2006). Threshold Effects in Multivariate Error Correction Models, *Palgrave Handbook of Econometrics*, Vol. I, Chapter 15.
- Goodwin B.K. and Piggott N.* (2001) Spatial Market Integration in the Presence of Threshold Effects, *American Journal of Agricultural Economics*, **83**, 302–317.
- Gordy M.* (2000). A Comparative Anatomy of Credit risk Models, *Journal of Applied Finance*, **24**(1-2), 119–149.

- Gourieroux C. and Monfort A.* (1995). *Statistics and Econometric Models*, Cambridge University Press: Cambridge.
- Gourieroux C., Jasiak J.* (2001). *Financial Econometrics: Problems, Models, and Methods*. Princeton University Press.
- Granger C.* (1981). Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, 16, 121–130.
- Granger C. and Ding Z.* (1996). Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns. *Journal of Econometrics* 73, 185–215.
- Granger C. and Hyung N.* (2004). Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P500 absolute returns. *Journal of Empirical Finance* 11, 399–421.
- Granger C. and Ter asvirta T.* (1999). A Simple Nonlinear Time Series Model with Misleading Linear Properties. *Economics Letters* 62, 161–165.
- Granger C. and Joyeux R.* (1980). An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing. *Journal of Time Series Analysis* 4, 221–238.
- Granger C.* (1981). Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, 16, 121–130.
- Granger C. and Pesaran M.* (2000). Economic and Statistical Measures of Forecast Accuracy, *Journal of Forecasting* 19, 537–560.
- Granger C., Patton A., Terasvirta T.* (2006). Common Factors in Conditional Distributions for Bivariate Time Series, *Journal of Econometrics*, 132, 43–57.
- Gray S.* (1996). Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-switching Process. *Journal of Financial Economics* 42, 27–62.
- Greene W.* (2002). *Econometric Analysis*, Prentice Hall.
- Griep C. and De Stefano M.* (2001). Standard & Poor's Official Response to the Basel Committee's Proposal, *Journal of Banking and Finance*, 25(1), 149–170.
- Grossman R., O'Shea S. and Bonelli S.* (2001). Bank Loan and Bond Recovery Study: 1997–2000, *Fitch Loan Products Special Report*, March 2001.
- Gumbel E.J.* (1960). Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 55, 698–707.
- Gupton G.M., Finger C.C. and Bhatia M.* (1997). *CreditMetrics. Technical*

- Hall S., Psaradakis Z. and Sola M.* (1997). Switching Error-Correction Models of House Prices in the United Kingdom, *Economic Modelling*, 14, 517–527.
- Hall P. and Yao Q.* (2003). Inference in ARCH and GARCH Models with Heavy-tailed Errors. *Econometrica* 71, 285–317.
- Hamilton J.D.* (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, 57, 357–384.
- Hamilton J.* (1990). Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics* 45, 39–70.
- Hamilton J. and Susmel R.* (1994). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime. *Journal of Econometrics* 64, 307–333.
- Hamilton J.D.* (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hamilton J.D. and Raj B.* (2002). *Advances in Markov-Switching Models. Applications in Business Cycle Research and Finance*, Physica-Verlag: Heidelberg, Germany.
- Hamilton D., Cantor R. and Ou S.* (2002). Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, *Moody's Investors Services*, February 2002.
- Hanley A. and McNeil B.* (1983). A Method of Comparing the Area under Two ROC Curves Derived from the Same Cases, *Diagnostic Radiology*, 148, 839–843.
- Hansen B.* (1994). Autoregressive Conditional Density Estimation, *International Economic Review*, 35(3), 705–730.
- Hansen B.* (1997). Inference in TAR Models, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2, 1–14.
- Hansen B.* (1999). Testing Linearity, *Journal of Economic Surveys*, 13, 551–576.
- Hansen B.E. and Seo B.* (2002). Testing for Two-Regime Threshold Cointegration in Vector Error-Correction Models, *Journal of Econometrics*, 110, 293–318.
- Hansen P.R. and Lunde A.* (2004). An Unbiased Measure of Realized Variance. Unpublished Manuscript, Stanford University.
- Hansen P.R. and Lunde A.* (2005). A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH (1;1)? — *Journ. Appl. Econom.*,

- Hansen P.R. and Lunde A. (2006a). Consistent Ranking of Volatility Models, Journal of Econometrics, 131, 97–121.*
- Hansen P.R. and Lunde A. (2006b). Realized Variance and Market Microstructure Noise (with discussion), Journal of Business and Economic Statistics, 24, 127–218.*
- Harris L. (1990). Estimation of Stock Variance and Serial Covariance from Discrete Observations, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, 291–306.*
- Hao H. (2006). Is the Structural Approach More Accurate than the Statistical Approach in Bankruptcy Prediction?. Queen's School of Business Working Paper, May – 2006.*
- Hartley H.O. (1961). Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Nonlinear Regression Function. Technometrics, vol. 3, 269–275.*
- Hasbrouck J. (1988). Trades, Quotes, Inventories and Information, Journal of Financial Economics, 22, 229–252.*
- Hasbrouck J. and Sofianos G. (1993). The Trades of Market Makers: An Empirical Analysis of NYSE Specialists, Journal of Finance, 48(5), 1565–1593.*
- Hasbrouck J. (2007). Empirical Market Microstructure, Oxford University Press.*
- Hastie T., Tibshirani R. and Friedman J.H. (2001). The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction, Springer.*
- Hayashi F. (2000). Econometrics, Princeton University Press.*
- He C. and Teräsvirta T. (1999). Properties of Moments of a Family of GARCH Processes. Journal of Econometrics 92, 173–192.*
- He C., Teräsvirta T. and Malmsten H. (2002). Moment structure of a family of first-order exponential GARCH models. Econometric Theory 18, 868–885.*
- Heckscher E.F. (1916). Växelkursens Grundval vid Pappersmyntfot, Ekonomisk Tidskrift, 18, 309–312.*
- Höfding D. (1940). Masstabinvariante Korrelationstheorie, Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität, 5, 181–233.*
- Hogg R.V. and Craig A.T. (1965). Mathematical Statistics, Macmillan.*
- Hollander M. and Wolfe D.A. (1973). Nonparametric Statistical Inference.*



- Hong Y. and Li H.* (2005). Nonparametric Specification Testing for Continuous-Time Models with Application to Spot Interest Rates, *Review of Financial Studies*, 18, 37–84.
- Horvath M.T.K. and Watson M.W.* (1995). Testing for Cointegration when Some of the Cointegrating Vectors Are Prespecified, *Econometric Theory*, 11, 984–1014.
- Hosking J.R.M.* (1980). The Multivariate Portmanteau Statistic, *Journal of the American Statistical Association*, 75, 602–608.
- Hosking J.* (1981). Fractional Differencing. *Biometrika* 68, 165–176.
- Hosking J.R.M. and Wallis J.R.* (2007). Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution, *Technometrics*, 29, 339–349.
- Hougaard P.* (1986). A Class of Multivariate Failure Time Distributions, *Biometrika*, 73, 671–678.
- Hu Y. and Perraudin W.* (2002). The Dependence of Recovery Rates and Defaults, Mimeo, Birbeck College.
- Huang N.Y.* (1970). Unified Approach to Quadratically Convergent Algorithms for Function: Minimization. — *Journ. Optim. Theory Applic.*, vol. 5,6, 405–423.
- Huang X. and Tauchen G.* (2005). The Relative Contribution of Jumps to Total Price Variance, *Journal of Financial Econometrics*, 3(4), 456–499.
- Huard D., Ivin G. and Favre A.C.* (2006). Bayesian Copula Selection, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(2), 809–822.
- Huffera F.W. and Park C.* (2007). A Test for Elliptical Symmetry, *Journal of Multivariate Analysis*, 98(2), 256–281.
- Huggins R.* (1989). On the Statistical Analysis of Capture Experiments, *Biometrika*, 76, 133–140.
- Hull J.C.* (2005). Options, Futurs and Other Derivatives. Prentice Hall.
- Hult H. and Lindskog F.* (2002). Multivariate Extremes, Aggregation and Dependence in Elliptical Distributions, *Advances in Applied Probability*, 34, 587–608.
- Hurst H.* (1951). Long Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 116, 770–799.
- Hurvich C.M., Deo R. and Brodsky J.* (1998). The Mean Squared Error of Geweke and Porter Hudak's Estimator of the Memory Parameter of a Long Memory Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, 19, 46

- Ihle., Von Cramon-Taubadel S.* (1998). A Comparison of Threshold Cointegration and Markov-Switching Vector Error Correction Models in Price Transmission Analysis. NCCC-134 Conference of Applied Commodity Price Analysis, Forecasting, and Market Risk Management, St. Louis, Missouri.
- Jacod J. and Protter P.* (1998). Asymptotic Error Distributions for the Euler Method for Stochastic Differential Equations, *Annals of Probability*, 26, 267–307.
- Jackman S.* Re-Thinking Equilibrium Presidential Approval — Markov-Switching Error Correction. Paper presented at the 12th Annual Political Methodology Summer Conference, Indiana University, Bloomington, USA, 1995.
- Jarrow R., Turnbull S.* (1999). Derivative Securities: The Complete Investor's Guide. — South-Western Publications.
- Jaynes E.T., Bretthors G.L.* (2003). Probability Theory: The Logic of Science. — Cambridge University Press.
- Joe H., Xu J.* (1996). The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models, Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report n. 166.
- Joe H.* (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*, London: Chapman Hall.
- Johansen S.* (1995). *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford: Oxford University Press.
- Johansen S.* (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231–254.
- Johansen S.* (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models, *Econometrica*, 59, 1551–1580.
- Johnson N., Kotz S., Balakrishan N.* (1994). Continuous Univariate Distributions. Vol. 1. — Wiley series in probability and statistics.
- Jondeau E. and Rockinger* (2006). The Copula–GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock–Market Application. *Journal of International Money and Finance*, N 25, p. 827–853.
- Jondeau E. and Rockinger M.* (2003). Conditional Volatility, Skewness, and Kurtosis: Existence, Persistence, and Comovements, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 1699–1737.

- Jorion P.* (2007). *Financial Risk Manager Handbook*, 4th edition, Wiley.
- Karlis D. and Kostaki A.* (2002). Bootstrap Techniques for Mortality Models, *Biometrical Journal*, **44**(7), 850–866.
- Khalaf L., Saphores J.D. and Bilodeau J.F.* (2003). Simulation-Based Exact Jump Tests in Models with Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28**, 531–553.
- Kim G., Silvapulle M.J. and Silvapulle P.* (2007). Comparison of Semiparametric and Parametric Methods for Estimating Copulas, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**(6), 2836–2850.
- Kim G. Silvapulle M.J. and Silvapulle P.* (2008). Estimating the Error Distribution in Multivariate Heteroscedastic Time Series Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**(5), 1442–1458.
- Kimberling C.H.* (1974). A Probabilistic Interpretation of Complete Monotonicity, *Aequationes Mathematicae*, **10**, 152–164.
- King J.L.* (2001). *Operational Risk: Measurement and Modelling*. Wiley, New York.
- Kohavi R., Provost F.* (1998). Glossary of Terms. Editorial for the Special Issue on Applications of Machine Learning and the Knowledge Discovery Process. — *Machine Learning*, N 30 (2/3), p. 271–274.
- Kojadinovic I., J. Yan Holmes* (2011a). Fast Large-Sample Goodness-of-Fit Tests for Copulas, Submitted.
- Kojadinovic I. and Yan J.* (2011b). A Goodness-of-Fit Test for Multivariate Multiparameter Copulas Based on Multiplier Central Limit Theorems, Submitted. *Statistics and Computing*, **21** (1), 17–30.
- Kole E., Koedijk K. and Verbeek M.* (2007). Selecting Copulas for Risk Management, *Journal of Banking and Finance*, **31**, 2405–2423.
- Koopman S.J., Jungbacker B. and Hol E.* (2005). Forecasting Daily Variability of the S&P100 Stock Index Using Historical, Realised and Implied Volatility Measures, *Journal of Empirical Finance*, **12**(3), 445–475
- Koul H.L.* (2002). *Weighted Empirical Processes in Dynamic Nonlinear Models*, Lecture Notes in Statistics, Vol 166. Springer Verlag.
- Koul H.L. and Ling S.* (2006). Fitting an Error Distribution in Some Heteroscedastic Time Series Model, *Annals of Statistics*, **34**, 994–1012.
- Kotz S., Balakrishnan N. and Johnson N.L.* (2000). *Continuous Multivariate Distributions*, volume 1, 2nd ed., Models and Applications, Wiley, New York

- Koyluoglu H. and Hickman A.* (1998). Reconcilable Differences, *RISK*, 11(10), 56–62.
- Koyluoglu H. Bangia A., Garside T.* (2002). Devil in the Parameters, *RISK*, 13(3), 26–30.
- Krolzig H.M.* (1996). Statistical Analysis of Cointegrated VAR Processes with Markovian Regime Shifts, SFB 373 Discussion Paper 25/1996, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany.
- Krolzig H.M.* (1997). *Markov-Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference, and Applications to Business Cycle Analysis.* Springer: Berlin, Germany.
- Krolzig H.M. and Toro J.* (2001). A New Approach to the Analysis of Business Cycle Transitions in a Model of Output and Employment, Department of economics discussion paper series No. 59, University of Oxford, Oxford.
- Krolzig H.M., Marcellino M. and Mizon G.* (2002). A Markov-Switching Vector Equilibrium Correction Model of the UK Labor Market, *Empirical Economics*, 27, 233–254.
- Krolzig H.M.* (2004). MSVAR- an Ox Package Designed for the Econometric Modelling of Univariate and Multiple Time Series Subject to Shifts in Regime.
- Kruskal W.* (1958). Ordinal measures of Association, *Journal of the American Statistical Association*, 53, 814–861.
- Kurowicka D. and Cooke R.M.* (2006). *Uncertainty Analysis with High Dimensional Dependence Modelling*, Wiley: New York.
- Kwiatkowski D., Phillips P. and Schmidt P. and Shin Y.* (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationary against the Alternative of a Unit Root, *Journal of Econometrics*, 54, 159–178.
- Lambert P. and Vandenhende F.* (2002). A Copula-Based Model for Multivariate Non-normal Longitudinal Lata: Analysis of a Dose Titration Safety Study on a New Antidepressant, *Statistics in Medicine*, 21, 3197–3217.
- Lamoureux C. and Lastrapes W.* (1990). Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model. *Journal of Business & Economic Statistics* 8, 225–234.
- Lee S.W. and Hansen B.E.* (1994). Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator and Test of the Stability of Parameters of the GARCH Models, *Econometric Theory* 10, 29–57.

- Li C. and Li W.* (1996). On a Double Threshold Autoregressive Heteroskedasticity Time Series Model. *Journal of Applied Econometrics* 11, 253–274.
- Libby R.* (1975). Ratios and the Prediction of Failure: Some Behavioral Evidence, *Journal of Accounting Research*, (Spring 1975), 150–161.
- Libby R., Trotman K. T. and Zimmer, I.* (1987). Member Variation, Recognition of Expertise, and Group Performance. *Journal of Applied Psychology*, (February 1987), 81–87.
- Lindner A.* (2009). Stationarity, Mixing, Distributional Properties and Moments of GARCH(p; q)-Processes. Глава в *Handbook of Financial Time Series* (под редакцией Т. Andersen, R. Davis, J.-P. Kreiss & Т. Mikosch). Springer.
- Lindskog F., McNeil A., Schmock U.* (2003). Kendall's Tau for Elliptical Distributions. — In: G. Bol, Nakhacizaden, S. Rachev, T. Ridder, K.-H. Vollmer (eds.), *Credit Risk Measurement, Evaluation and Management*. Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, Heidelberg, p. 149–156.
- Lindskog F. and McNeil A.* (2003). Common Poisson Shock Models: Applications to Insurance and Credit Risk Modelling, *ASTIN Bulletin*, 33(2), 209–238.
- Lindskog F.* (2000). Linear Correlation Estimation, Research Report, RiskLab Switzerland, August,  
<http://www.risklab.ch/Papers.html#LCELindskog>.
- Ljung G.M. and Box G.E.P.* (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, *Biometrika*, 65, 297–303.
- Lo M.C. and Zivot E.* (2001). Threshold Cointegration and Nonlinear Adjustment to the Law of One Price, *Macroeconomic Dynamics*, 5, 533–576.
- Longin F. and Solnik B.* (2001). Extreme Correlation of International Equity Markets, *Journal of Finance*, 56(2), 649–676.
- Lütkepohl H.* (1993). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, 2nd edition, New York: Springer-Verlag.
- Lütkepohl H.* (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, New York: Springer-Verlag.
- Lucas D.* (1995). Default Correlation and Credit Analysis. — *Journ. of Fixed Income* N 11, pp. 76–87.

- Lumsdaine R.L.* (1996). Asymptotic Properties of the Quasi Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models, *Econometrica*, 64, 575–559.
- MacDonald I.L. and Zucchini W.* (1997). *Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series*. Chapman and Hall: London, UK.
- Maddala G.S. and Kim I.M.* (1998). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Madhavan A. and Smidt S.* (1991). A Bayesian Model of Intraday Specialist Pricing, *Journal of Financial Economics*, 30, 99–134.
- Madhavan A. and Sofianos G.* (1997). An Empirical Analysis of the NYSE Specialist Trading, *Journal of Financial Economics*, 48, 189–210.
- Maheu J. and McCurdy T.* (2000). Identifying Bear and Bull Markets in Stock Markets. *Journal of Business & Economic Statistics* 18, 100–112.
- Maheu J.M. and McCurdy T.H.* (2004). News Arrival, Jump Dynamics and Volatility Components for Individual Stock Returns, *Journal of Finance*, 59, 755–793.
- Malevergne Y. and Sornette D.* (2003). Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependence, *Quantitative Finance*, 3, 231–250.
- Malevergne Y. and Sornette D.* (2006). *Extreme Financial Risks (From Dependence to Risk Management)*, Springer: Heidelberg.
- Malmsten H. and Ter asvirta T.* (2004). Stylized Facts on Financial Time Series and Three Popular Models of Volatility. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance* 563. Stockholm School of Economics.
- Mancini C.* (2009). Non-parametric Threshold Estimation for Models with Stochastic Diffusion Coefficient and Jumps, *Scandinavian Journal of Statistics*, 36(2), 270–296.
- Mardia K.V., Kent J. and Bibby J.M.* (1997). *Multivariate Analysis*, Academic Press: San Diego.
- Marsaglia G. and Marsaglia J.* (2004). Evaluating the Anderson-Darling Distribution, *Journal of Statistical Software*, 9(2), 1–5.
- Marshall A.* (1890). *Principles of Economics*, Macmillan Company, 8th ed., New York, USA.
- Marshall A. and Olkin I.* (1988). Families of Multivariate Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 83, 834–841.
- Marshall R. and Zeevi A.* (2002). Beyond Correlation: Extreme Co-movements Between Financial Assets, *Columbia University Working Paper*

- McAleer M. and Medeiros M.C.* (2008). Realized Volatility: A Review, *Econometric Reviews*, 27(1Ц3), 10–45.
- McNeil A.* (2008). Sampling Nested Archimedean Copulas, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(6), 567–581.
- McNeil A. and Nešlehová J.* (2009). Multivariate Archimedean Copulas, d-monotone Functions and L1-norm Symmetric Distributions, *Annals of Statistics*, 37(5), 3059–3097.
- McNeil A. Frey R. and Embrechts P.* (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance: New Jersey.
- Meddahi N.* (2002). A Theoretical Comparison Between Integrated and Realized Volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 17, 479–508.
- Melchiori M.* (2004). CreditRisk+ by Fast Fourier Transform, *YieldCurve*, July 2004.
- Merton R.* (1970). *Analytical Optimal Control Theory as Applied to Stochastic and Non-Stochastic Economics*, Ph.D. diss., Massachusetts Institute of Technology.
- Merton R.* (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance*, 29, 449–470.
- Merton R.* (1977). On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem, *Journal of Financial Economics*, 5(2), 241–249.
- Merton R.* (1980). On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation, *Journal of Financial Economics*, 8, 323–361.
- Mester L.* (1997). WhatTs the Point of Credit Scoring?, Federal Reserve Bank of Philadelphia, *Business Review*, (September/October 1997), 3–16.
- Metz C.E. and Kronman H.B.* (1980). Statistical Significance Tests for Binormal ROC Curves, *Journal of Mathematical Psychology*, 22, 218–243.
- Michael P., Nobay R.A. and Peel D.A.* (1997). Transactions Costs and Nonlinear Adjustment in Real Exchange Rates: An Empirical Investigation, *Journal of Political Economy*, 105, 862–879.
- Mikosch T. and Starica C.* (1998). Change of Structure in Financial Time Series, Long Range Dependence and the GARCH Model. Technical Report 98-01, University of Groningen.

- Mikosch T. and Starica C.* (2000). Is it Really Long Memory We See in Financial Returns? Глава в *Extremes and Integrated Risk Management* (под редакцией P. Embrechts). Risk Books.
- Mikosch T. and Starica C.* (2003). Long-range Dependence Effects and ARCH Modeling. Глава в *Theory and Applications of Long-Range Dependence* (под редакцией P. Doukhan, G. Oppenheim & M.S. Taqqu). Birkh auser.
- Miller M.H. and Modigliani F.* (1958). The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *American Economic Review*, **48**, 261–297.
- Miller M.H. and Modigliani F.* (1961). Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares. *Journal of Business*, **34**, 411–433.
- Mills F.C.* (1927). *The Behaviour of Prices*, National Bureau of Economic Research, New York.
- Moscadelli M.* (2004). The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basel Committee. — Banca d'Italia, N 17.
- Muller U.A., Dacorogna M.M., Davé R.D., Olsen R.B., Pictet O.V. and von Weizsacker J.E.* (1997). Volatilities of Different Time Resolutions — Analyzing the Dynamics of Market Components. *Journal of Empirical Finance* 4, 213–239.
- Müller A. and Scarsini M.* (2005). Archimedean Copulae and Positive Dependence, *Journal of Multivariate Analysis*, 93, 434–445.
- Mykland P.A. and Zhang L.* (2006). ANOVA for Diffusions and Ito Processes, *Annals of Statistics*, 34(4), 1931–1963.
- Mosconi R. and Giannini C.* (1992). Non-causality in Cointegrated Systems: Representation Estimation and Testing, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3), 399–417.
- Nelson D.* (1990). Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory* 6, 318–334.
- Nelson D. and Cao C.* (1992). Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model. *Journal of Business & Economic Statistics* 10, 229–235.
- Nelsen R.B.* (1999). *An Introduction to Copulas*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag: New York.
- Nelsen R.B.* (2005). Some Properties of Schur-constant Survival Models and Their Copulas, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 19,



- Nelsen R.B.* (2006). *An Introduction to Copulas*, Lecture Notes in Statistics, 2nd Edition, Springer-Verlag: New York.
- Nelson D.* (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59, 347–370.
- Neslehova J., Embrechts P., Chavez-Demoulin V.* (2006). Infinite Mean Models and the LDA for Operational Risk, *Journal of Operational Risk*, 1, 3–25.
- Newey W.K. and West K.D.* (1987). A Simple Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, 55, 703–708.
- Newey W.K. and McFadden D.* (1994). Large Sample Estimation and Hypothesis Testing, *Handbook of Econometrics*, volume 4, 2111–2245, Elsevier Science B.V.: Amsterdam.
- Nickell P., Perraudin W., Varotto S.* (2006). Ratings Versus Equity-based Credit Risk Modelling: An Empirical Analysis, *Bank of England Quarterly Bulletin*, 41, 215–255.
- Nielsen M.O. and Frederiksen P.H.* (2006). Finite Sample Accuracy and Choice of Sampling Frequency in Integrated Volatility Estimation. Working Paper, Cornell University.
- Norris J. and Pollock K.* (1996). Including Model Uncertainty in Estimating Variances in Multiple Capture Studies. *Environmental and Ecological Statistics*, 3, 235–244.
- Oakes D.* (1994). Multivariate Survival Distributions, *Journal of Nonparametric Statistics*, 3, 343–354.
- Obstfeld M. and Taylor A.M.* (1997). Nonlinear Aspects of Goods-market Arbitrage and Adjustment: Heckscher's Commodity Points Revisited, *Journal of the Japanese and International Economies*, 11, 441–479.
- O'Connell P.G.J.* (1998a). Market Frictions and Real Exchange Rates, *Journal of International Money and Finance*, 17, 71–95.
- O'Connell G.J.* (1998b). The Overvaluation of Purchasing Power Parity, *Journal of International Economics*, 44(1), 1–19.
- O'Connell P.G.J. and Wei S.J.* (1997). The Bigger They Are, the Harder They Fall: How Price Differences Across U.S. Cities Are Arbitrated, Working paper n. 6089, National Bureau of Economic Research.
- Officer R.R.* (1973). The Variability of the Market Factor of the NYSE, *Journal of Business*, 46, 434–453.

- Oka (2003). Anticipating Arrears to the IMF: Early Earnings Systems, *IMF Working Paper*, 18.
- Pagan A. (1996). The Econometrics of Financial Markets. *Journal of Empirical Finance* 3, 15–102.
- Pagan A. and Schwert G. (1990). Alternative Models for Conditional Volatility. *Journal of Econometrics* 45, 267–290.
- Pan J. (2002). The Jump-Risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-Series Study, *Journal of Financial Economics*, 63, 3–50.
- Panchenko V. (2005). Goodness-of-Fit Test for Copulas, *Physica A*, 355(1), 176–182.
- Park H., Mjelde J.W. and Bessler D.A. (2007). Time-Varying Threshold Cointegration and the Law of One Price, *Applied Economics*, 39, 1091–1105.
- Parsley D.C. and Wei S.J. (1996). Convergence to the Law of One Price Without Trade Barriers or Currency Fluctuations, *Quarterly Journal of Economics*, 111, 1211–1236.
- Patton A. (2004). On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation, *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 130–168.
- Patton A. (2006a). Estimation of Copula Models for Time Series of Possibly Different Lengths, *Journal of Applied Econometrics*, 21, 147–173.
- Patton A. (2006b). Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, *International Economic Review*, 47(2), 527–556.
- Payseur S. (2007a). A One Day Comparison of Realized Variance and Covariance Estimators, Working Paper, May 2007, University of Washington.
- Payseur S. (2007b). “Realized Software Package” version 0.8 Manual, <http://students.washington.edu/spayseur/realized/users.manual.08.pdf>.
- Peckham G. (1970). A New Method for Minimizing a Sum of Squares Without Calculating Gradients. — *Computer J.*, vol. 13, 418–420.
- Pereyra V. (1967). Iterative Methods for Solving Nonlinear Least Squares Problems, — *SIAM J. Numerical Analysis*, vol. 4, N 1, 27–36.
- Pesaran M.H., Shin Y. and Smith R.P. (1999). Pooled Mean Group Estimation of Dynamic Heterogeneous Panels, *Journal of the American Statistical Association*, 94, 621–624.

- Phillips P.C.* (1991). Optimal Inference in Cointegrated Systems, *Econometrica*, 59, 283–306.
- Pippenger M. and Goering G.* (1993). A Note on the Empirical Power of Unit Root Tests under Threshold Processes, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55, 473–481.
- Pippenger M. and Goering G.* (2000). Additional Results on the Power of Unit Root and Cointegration Tests Under Threshold Processes, *Applied Economic Letters*, 7, 641–644.
- Poon S., Rockinger M. and Tawn J.* (2004). Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications, *Review of Financial Studies*, 17, 581–610.
- Powell M.I.D.* (1970). A Survey of Numerical Methods for Unconstrained Optimization. — *SIAM Rev.*, vol. 12, N 1, 79–97.
- Priestley M.B.* (1980). State-Dependent Models: A General Approach to Non-linear Time Series Analysis, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 57–71.
- Provost F., Fawcett T. and Kohavi R.* (1998). The Case Against Accuracy Estimation for Comparing Classifiers. In *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Machine Learning*, (ICML-98).
- Psaradakis Z., Sola M. and Spangolo F.* (2004). On Markov-Switching Models, with an Application to Stock Prices and Dividends, *Journal of Applied Econometrics*, 19, 69–88.
- Rabe-Hesketh S. and Skrondal A.* (2004). *Generalized Latent Variable Modeling*, Chapman and Hall.
- Rabe-Hesketh S. and Skrondal A.* (2005). *Multilevel and Longitudinal Modeling using Stata*, STATA press.
- Rabe-Hesketh S., Skrondal A. and Pickles A.* (2002). Reliable Estimation of Generalized Linear Mixed Models Using Adaptive Quadrature, *Stata Journal*, 2(1), 1–21.
- Rabe-Hesketh S., Skrondal A. and Pickles A.* (2005). Maximum Likelihood Estimation of Limited and Discrete Dependent Variable Models with Nested Random Effects, *Journal of Econometrics*, 128(2), 301–323.
- Rachedi O. and Fantazzini D.* (2008). Multivariate Models for Operational Risk : A Copula Approach using Extreme Value Theory and Poisson Shock Models, In: G. Gregoriou (ed.), *Operational Risk towards Basel III: Best Practices and Issues in Modelling, Management and Regulation*,

- Ralston M.L., Jennrich R.I. (1978). Dud, a Derivative-free Algorithm for Non-linear Estimation. — *Technometrics*, vol. 20, 7–14.
- Resnick S.I. (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes* Springer: New York.
- Riedel F. (2004). Dynamic Coherent Risk Measures. — *Stochastic Processes and their Applications*, 112(2), 185–200.
- Ripley B.D. (1987). *Stochastic Simulation*, Wiley, London.
- Robinson P.M. (1991). Testing for Strong Serial Correlation and Dynamic Conditional Heteroskedasticity in Multiple Regression, *Journal of Econometrics*, 47, 67–84.
- Rockafellar T. and Uryasev S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. — *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1443–1471
- Rodgers J.L. and Nicewander W.A. (1988). Thirteen Ways to Look at the Correlation Coefficient, *The American Statistician*, 42, 59–66.
- Rodriguez P. and Rodriguez A. (2006). Understanding and Predicting Sovereign Debt Rescheduling: A Comparison of the Areas under Receiver Operating Characteristic Curves, *Journal of Forecasting*, 25, 459–479.
- Rosenberg J.V. and Schuermann T. (2006). A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-tailed Risks, *Journal of Financial Economics*, 79, 569–614.
- Rosenblatt M. (1952). Remarks on a Multivariate Transformation, *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 470–472.
- Rossi B.D., Santucci P.D.M. and Fantazzini D. (2008). Long Memory and Tail dependence in Trading Volume and Volatility, Working paper n. 209/12-08, University of Pavia, Italy.
- Rousseuw P.J. and Molenberghs G. (1993). Transformation of Non Positive Semidefinite Correlation Matrices. *Commun. Statist.-Theory Meth.* 22, 965–984.
- Ruud P. (2000). *An Introduction to Classical Econometric Theory*, Oxford University Press.
- Ruymgaart F.H., Shorack G.R. and Van Zwet W.R. (1972). Asymptotic Normality of Nonparametric Tests for Independence, *The Annales of Statistics*, 43, 1972, 1122–1135.
- Saikkonen P. (1991). Asymptotically Efficient Estimation of Cointegration Regressions, *Econometric Theory*, 7, 1–21.

- Salvadori G. and De Michele C.* (2007). On the Use of Copulas in Hydrology: Theory and Practice, *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 369–380.
- Sarantis N.* (1999). Modeling Non-linearities in Real Effective Exchange Rates, *Journal of International Money and Finance*, 18, 27–45.
- Saunders A.* (1997). *Financial Institutions Management: A Modern Perspective*, Second Ed. Irwin, Illinois.
- Savu C. and Trede M.* (2008). Goodness-of-Fit Tests for Parametric Families of Archimedean Copulas, *Quantitative Finance*, 8(2), 109–116.
- Savu C. and Trede M.* (2009). Hierarchies of Archimedean Copulas, *Quantitative Finance*, forthcoming.
- Scaillet O.* (2005). Kernel Based Goodness-of-Fit Tests for Copulas with Fixed Smoothing Parameters. FAME Research Paper Series n. 145, International Center for Financial Asset Management and Engineering. Available at <http://ideas.repec.org/p/fam/rpseri/rp145.html>.
- Schmidt R.* (2002). Tail Dependence for Elliptically Contoured Distributions, *Mathematical Methods of Operations Research*, 55(2), 301–327.
- Schoutens W.* (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley.
- Schroder B. and Richter O.* (1999-2000). Are Habitat Models Transferable in Space and Time? *Journal of Nature Conservation*, 8, 195–205.
- Schwert G.W.* (1998). Stock Market Volatility: Ten Years After the Crash. Brookings- Wharton Papers on Financial Services, I, 65–114.
- Schwarz G.* (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6, 461–464.
- Schweizer B. and Sklar A.* (1983). *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier Science: New York.
- Schweizer B. and Wolff E.* (1976). Sur Une Mesure de Dépendance Pour Les Variables Aléatoires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 283, 659–661.
- Schweizer B. and Wolff E.* (1981). On Non-parametric Measures of Dependence for Random Variables, *Annals of Statistics*, 9, 879–885.
- Sentana E.* (1995). Quadratic ARCH Models. *Review of Economic Studies* 62, 639–661.
- Seo M.* (2006). Bootstrap Testing for the Null of no Cointegration in a Threshold Vector Error Correction Model, *Journal of Econometrics*, 134,

- Seo M. (2009). Estimation of Nonlinear Error Correction Models, Working Paper, London School of Economics.
- Sercu P., Uppal R. and Van Hulle C. (1995). The Exchange Rate in the Presence of Transaction Costs: Implications for Tests of Purchasing Power Parity, *Journal of Finance*, 10, 1309–1319.
- Serra T. and Goodwin B.K. (2002). Specification Selection Issues In Multivariate Threshold And Switching Models, 2002 Annual meeting, July 28–31, Long Beach, CA 19843, American Agricultural Economics Association (New Name 2008: Agricultural and Applied Economics Association).
- Serra T. and Goodwin B.K. (2003). Price Transmission and Asymmetric Adjustment in the Spanish Dairy Sector, *Applied Economics*, 35, 1889–1899.
- Serra T. and Goodwin B.K. (2004). Regional Integration of Nineteenth Century U.S. Egg Markets, *Journal of Agricultural Economics*, 55, 59–74.
- Shackleton M.B. Shiuyan P., Taylor S. and Xu X. (2004). Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models, *Journal of Banking and Finance*, 28(10), 2541-2563.
- Shephard N. (1996). Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility Models. Глава в *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields* (под редакцией D. Cox, D. Hinkley & O. Barndorff-Nielsen), 1–67. Chapman & Hall.
- Shih J.H. (1998). A Goodness-of-Fit Test for Association in a Bivariate Survival Model, *Biometrika*, 85, 189–200.
- Shih J.H. and Louis T.A. (1995). Inferences on the Association Parameter in Copula Models for Bivariate Survival Data, *Biometrics*, 51, 1384–1399.
- Shimko D. (2004). *Credit Risk: Models and Management*, Second Edition, Risk Books.
- Shleifer A. and Vishny R.W. (1992). Liquidation Values and Debt Capacity: A Market Equilibrium Approach, *Journal of Finance*, 47(4), 1343–1366.
- Sibuya M. (1961). Bivariate Extreme Statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, 11, 195–210.
- Sims C. (1980). Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, 48, 1–48.
- Sklar A. (1959). Fonctions de Répartition à n Dimensions et leurs Marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8, 229–231.

- Sklar A.* (1996). Random Variables, Distribution Functions, and Copula: Personal Look Backward and Forward. — Lecture Notes. Monograph Series, 28, 1–14.
- Starica C. and Granger C.* (2005). Non-stationarities in Stock Returns. *Review of Economics and Statistics* 87, 503–522.
- Steuer R.E.* (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. — N.-Y.: Wiley.
- Stevens W.L.* (1950). Fiducial Limits of the Parameter of a Discontinuous Distribution, *Biometrika*, 37, 117–129.
- Stock J.H.* (1987). Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors, *Econometrica*, 55 1035–1056.
- Stock J.H. and Watson M.W.* (1993). A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems, *Econometrica*, 61, 783–820.
- Straumann D.* (2005). Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models. Lecture Notes in Statistics. Springer.
- Takeuchi K.* (1976). Distribution of information statistics and criteria for adequacy of models, *Mathematical Sciences*, 153, 12–18.
- Taniguchi M. and Kakizawa Y.* (2000). *Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series*, Springer: New York.
- Taylor S.* (1986). *Modeling Financial Time Series*, Wiley: New York.
- Taylor A.M.* (2001). Potential Pitfalls for the Purchasing Power Parity Puzzle—sampling and Specification Biases in Mean-reversion Tests of the Law of One Price, *Econometrica*, 69, 473–498.
- Taylor S.J. and Xu X.* (1997). The Incremental Volatility Information in One Million Foreign Exchange Quotations, *Journal of Empirical Finance*, 4, 317–340.
- Teräsvirta T.* (2009). An introduction to Univariate GARCH Models. Глава в *Handbook of Financial Time Series* (под редакцией Т. Andersen, R. Davis, J.-P. Kreiss & T. Mikosch). Springer.
- Tilling K. and Sterne J.* (1999). Capture-recapture Models Including Covariate Effects, *American Journal of Epidemiology*, 149, 392–400.
- Tilling K., Sterne J. and Wolfe C.* (2001). Estimation of Incidence of Stroke Using a Capture-recapture Model Including Covariates, *International Journal of Epidemiology*, 30, 1351–1359.

- Toda H. and Phillips P.* (1994). Vector Autoregression and Causality: a Theoretical Overview and Simulation Study, *Econometric Reviews*, 13(2), 259–284.
- Tong H.* (1978). On a Threshold Model, in C.H. Chen (ed), *Pattern recognition and Signal Processing*, Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam, The Netherlands.
- Tong H.* (1990). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach*. Clarendon Press, Oxford, UK.
- Tong H.* (2007). Birth of the Threshold Time Series Model, *Statistica Sinica*, 17, 8–14.
- Treacy W.F. and Carey M.* (2000). Credit Risk Rating Systems at Large U.S. Banks, *Journal of Banking and Finance*, 24(1-2), 167–201.
- Trenkler C. and Wolf N.* (2003). Economic Integration in Interwar Poland - A Threshold Cointegration Analysis of the Law of One Price for Poland (1924–1937), European University Institute Working Paper ECO, No. 2003/5, San Domenico, Italy.
- Tsay R.S.* (1989). Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes, *Journal of the American Statistical Association*, 84, 231–240.
- Tsay R.S.* (1998). Testing and Modeling Multivariate Threshold Models, *Journal of the American Statistical Association*, 93, 1188–1202.
- Tsay R.S.* (2002). *Analysis of Financial Time Series*. Wiley.
- Tse Y.K.* (1998). The Conditional Heteroscedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate, *Journal of Applied Econometrics*, 193, 49–55
- Tse Y. and Tsui A.* (2002). A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 351–362.
- Uppal R.* (1993). A General Equilibrium Model of International Portfolio Choice, *Journal of Finance*, 48, 529–553.
- Van Campenhout B.* (2007). Modelling Trends in Food Market Integration: Method and an Application to Tanzanian Maize Markets, *Food Policy*, 32, 112–127.
- Van de Castle, Karen and David Keisman* (2000). Suddenly Structure Mattered: Insights into Recoveries of Defaulted, *Standard and Poor's Corporate Ratings*, May 24.
- Van Der Laan M. and Bryan J.* (2001). Gene Expression Analysis with the Parametric Bootstrap, *Biostatistics*, 2(4), 445–461



- Van der Vaart A. and Wellner J. (1996). Weak Convergence and Empirical Processes, Springer-Verlag: New York.*
- Van der Weide R. (2002). GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model, Journal of Applied Econometrics, 17, 549–564.*
- Van De Wiel M.A. and Bucchianico A. (2001). Fast Computation of the Exact Null Distribution of Spearman's rho and Page's L Statistic for Samples with and Without Ties, Journal of Statistical Planning and Inference, 92, 133–145.*
- Vapnik V. (1998). Statistical Learning Theory, Wiley.*
- Varma P. and Cantor R. (2005). Determinants of Recovery Rates on Defaulted Bonds and Loans for North American Corporate Issuers: 1983-2003, Journal of Fixed Income, 14(4), 29–44.*
- Vassalou M. and Xing Y. (2004). Default Risk in Equity Returns, Journal of Finance, 59(2), 831–68.*
- Zaffaroni P. (2007). Contemporaneous Aggregation of GARCH Processes. Journal of Time Series Analysis 28, 521–544.*
- Zako an J.-M. (1994). Threshold Heteroskedastic Models. Journal of Economic Dynamics and Control 18, 931–955.*
- Zhang L., Mykland P.A., Ayt-Sahalia Y. (2005). A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility with Noisy High Frequency Data, Journal of the American Statistical Association 100, 1394–1411.*
- Zhang L. and Singh V. (2006). Bivariate Flood Frequency Analysis Using the Copula Method, Journal of Hydrologic Engineering, 11(2), 150–164.*
- Zhang L. (2006). Efficient Estimation of Stochastic Volatility Using Noisy Observations: A Multi-scale Approach, Bernoulli, 12, 1019–1043.*
- Zhou B. (1996). High Frequency Data and Volatility in Foreign-exchange Rates, Journal of Business and Economic Statistics, 14, 45–52.*
- Zivot E. (2000). The Power of Single Equation Tests for Cointegration when the Cointegrating Vector is Pre-specified, Econometric Theory, 16, 407–440.*
- Zwane E., Van der Heijden P. (2003). Implementing the Parametric Bootstrap in Capture-recapture Models with Continuous Covariates, Statistics and Probability Letters, 65, 121–125.*
- Zwane E., Van der Pal-de Bruin, Van der Heijden P. (2004). The Multiple-record Systems Estimator when Registrations Refer to Different but Overlapping Populations, Statistics in Medicine, 23, 2267–2281.*

- Zweig and Campbell* (1993). Receiver-Operating Characteristic (ROC) Plots: a Fundamental Evaluation Tool in Clinical Medicine, *Clinical chemistry* **39**, 561–577.
- Wang S.*(1998) Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Model and Algorithms, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, LXV, 848–893.
- Wang W. and Wells M.T.* (2000). Model Selection and Semiparametric Inference for Bivariate Failure-time Data, *Journal of the American Statistical Association*, 95, 62–72.
- Watson M.W.* (1994). Vector Autoregressions and Cointegration. In: Engle R.F., McFadden D.L. (Eds.), *Handbook of Econometrics*, vol. 4., North-Holland, Amsterdam, 2843–2915.
- WCY.* The World Competitiveness Yearbook. Edition IMD International, Lausanne, Switzerland. 1997–2011.
- Weiss A.A.* (1986). Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing, *Econometric Theory*, 2, 107–131.
- Whelan N.* (2004). Sampling from Archimedean copulas, *Quantitative Finance*, 4(3), 339–352.
- White H.* (1994). *Estimation, Inference and Specification Analysis*, Cambridge University Press.
- White H.* (2000). A Reality Check for Data Snooping, *Econometrica*, 68, 1097–1126.
- Whittle P.* (1954). The Statistical Analysis of a Seiche Record, *Journal of Marine Research*, 13, 76–100.
- Wilson T.* (1997a). Measuring and Managing Credit Portfolio Risk: Part I: Modelling Systematic Default Risk, *The Journal of Lending and Credit Risk Management*, July, 61–72.
- Wilson T.* (1997b). Measuring and Managing Credit Portfolio Risk: Part II: Portfolio Loss Distributions, *The Journal of Lending and Credit Risk Management*, August, 67–78.
- Wu J.L and Chen P.F.* (2008). A Revisit on Dissecting the PPP Puzzle: Evidence from a Nonlinear Approach, *Economic Modelling*, 25, 684–695.
- Yan J.* (2007). Enjoy the Joy of Copulas: With a Package Copula, *Journal of Statistical Software*, 21(4), 1–21.



# Алфавитно-предметный указатель

## А

Абсолютная монотонность функции 534  
Автодинамика интегральных индикаторов 88  
Автокорреляция (многомерная) 165  
Авторегрессионная дробно (фрактально)-интегрированная скользящего среднего модель (ARFIMA) 413, 488–489  
Авторегрессионной условной гетероскедастичности модель (ARCH-модель) 385, 389  
Авторегрессионной условной гетероскедастичности модель с переключением режимов (SWARCH-модель) 409  
Акаике информационный критерий 15, 1915, 583  
Апостериорное распределение параметра 122  
Априорное распределение параметра 122  
Асимметричная обобщенная модель условной гетероскедастичности (AGARCH-модель) 405

## Б

Базельский Комитет по банковскому надзору (BCBS) 628

Байеса формула 122  
Байесовский выбор копула-функций 586  
Байесовский подход к оценке функции распределения совокупного операционного убытка 707  
Байесовский подход в эконометрическом анализе 122  
Балльные оценки (экспертные) 62  
БЕКК-модели (ВЕКК-модели) 438  
Белый шум (многомерный, слабый) 166, 171  
Бокса – Кокса преобразование 25  
Бевериджа – Нельсона разложение (временного ряда) 284–285  
Бистепенная вариация (BV-волатильность) 482, 485  
Бутстреп 756  
Быстрое преобразование Фурье (БПФ) 822  
Бэк-тестирование 846

## В

Валовой внутренний продукт (ВВП) 91-92, 95–97  
ВАР- (VAR-) модели (процессы) 166, 168, 169  
ВЕК- (VEK-) модель 436  
Векторная авторегрессия 166

Векторная модель коррекции остатками (ВМКО- или VEC-модель) 293  
 — — — — с марковскими переключениями в коэффициентах (ВМКОсМП) 346  
 Векторный процесс белого шума (VWN-) 171  
 — — скользящего среднего (VMA-) 170  
 Величина номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д)) 762, 772  
 Вероятность дефолта 748  
 Вероятность нулевой цены (ВНЦ) 751  
 Вертикальное выстраивание столбцов матрицы (**A**) ( $\text{vec}(\mathbf{A})$ ) 172  
 Волатильность 385–387  
 Волатильность интегрированная 488  
 Волда представление 205  
 Выбор копула-функции 583  
 Выбор порядка VAR-модели 191

## Г

Генезис сопряженных априорных распределений 131  
 Генерирование многомерных наблюдений 550, 554  
 Главная компонента первая 78  
 — — — модифицированная 86  
 Главных компонент метод в оценивании COY 261  
 Гранжера теорема о представлении 295  
 Граница потерь уровня  $\alpha$  ( $\text{ГП}_\alpha$ )

## Д

D-ветвизация 553  
 Двухпороговая авторегрессионная модель условной гетероскедастичности (DTARCH-модель) 408  
 Двухшаговый метод максимального правдоподобия 568  
 Двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК) 257  
 Дельта-гамма аппроксимации для нелинейных портфелей 655  
 Динамическая условная корреляция (DCC) 450, 668  
 Динамический метод наименьших квадратов (ДМНК) 312  
 Дисперсионно-ковариационный метод управления рыночным риском 654  
 Доля использованных средств компанией, оказавшейся в состоянии дефолта (ДИС(Д)) 774  
 Доля невозвращенных при дефолте средств (ДНС(Д)) 800  
 Достаточные статистики 127  
 Дробно-интегрированная обобщенная модель условной гетероскедастичности (FIGARCH-модель) 414  
 — — экспоненциальная обобщенная модель условной гетероскедастичности (FIEGARCH-модель) 418

## З

Зависимость гиперболического типа 18

— степенного типа 23  
 — логарифмического типа 24

- множественного упорядоченного выбора 75–76
- Задача нелинейного программирования 32
- статистического исследования зависимости 11–12

## И

- Идентифицируемости условия (в узком смысле) отдельного уравнения COU 234
- Идентифицируемость SVAR-модели 208
  - COU в узком смысле 234
  - — в широком смысле 238
- Индикаторная переменная 322
- Интегральный индикатор (измеритель) 58, 71, 77
  - — — блочный 84, 103–108
  - — — сводный 86, 109–110
  - — — уровня мастерства спортсмена 110–118
- Интегрированная обобщенная модель условной гетероскедастичности (IGARCH-модель) 399
- Интегрируемость временных рядов порядка  $d$  212, 283–284
- Интервальная пороговая векторная модель коррекции остатками (И-ПВМКО- или BAND-TVECM-модель) 327

## Й

- Йохансена алгоритм вычисления оценок максимального

- тест (на число конинтегрирующих соотношений) 306

## К

- Калибровка моделей 749
- Канонический метод максимума правдоподобия 572
- Качество жизни населения 90, 101
- Квартисимность интегрирования 472
- Коинтеграция (временных рядов) 281
  - пороговая 324
- Коинтегрированность временных рядов 282–283
- Комонотонность случайных величин 513
- Компромисс между сложностью модели и точностью ее оценивания 15–16
- Копула GARCH-модель 671
- Копула-функции 509
  - — архимедовы 528
  - — — вложенные 535
  - — Гумбеля 532
  - — Клейтона 531, 533
  - — Котца 517
  - — Коши 517
  - — Лапласа 517
  - — логистические 517
  - — нормальные 517, 518
  - — парные 545
  - — Стьюдента 517, 519
  - — Франка 532, 533
  - — эллиптического типа 516

- Косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) 252

— ранговой корреляции  
Спирмена 560  
— — — Кендала 562  
Кредитного риска компоненты  
719  
Кредитные события 840  
— спреда 750  
Критерии согласия для  
копула-функций 590

## Л

Линеаризация зависимостей 17, 25

## М

Макроэкономические модели  
кредитного риска 776  
Матрица парных сравнений 62  
— авторегрессионных  
коэффициентов 169  
Межобъектная динамика  
интегральных индикаторов 88–89  
Меры зависимости случайных  
величин 557  
Меры риска 632  
Метод взвешенных по  
вероятности моментов  
(BVM-метод) 696  
Метод градиентного спуска 35  
Метод максимального  
правдоподобия с ограниченной  
информацией 266  
— — — с полной информацией  
266  
— Марквардта 40  
— Монте-Карло статистических  
испытаний 275, 657

— Ньютона – Гаусса 38  
— полной оценки мер риска  
(МПО) 658–659  
— сопряженных градиентов 34, 45  
Методология Credit Portfolio View  
829  
Многомерные временные ряды  
163  
Многомерные GARCH-модели  
(MGARCH-модели) 433  
Модель адаптивных ожиданий  
371  
Модель Бланчада – Куаха 216  
— гетерогенной  
авторегрессионной реализованной  
волатильности (HAR-RV-модель)  
488  
— — — — — со скачками,  
используемыми в качестве  
предикторов (HAR-RV-J-модель)  
490  
— — — — — — — — — с  
учетом серийной корреляции  
(HAR-RV-CJ-модель) 492  
— гиперинфляции (Кагана) 372  
— кредитной миграции 775  
— Мертона 744  
— потребления (Фридмана) 372  
— со скачками (разрывами) 481  
— частичного приспособления 368  
— ценообразования на основной  
капитал 407  
— Credit Risk+ 810  
— Credit Metrics 776  
— KMV 795

## Н

Нелинейная обобщенная модель  
условной гетероскедастичности  
(NAGARCH-модель) 405

Нелинейный метод наименьших квадратов 31–33  
 Нелинейные модели коинтеграции 320  
 Нелинейные модели регрессии 16  
 Непараметрическое оценивание 580  
 Норма восстановления (НВ) 762–763

## О

Обобщенная модель авторегрессионной условной гетероскедастичности (GARCH-модель) 392  
 — — — — — в среднем (GARCH-M-модель) 410  
 — — — — — с долгой памятью 411  
 Обобщенная ортогональная GARCH-модель (GOGARCH-модель) 445  
 Обучающий массив данных 61  
 Одинаковая распределенность и взаимная независимость случайных величин (iid) 175  
 Ожидаемая частота дефолтов (ОЧД) 795  
 Оперативная кривая 733–735  
 Оператор L сдвига (по времени назад) 167  
 Оператор vech 436  
 Опционы PUT и CALL 645  
 Ортогональная GARCH-модель 444  
 Остаточная случайная составляющая 12  
 Отношения правдоподобия тест (ОП-тест или LR-тест) 187

квазимаксимального правдоподобия (QMLE) 453  
 Оценка состоятельная 192  
 — сильно состоятельная 192  
 — ядерная 476  
 Оценки по подвыборкам 478  
 — стягивающие (для скачков) 483

## П

Панельные данные 738  
 Подход базовых индикаторов (ПБИ) к управлению операционным риском 683  
 Подход внутренних рейтингов (ПВР) к управлению кредитным риском 726  
 Полиномы Чебышева 13  
 Пороговая авторегрессионная модель (ПАР- или TAR-модель) 321  
 Пороговая векторная модель коррекции остатками (ПВМКО- или TVEC-модель) 323  
 Пороговая обобщенная модель условной гетероскедастичности (TGARCH-модель) 408  
 Последовательный многомерный метод наименьших квадратов 328  
 Постоянная условная корреляция (ССС) 450, 668  
 Предопределенные переменные 224  
 Приведенная форма СОУ 227  
 Причинно-следственная связь (по Гранжеру) 185  
 Прогнозирование волатильности 398  
 Правило абсолютного приоритета (ПАП) 766



## Р

Равновесная пороговая векторная модель коррекции остатками (Р-ПВМКО-модель) 342

Распределения, сопряженные с наблюдаемой генеральной совокупностью 125–126

— САЗ-априорное 132

— бета 136

— гамма 137

— многомерное

гамма-нормальное 139

— обобщенное многомерное

Стьюдента 158

Расстояние до дефолта (РД) 795

Расширенный тест

Дики – Фуллера (РДВ- или ADF-тест) 339

Реализованная волатильность 468–469, 471

Регрессионные модели с распределенными лагами 360

Регрессия полиномиальная 13

Регуляторный капитал 628

Редукция многокритериальных схем 58

Рейтинговые системы 730

Риск кредитный 630, 718

— операционный 631, 678

— потери ликвидности 631

— рыночный 630, 632

— юридический 631

## С

Самовозбуждаемая пороговая авторегрессия (СВПАР- или SETAR-модели) 322

Свертка (функция) нескольких показателей 58

Синтетическая латентная категория 58

Системы одновременных уравнений (СОУ) 223

— — — чисто рекурсивные 251

Средние ожидаемые потери уровня  $\alpha$  ( $СОП_\alpha$  или  $ES_\alpha$ ) 638

Спектральные меры риска 641

Спецификация модели 232, 344

Стандартизированный подход (СП) к управлению

операционным риском 684

— — — — — кредитным риском 725

Стационарность временного ряда ковариационная (слабая) 164

Стока – Ватсона представление общего тренда 290

Структура лагов 363

— — геометрическая (Койка) 366

— — нормированная (вероятностная) 363

— — полиномиальная (Ширли Алмон) 364

Структурная форма СОУ 226

Структурно-скользящее среднее (SMA-представление) 205

Структурные VAR-модели (SVAR-модели) 202

— модели кредитного риска 775

— параметры СОУ 228

## Т

Теорема Шкляра (о копула-функциях) 510

Тест Берковица 846–847

Тест множителей Лагранжа (LM-тест) 196

— на нормальность 196

- Портмандо 194
- Энгла – Гранжера (на коинтегрируемость вектор-процесса) 302
- Тренд детерминированный 299
- Трехшаговый канонический метод максимального правдоподобия (КМЕ-СМЛ-метод) 574
- метод наименьших квадратов (ЗМНК) 262

## У

- Убытки неожиданные (НУ) 722
- Убытки ожидаемые (ОУ) 722
- Унификация измерительных шкал наблюдаемых переменных 69
- Упорядочения (ранжировки) экспертные 62
- Управление рыночным риском 632
- операционным риском 678
- кредитным риском 718
- Условие порядка (идентифицируемости отдельного уравнения СОУ) 241–244
- ранга — — — — 241–244
- Условная граница потерь уровня  $\alpha$  (УГП $_{\alpha}$  или CVaR $_{\alpha}$ ) 650
- Усовершенствованные модели измерения риска (УМИР-модели) 680

## Ф

- Факторная GARCH-модель 441
- Фактор эквивалентности займа

- Филлипса треугольное представление временного ряда 289
- Функция автокорреляционная (многомерного временного ряда) 163–164
- импульсного отклика 176
- правдоподобия имеющихся наблюдений 26–27, 124
- регрессии 12
- структурного импульсного отклика (СИО-функция) 206
- целевая 59

## Х

- Хвостовая зависимость 564
- Холецкого разложение 210, 220
- Хэннана – Квина информационный критерий (НQ-тест) 191

## Ш

- Шварца информационный критерий 15–16, 191

## Э

- Экзогенные переменные 224
- Экономический капитал 722, 723
- Экспоненциальная обобщенная модель условной гетероскедастичности (EGARCH-модель) 401
- Экстремальной группировки признаков процедура

Энгеля кривая 20

Эндогенные переменные 224

## Ю

Юла – Уолкера уравнения 394–395

## Я

Ядерная функция 580

— оценка 581

Якобиан (определитель матрицы преобразования) 27

[Вернуться в каталог бесплатных учебников](#)

НАПИСАНИЕ на ЗАКАЗ:

1. Дипломы, курсовые, чертежи...
2. Диссертации и научные работы.

ЛЮБАЯ тематика,  
в том числе ЭКОНОМЕТРИКА, ТЕХНИКА...

Учебное издание

*Айвазян Сергей Артемьевич*  
*Фантазини Деан*

ЭКОНОМЕТРИКА-2:  
продвинутый курс  
с приложениями в финансах

Учебник

Издательство «Магистр».  
101000 Москва, Колпачный пер., 9А.  
Тел.: (495) 621-62-95.  
e-mail: [magistr-book@mail.ru](mailto:magistr-book@mail.ru)